

page 1 22 ***** rrrrrrrr aaaaaa	تصحيح الامتحان الوطني الموحد للبيكالوريا 2026 -الدورة العادية- - الموضوع - NS22F FB : MATHS XYZ	+0XIIA&+ I IIC40&0 +0E0L00+ I 00XC& 00E80 ^ 000IIC^ 0EJL000 ^ +0IIBI+ المملكة المغربية وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة Réalisé par : Pr. ISMAIL AIROU et Pr. MOHAMMED ELABBASSI	
4	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (خيار فرنسية)	الشعبة أو المسلك

INSTRUCTIONS POUR LA LECTURE DE LA CORRECTION

- 🧐 Essayez de résoudre par vous-même avant de consulter la correction ;
- 🔍 Lisez chaque étape attentivement et comprenez la logique du raisonnement ;
- ✍ Notez les méthodes utilisées pour les réutiliser ;
- 🔄 Refaites les exercices sur votre brouillon.



COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de quatre exercices indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice 1	Analyse	10 points
Exercice 2	Nombres complexes	3.5 points
Exercice 3	Arithmétiques et probabilités	3 points
Problème	Structures algébriques	3.5 points

Exercice : 1 (10pts)

Partie I :

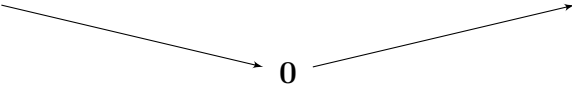
0.25 1) a) Montrons que $(\forall x \in \mathbb{R}) : 1 + x \leq e^x$.

Considérons la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = e^x - (1 + x)$.

La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ (somme de deux fonctions dérivables) et on a :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) : h'(x) = (e^x)' - (1 + x)' = e^x - 1.$$

D'où :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
h			

Donc h est strictement décroissante sur $] -\infty ; 0]$ et strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

Par conséquent $h(0) = 0$ est la valeur minimale de h sur $\mathbb{R}$.

On en déduit que $(\forall x \in \mathbb{R}) : 0 \leq h(x)$, et par suite : $(\forall x \in \mathbb{R}) : 1 + x \leq e^x$.

0.25 b) Déduisons que $(\forall x \in [0 ; +\infty[) : \frac{x^2}{2} + 1 + x \leq e^x$.

Soit $x \in [0 ; +\infty[$. D'après la question 1.a) on a : $(\forall t \in [0 ; x]) : 1 + t \leq e^t$.

Les fonctions $t \mapsto 1 + t$ et $t \mapsto e^t$ sont continues sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $[0 ; x]$.

Comme $0 \leq x$, on a alors : $\int_0^x (1 + t) dt \leq \int_0^x e^t dt$.

Puisque

$$\int_0^x (1 + t) dt = \left[t + \frac{t^2}{2} \right]_0^x = x + \frac{x^2}{2} \quad \text{et} \quad \int_0^x e^t dt = [e^t]_0^x = e^x - 1.$$

Donc $x + \frac{x^2}{2} \leq e^x - 1$, d'où : $(\forall x \in [0 ; +\infty[) : \frac{x^2}{2} + 1 + x \leq e^x$.

Pour tout $x \in [0 ; +\infty[$, on pose $I(x) = \int_0^x te^{-t} dt$.

0.25 2) a) Soit $x \in [0 ; +\infty[$. Montrons que $I(x) \leq \frac{x^2}{2}$.

On a $(\forall t \in [0 ; x]) : -t \leq 0$, donc $e^{-t} \leq 1$.

Comme aussi $(\forall t \in [0 ; x]) : 0 \leq t$, on en déduit : $(\forall t \in [0 ; x]) : te^{-t} \leq t$.

Les fonctions $t \mapsto te^{-t}$ et $t \mapsto t$ sont continues sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $[0 ; x]$ et puisque $0 \leq x$, alors $\int_0^x te^{-t} dt \leq \int_0^x t dt$.

Or $\int_0^x t \, dt = \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^x = \frac{x^2}{2}$, d'où : $I(x) \leq \frac{x^2}{2}$.

0.5

b) Montrons que $I(x) = -xe^{-x} - e^{-x} + 1$ pour tout $x \in [0; +\infty[$.

Posons $\begin{cases} u(t) = t \\ v'(t) = e^{-t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = -e^{-t} \end{cases}$.

Par intégration par parties :

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_0^x te^{-t} \, dt = [-te^{-t}]_0^x + \int_0^x e^{-t} \, dt \\ &= -xe^{-x} + [-e^{-t}]_0^x = -xe^{-x} - e^{-x} + 1. \end{aligned}$$

D'où : $(\forall x \in [0; +\infty[) : I(x) = -xe^{-x} - e^{-x} + 1.$

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = \frac{e^x - x - 1}{x^2}$.

0.5

3) a) Soit $x \in]0; +\infty[$. Montrons que $\frac{1}{2} \leq g(x) \leq \frac{e^x}{2}$.

D'après 1.b) on a $\frac{x^2}{2} \leq e^x - x - 1$ (*).

D'après 2.a) et 2.b) on a : $-xe^{-x} - e^{-x} + 1 \leq \frac{x^2}{2}$.

En multipliant par $e^x > 0$, on obtient $e^x - x - 1 \leq \frac{x^2}{2} e^x$ (**).

D'après (*) et (**), on trouve : $\frac{x^2}{2} \leq e^x - x - 1 \leq \frac{x^2}{2} e^x$.

En divisant par $x^2 > 0$: $\frac{1}{2} \leq \frac{e^x - x - 1}{x^2} \leq \frac{e^x}{2}$.

D'où : $(\forall x \in]0; +\infty[) : \frac{1}{2} \leq g(x) \leq \frac{e^x}{2}.$

0.25

b) On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$.

D'après le théorème des gendarmes : $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \frac{1}{2}.$

Partie II :

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{x}{e^x - e^{-x}}$ si $x > 0$ et $f(0) = \frac{1}{2}$.

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

0.5 1) Calcul de $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

On a, pour tout $x > 0$, $f(x) = \frac{x}{e^x - e^{-x}} = \frac{1}{\frac{e^x}{x} - \frac{e^{-x}}{x}}$.

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{x} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x} - \frac{e^{-x}}{x} \right) = +\infty$.

D'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Interprétation : la droite d'équation $y = 0$ (axe des abscisses) est une asymptote horizontale à (C) au voisinage de $+\infty$.

0.25 2) Montrons que f est continue à droite en 0.

Pour tout $x > 0$: $f(x) = \frac{x}{e^x - e^{-x}} = \frac{x e^x}{e^{2x} - 1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{e^{2x} - 1} \cdot e^x$.

En posant $t = 2x$, on a $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{2x} - 1}{2x} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^t - 1}{t} = 1$, et $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = 1$.

Donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2} = f(0)$.

D'où f est continue à droite en 0.

0.25 3) a) Soit $x \in]0; +\infty[$. Montrons que $\frac{f(x) - f(0)}{x} = -e^{-x} f(x) \left(\frac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2x^2} \right)$.

On a :

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \left(\frac{x}{e^x - e^{-x}} - \frac{1}{2} \right) \frac{1}{x} \\ &= \frac{x}{e^x - e^{-x}} \left(1 - \frac{e^x - e^{-x}}{2x} \right) \frac{1}{x} \\ &= f(x) \left(\frac{2x - e^x + e^{-x}}{2x^2} \right) \\ &= -e^{-x} f(x) \left(\frac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2x^2} \right). \end{aligned}$$

0.25 b) Soit $x \in]0; +\infty[$. Montrons que $\frac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2x^2} = 2g(2x) - \frac{e^x - 1}{x}$.

On a :

$$\begin{aligned} \frac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2x^2} &= \frac{e^{2x} - 2x - 1 + 2x - 2xe^x}{2x^2} \\ &= \frac{e^{2x} - 2x - 1}{2x^2} - \frac{2x(e^x - 1)}{2x^2} \\ &= 2 \cdot \frac{e^{2x} - 2x - 1}{(2x)^2} - \frac{e^x - 1}{x} \\ &= 2g(2x) - \frac{e^x - 1}{x}. \end{aligned}$$

0.25

c) Déduisons que f est dérivable à droite en 0 et que $f'_d(0) = 0$.

D'après 3.a) et 3.b), pour tout $x \in]0; +\infty[$:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -e^{-x} f(x) \left(2g(2x) - \frac{e^x - 1}{x} \right).$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} -e^{-x} = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

$$\text{Et en posant } t = 2x, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} g(2x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -1 \times \frac{1}{2} \times \left(2 \times \frac{1}{2} - 1 \right) = 0 \in \mathbb{R}.$$

D'où f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 0$.

Pour tout $x \in [0; +\infty[$, on pose $J(x) = \int_0^x te^t dt$.

0.5

4) a) Soit $x \in [0; +\infty[$. Montrons que $0 \leq I(x) \leq J(x)$.

On a $(\forall t \in [0; x]) : -t \leq t$, donc $e^{-t} \leq e^t$.

Comme aussi $(\forall t \in [0; x]) : 0 \leq t$, on a alors : $(\forall t \in [0; x]) : 0 \leq te^{-t} \leq te^t$.

Les fonctions $t \mapsto te^{-t}$ et $t \mapsto te^t$ sont continues sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $[0; x]$,

et puisque $0 \leq x$, alors $0 \leq \int_0^x te^{-t} dt \leq \int_0^x te^t dt$.

D'où : $0 \leq I(x) \leq J(x)$.

0.25

b) Montrons que $J(x) = (x - 1)e^x + 1$ pour tout $x \in [0; +\infty[$.

$$\text{Posons } \begin{cases} u(t) = t \\ v'(t) = e^t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = e^t \end{cases}.$$

Par intégration par parties :

$$\begin{aligned} J(x) &= \int_0^x te^t dt = [te^t]_0^x - \int_0^x e^t dt \\ &= xe^x - [e^t]_0^x = xe^x - e^x + 1 = (x - 1)e^x + 1. \end{aligned}$$

D'où : $(\forall x \in [0; +\infty[) : J(x) = (x - 1)e^x + 1$.

0.5

c) Montrons que $(\forall x \in]0; +\infty[) : f'(x) = \frac{I(x) - J(x)}{(e^x - e^{-x})^2}$.

Les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto e^x - e^{-x}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $]0; +\infty[$. De plus $(\forall x \in]0; +\infty[) : e^x - e^{-x} \neq 0$.

Donc f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on a :

$$(\forall x \in]0; +\infty[) : f'(x) = \left(\frac{x}{e^x - e^{-x}} \right)' = \frac{(e^x - e^{-x}) - x(e^x + e^{-x})}{(e^x - e^{-x})^2}.$$

D'autre part, d'après 2.b) et 4.b) :

$$\begin{aligned} I(x) - J(x) &= (-xe^{-x} - e^{-x} + 1) - ((x-1)e^x + 1) \\ &= -xe^{-x} - e^{-x} - xe^x + e^x = (e^x - e^{-x}) - x(e^x + e^{-x}). \end{aligned}$$

D'où : $(\forall x \in]0; +\infty[) : f'(x) = \frac{I(x) - J(x)}{(e^x - e^{-x})^2}.$

0.25

d) Sens de variation de f sur $[0; +\infty[$.

D'après 4.c) et 4.a), on a $(\forall x \in]0; +\infty[) : I(x) - J(x) \leq 0$ et $(e^x - e^{-x})^2 > 0$.

Donc $f'(x) \leq 0$ sur $]0; +\infty[$, alors f est décroissante sur $]0; +\infty[$.

Pour tout $x \in]0; +\infty[$:

$$I(x) - J(x) = \int_0^x te^{-t} dt - \int_0^x te^t dt = \int_0^x t(e^{-t} - e^t) dt.$$

Comme, pour tout $t \in]0; x]$, on a $t > 0$ et $e^{-t} < e^t$ (car $-t < t$ et la fonction $t \mapsto e^t$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$), donc : $t(e^{-t} - e^t) < 0$.

La fonction $t \mapsto t(e^{-t} - e^t)$ étant continue et strictement négative sur $]0; x]$, on en déduit que : $\int_0^x t(e^{-t} - e^t) dt < 0$, c'est-à-dire $I(x) - J(x) < 0$.

Donc $f'(x) < 0$ sur $]0; +\infty[$, alors f est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

De plus f est continue à droite en 0.

D'où : f est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$.

0.25

5) Bijection de f .

La fonction f est continue sur $[0; +\infty[$ et strictement décroissante sur $[0; +\infty[$, donc f réalise une bijection de $[0; +\infty[$ vers l'intervalle :

$$J = f([0; +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); f(0) \right[= \left] 0; \frac{1}{2} \right[.$$

D'où : f réalise une bijection de $[0; +\infty[$ vers $\left] 0; \frac{1}{2} \right[$.

0.5 6) a) Montrons que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α à déterminer dans $]0; +\infty[$.

- Pour $x = 0$: $f(0) = \frac{1}{2} \neq 0$, donc 0 n'est pas solution.
- Pour $x \in]0; +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}
 f(x) = x &\iff \frac{x}{e^x - e^{-x}} = x \\
 &\iff x = x(e^x - e^{-x}) \\
 &\iff x(1 - e^x + e^{-x}) = 0 \\
 &\iff 1 - e^x + e^{-x} = 0 \quad (\text{car } x \neq 0) \\
 &\iff (e^x)^2 - e^x - 1 = 0 \quad (\text{en multipliant par } e^x > 0) \\
 &\iff \left(e^x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} \\
 &\iff e^x - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} \quad \left(\text{car } e^x - \frac{1}{2} > 0 \text{ puisque } x > 0 \Rightarrow e^x > 1\right) \\
 &\iff e^x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\
 &\iff x = \ln\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right).
 \end{aligned}$$

Comme $\frac{1 + \sqrt{5}}{2} > 1$, on a $\ln\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) > 0$, donc cette solution appartient bien à $]0; +\infty[$.

D'où l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans $]0; +\infty[$:

$$\alpha = \ln\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right).$$

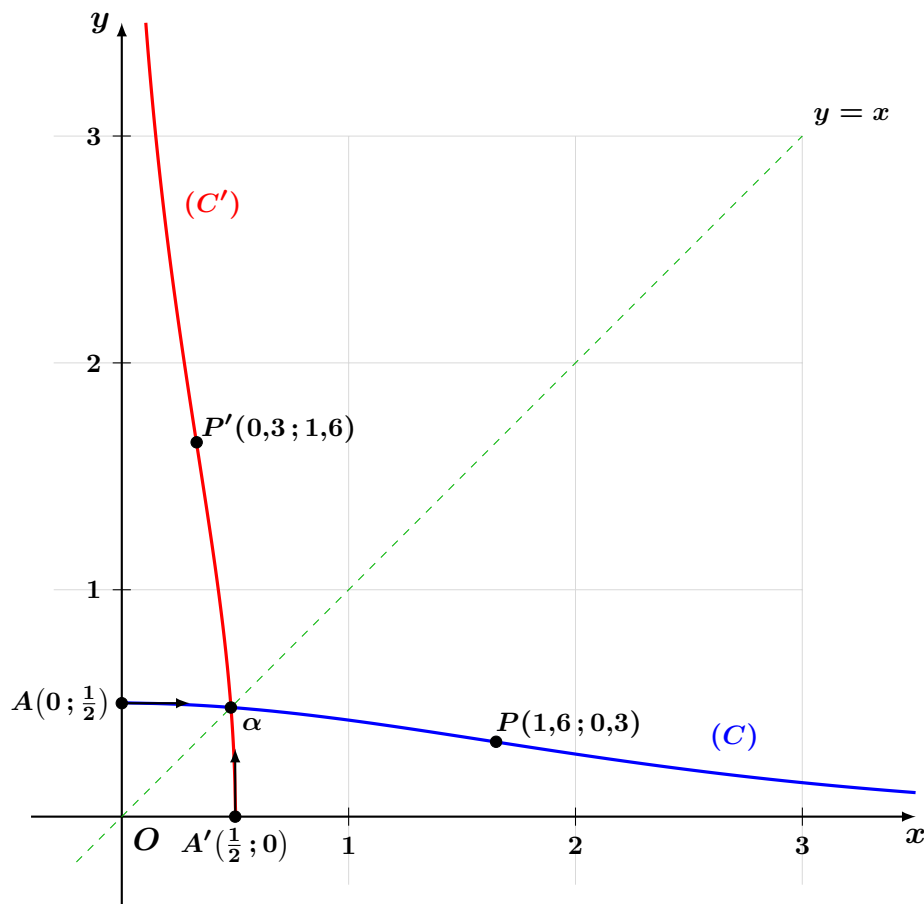
0.5 b) Représentation graphique de (C) et (C') dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On a $f(0) = \frac{1}{2}$ et $f'_d(0) = 0$.

Donc (C) admet une demi-tangente horizontale au point $A\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

Par symétrie par rapport à la première bissectrice $(\Delta) : y = x$, (C') admet une demi-tangente verticale au point $A'\left(\frac{1}{2}; 0\right)$.

On admet que $P(x_0; f(x_0))$ avec $x_0 \simeq 1,6$ et $f(x_0) \simeq 0,3$ est un point d'inflexion de (C) ; son symétrique $P'(0,3; 1,6)$ est un point d'inflexion de (C') .



On considère la suite numérique $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par : $u_0 = 0$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} = f(u_n)$.

0.25 7) a) Montrons par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$.

• Pour $n = 0 : u_0 = 0$, donc $0 \leq u_0 \leq \frac{1}{2}$. ✓

• Supposons que $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$ pour un entier $n \in \mathbb{N}$ fixé.

Montrons que $0 \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}$.

Comme f est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$, alors :

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{2} \implies f\left(\frac{1}{2}\right) \leq f(u_n) \leq f(0).$$

Or $f(0) = \frac{1}{2}$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1/2}{e^{1/2} - e^{-1/2}} > 0$, donc $0 \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}$. ✓

D'où, d'après le principe de récurrence : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$.

0.5 b) En admettant que $(\forall x \in]0; +\infty[) ; -\frac{1}{2} < f'(x) < 0$.

Montrons que $(\forall n \in \mathbb{N}) : |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$.

On a $(\forall x \in]0; +\infty[) ; -\frac{1}{2} < f'(x) < 0 < \frac{1}{2}$.

Donc $(\forall x \in]0; +\infty[) : |f'(x)| < \frac{1}{2}$.

Comme f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $(\forall x \in]0; +\infty[) : |f'(x)| < \frac{1}{2}$.

D'après le TAF :

$$(\forall (a, b) \in]0; +\infty[^2) ; |f(b) - f(a)| \leq \frac{1}{2} |b - a|.$$

Comme $\alpha \in]0; +\infty[$ et $u_n \in]0; +\infty[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$|f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|.$$

Puisque $f(\alpha) = \alpha$ et $f(u_n) = u_{n+1}$.

D'où : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|.$

0.5

c) Montrons par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) : |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

- Pour $n = 0 : |u_0 - \alpha| = \alpha = \ln\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right).$

On a : $\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \leq e \implies \ln\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) \leq \ln(e).$

Comme $\ln(e) = 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^0$, alors $\alpha \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0$. ✓

- Supposons que $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ pour un entier $n \in \mathbb{N}$ fixé.

- Montrons que $|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

D'après 7.b), on a : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Alors $|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$. ✓

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N}) : |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

0.25

d) D'après la question 7.c), on a : $0 \leq |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ (car $-1 < \frac{1}{2} < 1$). On a par le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - \alpha| = 0.$$

D'où la suite (u_n) est convergente et : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$.

MATHS XYZ	- تصحيح الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة العادية 2026 - - مادة : الرياضيات - شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (خيار فرنسية)	@prof_maths_x	الصفحة
			10 22

Partie III :

On considère la fonction F définie sur $[0; +\infty[$ par : $F(x) = \int_x^{2x} f(t) dt$.

0.5 1) a) Soit $x \in [0; +\infty[$. Montrons que $0 \leq F(x) \leq xf(x)$.

Soit $x \in [0; +\infty[$.

Pour tout $t \in [x; 2x]$: on a $x \leq t$.

Comme f est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$, $f(t) \leq f(x)$.

De plus, d'après le graphique de f on a : $0 \leq f(t)$ sur $[0; +\infty[$.

Donc $0 \leq f(t) \leq f(x)$.

En passant à l'intégrale ($x \leq 2x$) :

$$\int_x^{2x} 0 dt \leq \int_x^{2x} f(t) dt \leq \int_x^{2x} f(x) dt \implies 0 \leq F(x) \leq f(x)(2x - x).$$

D'où : $(\forall x \in [0; +\infty[) : 0 \leq F(x) \leq xf(x)$.

0.25 b) En déduisons $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x - e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x^2} - \frac{e^{-x}}{x^2}}$$

$$\text{Comme } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 e^x} = 0.$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = 0$$

D'après le théorème des gendarmes : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$.

0.25 c) **Interprétation graphique** : la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à la courbe (C_F) au voisinage de $+\infty$.

0.25 2) a) Montrons que F est dérivable sur $[0; +\infty[$.

La fonction f est continue sur $[0; +\infty[$; soit G une primitive de f sur $[0; +\infty[$.

Pour tout $x \in [0; +\infty[$: $F(x) = G(2x) - G(x)$.

La fonction $x \mapsto 2x$ est dérivable sur $[0; +\infty[$, G est dérivable sur $[0; +\infty[$, et $2x \in [0; +\infty[$, donc $x \mapsto G(2x)$ est dérivable sur $[0; +\infty[$ (composée).

Par suite : F est dérivable sur $[0; +\infty[$.

0.5 b) Montrons que $(\forall x \in [0; +\infty[) : F'(x) = \frac{-f(x)}{e^{2x} + 1}(e^{2x} - 4e^x + 1)$.

D'après 2.a), pour tout $x \in [0; +\infty[$: $F(x) = G(2x) - G(x)$.

Donc pour tout $x \in [0; +\infty[$: $F'(x) = 2f(2x) - f(x)$.

- Pour $x = 0$:

On a $F'(0) = 2f(0) - f(0) = f(0) = \frac{1}{2}$;

et $\frac{-f(0)}{e^0 + 1}(1 - 4 + 1) = \frac{-1/2}{2} \times (-2) = \frac{1}{2}$. ✓

- Pour $x > 0$:

On a $F'(x) = 2f(2x) - f(x)$

$$\begin{aligned} &= 2 \times \frac{2x}{e^{2x} - e^{-2x}} - \frac{x}{e^x - e^{-x}} \\ &= \frac{-x}{e^x - e^{-x}} \left(1 - \frac{4}{e^x + e^{-x}} \right) \\ &= -f(x) \left(1 - \frac{4e^x}{e^{2x} + 1} \right) \\ &= -f(x) \left(\frac{e^{2x} + 1 - 4e^x}{e^{2x} + 1} \right) \\ &= \frac{-f(x)}{e^{2x} + 1} (e^{2x} - 4e^x + 1) \end{aligned}$$

D'où : $(\forall x \in [0; +\infty[) : F'(x) = \frac{-f(x)}{e^{2x} + 1} (e^{2x} - 4e^x + 1).$

0.5

c) Montrons que $F(\ln(2 + \sqrt{3}))$ est un extremum de F sur $[0; +\infty[$.

On a F est dérivable sur $[0; +\infty[$, donc il suffit de montrer que F' s'annule en $\ln(2 + \sqrt{3})$ en changeant de signe.

Soit $x \in [0; +\infty[$. On a $f(x) \geq 0$ et $e^{2x} + 1 > 0$, alors $\frac{-f(x)}{e^{2x} + 1} \leq 0$.

Donc le signe de $F'(x)$ est le signe opposé de $e^{2x} - 4e^x + 1$.

On a $e^{2x} - 4e^x + 1 = (e^x - 2)^2 - 3 = (e^x - (2 + \sqrt{3}))(e^x - (2 - \sqrt{3}))$.

Donc $e^{2x} - 4e^x + 1 = 0 \iff e^x = 2 + \sqrt{3}$ ou $e^x = 2 - \sqrt{3}$

$$\iff x = \ln(2 + \sqrt{3}) \text{ ou } x = \ln(2 - \sqrt{3})$$

Posons $\beta = \ln(2 + \sqrt{3})$ et $\gamma = \ln(2 - \sqrt{3})$.

Comme $0 < 2 - \sqrt{3} < 1$, on a $\gamma < 0$, donc pour tout $x \geq 0$: $e^x \geq 1 > 2 - \sqrt{3}$.

Alors $e^x - (2 - \sqrt{3}) > 0$. Ainsi le signe de $e^{2x} - 4e^x + 1$ est celui de $e^x - (2 + \sqrt{3})$.

x	0	$\ln(2 + \sqrt{3})$	$+\infty$
$e^x - (2 + \sqrt{3})$		0	+
$F'(x)$	+	0	-

F' s'annule en $\ln(2 + \sqrt{3})$ en changeant de signe, alors :

$F(\ln(2 + \sqrt{3}))$ est un extremum de F sur $[0; +\infty[$.

Exercice : 2 (3.5pts)

Soit le nombre complexe $m = \sqrt{2} e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi/k \in \mathbb{Z}\}$.

Partie I :

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E_m) : \overline{m}z^2 - 2z + m = 0$.

- 0.25 1) Sachant que $z_1 = \frac{m(1-i)}{2}$ est solution de (E_m) , déduisons z_2 .

D'après les relations entre les coefficients et les racines :

$$z_1 + z_2 = -\frac{-2}{\overline{m}} = \frac{2}{\overline{m}} = \frac{2m}{m\overline{m}}.$$

Puisque $m\overline{m} = |m|^2 = 2$, alors $z_1 + z_2 = m$.

Donc $z_2 = m - z_1 = m - \frac{m(1-i)}{2} = \frac{m(2 - (1-i))}{2}$. D'où : $z_2 = \frac{m(1+i)}{2}$.

- 0.25 2) Écrivons z_1 sous forme exponentielle.

$$\begin{aligned} \text{On a } z_1 &= \frac{m(1-i)}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}e^{i\theta}}{2}(1-i) \\ &= e^{i\theta} \left(\frac{2}{2} - \frac{2}{2}i \right) \\ &= e^{i\theta} \left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{-\pi}{4}\right) \right) \\ &= e^{i\theta} \times e^{i\frac{-\pi}{4}} \\ &= e^{i(\theta - \frac{\pi}{4})}. \end{aligned}$$

D'où : $z_1 = e^{i(\theta - \frac{\pi}{4})}$.

Partie II :

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, M, M_1, M_2 d'affixes respectives $a = 1, b = -1, m, z_1$ et z_2 .

Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

- 0.25 1) Montrons que $R(M_1) = M_2$.

$$\text{On a } e^{i\frac{\pi}{2}}(z_{M_1} - z_O) + z_O = iz_1 = i \cdot \frac{m(1-i)}{2} = \frac{m(i - i^2)}{2} = \frac{m(1+i)}{2} = z_{M_2}.$$

C'est-à-dire : $R(M_1) = M_2$.

MATHS XYZ	تصحيح الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة العادية 2026 - مادة : الرياضيات - شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (خيار فرنسية)	@prof_maths_x	الصفحة 13
			22

0.5 2) a) Montrons que $(MM_1) \perp (OM_1)$ et $(MM_2) \perp (OM_2)$.

Comme $m \neq 0$, on a $z_{M_1} \neq 0$ et $z_{M_2} \neq 0$, donc $M_1 \neq O$ et $M_2 \neq O$. On a :

$$\frac{z_{M_1} - z_M}{z_{M_1} - z_O} = \frac{\frac{m(1-i)}{2} - m}{\frac{m(1-i)}{2}} = \frac{m(1-i) - 2m}{m(1-i)} = \frac{-1-i}{1-i} = \frac{(-1-i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{-2i}{2} = -i.$$

Donc $\frac{z_{M_1} - z_M}{z_{M_1} - z_O} \in i\mathbb{R}^*$, d'où $(MM_1) \perp (OM_1)$.

De même :

$$\frac{z_{M_2} - z_M}{z_{M_2} - z_O} = \frac{\frac{m(1+i)}{2} - m}{\frac{m(1+i)}{2}} = \frac{-1+i}{1+i} = \frac{(-1+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2i}{2} = i \in i\mathbb{R}^*.$$

D'où $(MM_2) \perp (OM_2)$.

0.25 b) Vérifions que $OM_1 = OM_2 = 1$.

D'après **Partie I.2**) : $OM_1 = |z_1| = |e^{i(\theta-\pi/4)}| = 1$.

Comme R est une rotation et $R(M_1) = M_2$: on a $OM_2 = OM_1 = 1$.

D'où : $OM_1 = OM_2 = 1$.

0.25 c) Nature du quadrilatère OM_1MM_2 .

D'après la question 2.a), on a $\frac{z_{M_1} - z_M}{z_{M_1}} = -i$ et $\frac{z_{M_2} - z_M}{z_{M_2}} = i$.

Donc $MM_1 = |z_{M_1} - z_M| = |-iz_{M_1}| = |z_{M_1}| = OM_1$.

et $MM_2 = |z_{M_2} - z_M| = |iz_{M_2}| = |z_{M_2}| = OM_2$

Comme $OM_1 = OM_2 = 1$, alors $OM_1 = OM_2 = MM_1 = MM_2 = 1$.

Donc OM_1MM_2 est un losange.

De plus, on a $R(M_1) = M_2$ donc $(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

D'où : OM_1MM_2 est un carré.

3) Soit le point $H(h)$ tel que $h = \frac{-i}{\sqrt{2} \sin \theta} e^{i(2\theta)}$. Pour tout nombre complexe z , on désigne par $\text{Re}(z)$ la partie réelle de z .

0.5 a) Montrons que $\text{Re}(m - h) = 0$ et $\text{Re}(1 - h\overline{m}) = 0$.

On a $m = \sqrt{2} e^{i\theta} = \sqrt{2} \cos \theta + i\sqrt{2} \sin \theta$, donc $\text{Re}(m) = \sqrt{2} \cos \theta$.

D'autre part :

$$h = \frac{-i}{\sqrt{2} \sin \theta} e^{i(2\theta)} = \frac{1}{\sqrt{2} \sin \theta} e^{i(2\theta - \frac{\pi}{2})},$$

Donc

$$\operatorname{Re}(h) = \frac{1}{\sqrt{2} \sin \theta} \cos\left(2\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin(2\theta)}{\sqrt{2} \sin \theta} = \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{\sqrt{2} \sin \theta} = \sqrt{2} \cos \theta = \operatorname{Re}(m).$$

Comme $\operatorname{Re}(m - h) = \operatorname{Re}(m) - \operatorname{Re}(h)$, on a : $\operatorname{Re}(m - h) = 0$.

• Calculons $h\bar{m}$:

$$\begin{aligned} h\bar{m} &= \frac{-i}{\sqrt{2} \sin \theta} e^{i(2\theta)} \times \sqrt{2} e^{-i\theta} = \frac{-i}{\sin \theta} e^{i\theta} \\ &= \frac{-i(\cos \theta + i \sin \theta)}{\sin \theta} \\ &= \frac{\sin \theta - i \cos \theta}{\sin \theta} \\ &= 1 - i \cot \theta. \end{aligned}$$

Donc $1 - h\bar{m} = i \cot \theta$, alors : $\operatorname{Re}(1 - h\bar{m}) = 0$.

0.25

b) Montrons que $\operatorname{Re}\left(\frac{a - h}{m + 1}\right) = 0$.

On a :

$$\frac{a - h}{m + 1} = \frac{1 - h}{m + 1} = \frac{(1 - h)\overline{(m + 1)}}{|m + 1|^2} = \frac{1}{|m + 1|^2} (\bar{m} + 1 - h\bar{m} - h).$$

Or $\frac{1}{|m + 1|^2} \in \mathbb{R}$, il suffit donc de montrer $\operatorname{Re}(\bar{m} + 1 - h\bar{m} - h) = 0$.

$$\begin{aligned} \text{On a } \operatorname{Re}(\bar{m} + 1 - h\bar{m} - h) &= \operatorname{Re}(\bar{m}) + \operatorname{Re}(1 - h\bar{m}) - \operatorname{Re}(h) \\ &= \operatorname{Re}(m) + 0 - \operatorname{Re}(h) \quad (\text{car } \operatorname{Re}(\bar{m}) = \operatorname{Re}(m)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

D'où : $\operatorname{Re}\left(\frac{a - h}{m + 1}\right) = 0$.

0.5

c) Dédudons que $(MH) \perp (AB)$ et $(AH) \perp (MB)$.

• $(MH) \perp (AB)$: on a $\frac{z_M - z_H}{z_A - z_B} = \frac{m - h}{1 - (-1)} = \frac{m - h}{2}$.

D'après la question 3.a), on a $\operatorname{Re}(m - h) = 0$, donc $\operatorname{Re}\left(\frac{z_M - z_H}{z_A - z_B}\right) = 0$.

C'est-à-dire $\frac{z_M - z_H}{z_A - z_B} \in i\mathbb{R}^*$.

D'où : $(MH) \perp (AB)$.

• $(AH) \perp (MB)$: on a $\frac{z_A - z_H}{z_M - z_B} = \frac{1 - h}{m + 1} = \frac{a - h}{m + 1}$.

D'après la question 3.b), on a $\operatorname{Re}\left(\frac{a - h}{m + 1}\right) = 0$, donc $\frac{z_A - z_H}{z_M - z_B} \in i\mathbb{R}^*$.

D'où : $(AH) \perp (MB)$.

0.25 4) a) Montrons que $\frac{h - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{1}{2}(1 - \cot \theta)$.

On a $z_2 - z_1 = \frac{m(1+i)}{2} - \frac{m(1-i)}{2} = \frac{m \cdot 2i}{2} = mi$.

En multipliant le numérateur et le dénominateur par $\overline{m}$, et en utilisant $m\overline{m} = |m|^2 = 2$:

$$\frac{h - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{h - \frac{m(1-i)}{2}}{mi} = \frac{\left(h - \frac{m(1-i)}{2}\right)\overline{m}}{mi \times \overline{m}} = \frac{h\overline{m} - \frac{|m|^2(1-i)}{2}}{|m|^2 i} = \frac{h\overline{m} - (1-i)}{2i}.$$

D'après la question 3.a), on a $1 - h\overline{m} = i \cot \theta$, donc $h\overline{m} = 1 - i \cot \theta$, et

$$\frac{h\overline{m} - (1-i)}{2i} = \frac{(1 - i \cot \theta) - 1 + i}{2i} = \frac{i(1 - \cot \theta)}{2i} = \frac{1 - \cot \theta}{2}.$$

D'où : $\frac{h - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{1}{2}(1 - \cot \theta)$.

0.25 b) Dédisons que les points H , M_1 et M_2 sont alignés.

On a $\frac{z_H - z_{M_1}}{z_{M_2} - z_{M_1}} = \frac{h - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{1}{2}(1 - \cot \theta)$.

Puisque $\frac{1}{2}(1 - \cot \theta) \in \mathbb{R}$, donc les points H , M_1 et M_2 sont alignés.

Exercice : 3 (3pts)

Partie I :

A. On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(F) : 5u - 9v = 1$.

0.25 1) Donnons une solution particulière (u_0, v_0) dans $\mathbb{N}^2$ de (F) .

On a $5 \times 2 - 9 \times 1 = 10 - 9 = 1$, donc

$(u_0, v_0) = (2, 1)$ est une solution particulière de (F) .

0.25 2) Déterminons l'ensemble S_F des solutions de (F) .

Comme $5 \wedge 9 = 1$, l'équation (F) admet des solutions dans $\mathbb{Z}^2$.

$(F) : 5u - 9v = 1 \iff 5u - 9v = 5 \times 2 - 9 \times 1$

$\iff 5(u - 2) = 9(v - 1)$

$$(F) : 5u - 9v = 1 \iff 9 \mid 5(u - 2) \text{ et } 5(u - 2) = 9(v - 1)$$

$$\iff 9 \mid (u - 2) (\text{car } 5 \wedge 9 = 1) \text{ et } 5(u - 2) = 9(v - 1)$$

$$\iff \exists k \in \mathbb{Z} / u - 2 = 9k \text{ et } 5 \times 9k = 9(v - 1)$$

$$\iff \exists k \in \mathbb{Z} / u = 2 + 9k \text{ et } v = 1 + 5k$$

D'où $S_F = \{(2 + 9k; 1 + 5k) / k \in \mathbb{Z}\}.$

0.25 3) Vérifions que $5^{u_0} \equiv 6 [19]$, c'est-à-dire $5^2 \equiv 6 [19]$.

On a $5^2 = 25 = 1 \times 19 + 6$, donc $5^2 \equiv 6 [19]$.

B. On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(E) : x^{2026} \equiv 5 [19]$. Soit x une solution de (E) .

0.5 1) a) Montrons que $x \wedge 19 = 1$ et $x^{18} \equiv 1 [19]$.

Comme 19 est un nombre premier, donc $x \wedge 19 = 1$ ou $x \wedge 19 = 19$.

Supposons $x \wedge 19 = 19$, c'est-à-dire $19 \mid x$.

Alors $x \equiv 0 [19]$, donc $x^{2026} \equiv 0 [19]$.

Or $x^{2026} \equiv 5 [19]$, donc $5 \equiv 0 [19]$.

C'est-à-dire $19 \mid 5$: contradiction.

D'où $x \wedge 19 = 1$.

Comme 19 est un nombre premier et $x \wedge 19 = 1$, alors d'après le petit théorème de Fermat : $x^{19-1} \equiv 1 [19]$.

D'où : $x^{18} \equiv 1 [19]$.

0.25 b) Montrons que $x^{10} \equiv 5 [19]$.

On a $2026 = 18 \times 112 + 10$, donc $x^{2026} = (x^{18})^{112} \times x^{10}$.

D'après la question 1.a), on a $x^{18} \equiv 1 [19]$, alors $(x^{18})^{112} \equiv 1 [19]$, et par suite $(x^{18})^{112} \times x^{10} \equiv x^{10} [19]$.

Donc $x^{2026} \equiv x^{10} [19]$.

Comme $x^{2026} \equiv 5 [19]$, donc $x^{10} \equiv 5 [19]$.

0.25 c) Montrons que $x^2 \equiv 6 [19]$.

On a $x^{10} \equiv 5 [19]$, donc $(x^{10})^2 \equiv 5^2 [19]$.

C'est-à-dire $x^{20} \equiv 5^2 [19]$, alors $x^{20} \equiv 6 [19]$ (d'après A.3) $5^2 \equiv 6 [19]$).

Or $x^{20} = x^{18} \times x^2$ et $x^{18} \equiv 1 [19]$, donc $x^{20} \equiv x^2 [19]$.

D'où : $x^2 \equiv 6 [19]$.

MATHS XYZ	تصحيح الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة العادية 2026 - مادة : الرياضيات - شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (خيار فرنسية)	@prof_maths_x	الصفحة
			17 22

- 0.25 d) Montrons que $x \equiv 5 [19]$ ou $x \equiv -5 [19]$.
- D'après la question 1.c), on a $x^2 \equiv 6 [19]$, et d'après la question A.3), on a $5^2 \equiv 6 [19]$.
- Donc $x^2 \equiv 5^2 [19] \implies x^2 - 5^2 \equiv 0 [19] \implies 19 \mid (x - 5)(x + 5)$.
- Comme 19 est un nombre premier, $19 \mid x - 5$ ou $19 \mid x + 5$.
- Donc $x - 5 \equiv 0 [19]$ ou $x + 5 \equiv 0 [19]$
- D'où : $x \equiv 5 [19]$ ou $x \equiv -5 [19]$.
- 0.5 2) Montrons que si $x \equiv 5 [19]$ ou $x \equiv -5 [19]$, alors x est solution de (E).
- Supposons $x \equiv 5 [19]$ ou $x \equiv -5 [19]$.
- Comme 2026 est pair, alors $x^{2026} \equiv 5^{2026} [19]$.
- On a $5^{2026} = (5^{18})^{112} \times 5^{10}$.
- Comme 19 est un nombre premier et $5 \wedge 19 = 1$, en appliquant le petit théorème de Fermat : $5^{18} \equiv 1 [19]$. Donc $5^{2026} \equiv 5^{10} [19]$.
- Puisque $5^{10} = (5^2)^5$ et $5^2 \equiv 6 [19]$, alors $5^{10} \equiv 6^5 [19]$.
- Donc $x^{2026} \equiv 6^5 [19]$.
- On a $6^2 = 36 = 2 \times 19 - 2$.
- Donc $6^2 \equiv -2 [19] \implies 6^4 \equiv 4 [19] \implies 6^5 \equiv 24 [19] \implies 6^5 \equiv 5 [19]$.
- Alors $x^{2026} \equiv 5 [19]$.
- D'où x est solution de (E).

Partie II :

Une urne contient 100 boules numérotées de 1 à 100. On tire une boule au hasard.
Soit V : « le numéro tiré est solution de (E) ».

- 0.25 1) Montrons que $P(V) = 0,11$.

Déterminons le nombre de solutions de (E) comprises entre 1 et 100.

D'après les questions 1-d) et 2 de la partie I, on a :

$$x \text{ solution de (E)} \iff x \equiv 5 [19] \text{ ou } x \equiv -5 [19]$$

$$\iff \exists k \in \mathbb{Z} / x = 5 + 19k \text{ ou } \exists k' \in \mathbb{Z} / x = -5 + 19k'$$

$$\text{On a } 1 \leq 5 + 19k \leq 100 \implies \frac{-4}{19} \leq k \leq \frac{95}{19} \implies k \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$$

$$\text{et } 1 \leq -5 + 19k' \leq 100 \implies \frac{6}{19} \leq k' \leq \frac{105}{19} \implies k' \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$$

Donc

$$\bullet x \equiv 5 [19] \text{ et } 1 \leq x \leq 100 \implies x \in \{5; 24; 43; 62; 81; 100\} \text{ (6 valeurs).}$$

$$\bullet x \equiv -5 [19] \text{ et } 1 \leq x \leq 100 \implies x \in \{14; 33; 52; 71; 90\} \text{ (5 valeurs).}$$

$$\text{Alors } V = \{5, 14, 24, 33, 43, 52, 62, 71, 81, 90, 100\}.$$

$$\text{Donc } \text{card}(V) = 11.$$

On est dans une situation d'équiprobabilité avec $\text{card}(\Omega) = 100$, d'où :

$$P(V) = \frac{\text{card}(V)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{11}{100} = 0,11.$$

0.25 2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminons la plus petite valeur de n .

On effectue n tirages successifs avec remise de la boule dans l'urne, c'est une répétition de l'épreuve "tirage d'une boule de l'urne" n fois.

Alors, c'est une expérience de Bernoulli de paramètres n et $p = P(V) = 0,11$.

Soit A : « V se réalise au moins une fois ». Alors $\bar{A}$: « V ne se réalise jamais ».

$$P(\bar{A}) = C_n^0 p^0 (1-p)^n = (0,89)^n, \text{ donc } P(A) = 1 - (0,89)^n.$$

On a :

$$P(A) > 0,95 \iff 1 - (0,89)^n > 0,95$$

$$\iff (0,89)^n < 0,05$$

$$\iff n \ln(0,89) < \ln(0,05).$$

Comme $\ln(0,89) < 0$, on inverse l'inégalité :

$$n > \frac{\ln(0,05)}{\ln(0,89)} \simeq 25,72.$$

La plus petite valeur entière de n vérifiant cette inégalité est : $n_{\min} = 26$.

Exercice : 4 (3.5pts)

0.5 1) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrons que $M(x) \times M(y) = M(x+y)$.

$$\text{On a } M(x) \times M(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x^2 & 1-x & x \\ x^2+2x & -x & x+1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ y^2 & 1-y & y \\ y^2+2y & -y & y+1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 0 \times y^2 + 0 \times (y^2 + 2y) & 0 & 0 \\ x^2 \times 1 + (1-x) \times y^2 + x \times (y^2 + 2y) & x^2 \times 0 + (1-x) \times (1-y) + x \times (-y) & x^2 \times 0 + (1-x) \times y + x \times (y+1) \\ (x^2 + 2x) \times 1 - x \times y^2 + (x+1) \times (y^2 + 2y) & (x^2 + 2x) \times 0 - x \times (1-y) + (x+1) \times (-y) & (x^2 + 2x) \times 0 - x \times y + (x+1) \times (y+1) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x^2 + y^2 - xy^2 + xy^2 + 2xy & 0 + 1 - y - x + xy - xy & 0 + y - xy + xy + x \\ x^2 + 2x - xy^2 + xy^2 + 2xy + y^2 + 2y & 0 - x + xy - xy - y & 0 - xy + xy + x + y + 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ (x+y)^2 & 1 - (x+y) & x+y \\ (x+y)^2 + 2(x+y) & -(x+y) & x+y+1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

D'où :

$$M(x) \times M(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ (x+y)^2 & 1 - (x+y) & x+y \\ (x+y)^2 + 2(x+y) & -(x+y) & (x+y) + 1 \end{pmatrix} = M(x+y).$$

Conclusion : $(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) : M(x) \times M(y) = M(x+y).$

On considère l'application φ définie de $\mathbb{R}$ vers $M_3(\mathbb{R})$ par : $(\forall x \in \mathbb{R}) : \varphi(x) = M(x).$

0.5 2) a) Montrons que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ vers $(M_3(\mathbb{R}), \times)$ et que $\varphi(\mathbb{R}) = E$.

• Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. D'après la question 1), on a :

$$\varphi(x+y) = M(x+y) = M(x) \times M(y) = \varphi(x) \times \varphi(y).$$

Donc φ est un homomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ vers $(M_3(\mathbb{R}), \times).$

• On a $\varphi(\mathbb{R}) = \{\varphi(x) / x \in \mathbb{R}\} = \{M(x) / x \in \mathbb{R}\} = E$, d'où $\varphi(\mathbb{R}) = E$.

0.25 b) Déduisons que $(E, \times)$ est un groupe commutatif.

On a $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe commutatif et φ est un homomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ vers $(M_3(\mathbb{R}), \times).$

Donc $(\varphi(\mathbb{R}), \times)$ est un groupe commutatif, et puisque $\varphi(\mathbb{R}) = E$, on conclut :

$(E, \times)$ est un groupe commutatif.

On munit E de la loi de composition interne T définie par :

$$(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) : M(x) T M(y) = M(2xy)$$

0.75 3) a) Montrons que $(E \setminus \{I\}, T)$ est un groupe commutatif.

Remarque : On a $I = M(0)$, donc $M(x) \in E \setminus \{I\} \iff x \neq 0$.

• Soit $(M(x), M(y)) \in (E \setminus \{I\})^2$.

Alors $x \neq 0$ et $y \neq 0$, donc $2xy \neq 0$, donc $M(2xy) \in E \setminus \{I\}$.

Puisque $M(x) T M(y) = M(2xy)$

Alors $M(x) T M(y) \in E \setminus \{I\}$.

Donc T est une loi de composition interne dans $E \setminus \{I\}$.

• Soit $(M(x), M(y)) \in (E \setminus \{I\})^2$.

On a $M(x) T M(y) = M(2xy) = M(2yx) = M(y) T M(x)$.

Donc T est commutative dans $E \setminus \{I\}$.

• Soit $(M(x), M(y), M(z)) \in (E \setminus \{I\})^3$.

On a $(M(x) T M(y)) T M(z) = M(2xy) T M(z) = M(2 \cdot (2xy) \cdot z) = M(4xyz)$

et $M(x) T (M(y) T M(z)) = M(x) T M(2yz) = M(2x \cdot (2yz)) = M(4xyz)$.

Alors $(M(x) T M(y)) T M(z) = M(x) T (M(y) T M(z))$.

Donc T est associative dans $E \setminus \{I\}$.

• Soit $M(x) \in E \setminus \{I\}$.

On a $M(x) T M\left(\frac{1}{2}\right) = M\left(2x \times \frac{1}{2}\right) = M(x)$.

Comme $\frac{1}{2} \neq 0$, on a $M\left(\frac{1}{2}\right) \in E \setminus \{I\}$ est l'élément neutre.

• Soit $(M(x), M(y)) \in (E \setminus \{I\})^2$.

On a :

$$M(x) T M(y) = M\left(\frac{1}{2}\right) \implies M(2xy) = M\left(\frac{1}{2}\right) \implies 2xy = \frac{1}{2} \implies y = \frac{1}{4x} \neq 0.$$

Donc tout élément $M(x)$ de $E \setminus \{I\}$ admet pour symétrique $M\left(\frac{1}{4x}\right) \in E \setminus \{I\}$.

Conclusion : $(E \setminus \{I\}, T)$ est un groupe commutatif d'élément neutre $M\left(\frac{1}{2}\right)$.

0.5 b) Montrons que $(E, \times, T)$ est un corps commutatif.

On a $(E, \times)$ est un groupe commutatif et $(E \setminus \{I\}, T)$ est un groupe commutatif.

Il reste à montrer que T est distributive par rapport à $\times$ dans E .

Soit $(M(x), M(y), M(z)) \in E^3$.

$$\begin{aligned}
 \text{On a } M(x) T (M(y) \times M(z)) &= M(x) T M(y + z) \\
 &= M(2x(y + z)) \\
 &= M(2xy + 2xz) \\
 &= M(2xy) \times M(2xz) \\
 &= (M(x) T M(y)) \times (M(x) T M(z)).
 \end{aligned}$$

Donc T est distributive par rapport à $\times$ dans E .

D'où $(E, \times, T)$ est un corps commutatif.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose : $(M(x))^n = \underbrace{M(x) \times \cdots \times M(x)}_{n \text{ fois}}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

0.5 4) a) Montrons par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : (M(x))^n = M(nx)$.

- Pour $n = 1$, $(M(x))^1 = M(x) = M(1 \cdot x)$.

La proposition est vraie pour $n = 1$.

- Supposons que $(M(x))^n = M(nx)$ pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.

Montrons que $(M(x))^{n+1} = M((n+1)x)$.

$$\begin{aligned}
 \text{On a } (M(x))^{n+1} &= (M(x))^n \times M(x) \\
 &= M(nx) \times M(x) \\
 &= M(nx + x) \\
 &= M((n+1)x)
 \end{aligned}$$

- Par récurrence : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : (M(x))^n = M(nx)$.

0.5 b) Résolvons dans E l'équation $X^3 - X^2 = A$, où $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Soit $X \in E$, posons $X = M(x)$ avec $x \in \mathbb{R}$.

D'après la question 4.a) : $X^2 = M(2x)$ et $X^3 = M(3x)$.

On a :

$$X^3 - X^2 = (M(x))^3 - (M(x))^2 = M(3x) - M(2x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5x^2 & -x & x \\ 5x^2 + 2x & -x & x \end{pmatrix}.$$

Donc

$$X^3 - X^2 = A \iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5x^2 & -x & x \\ 5x^2 + 2x & -x & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

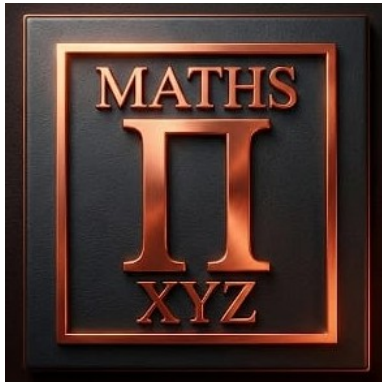
$$\iff \begin{cases} 5x^2 = 5 \\ -x = 1 \\ x = -1 \\ 5x^2 + 2x = 3 \end{cases}$$

$$\iff x = -1 \text{ (qui vérifie bien } 5x^2 + 2x = 5 - 2 = 3 \text{).}$$

Alors l'unique solution dans E est $X = M(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

D'où : $S_E = \{M(-1)\}$.

FACEBOOK : MATHS XYZ



INSTAGRAM : @PROF_MATHS_X

