

Exercice ①: 3 points

on a: $A(1, 1, 1)$, $B(2, 0, 1)$ et $C(-2, -2, -4)$.

et $(P): x + y - 2z + 12 = 0$

① a - Montrons que: $\vec{OA} \wedge \vec{OB} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$.

on a: $O(0, 0, 0)$ donc $\vec{OA}(x_A - x_O, y_A - y_O, z_A - z_O)$

$$\Rightarrow \vec{OA}(1 - 0, 1 - 0, 1 - 0)$$

$$\Rightarrow \vec{OA}(1, 1, 1)$$

et $\vec{OB}(x_B - x_O, y_B - y_O, z_B - z_O) \Rightarrow \vec{OB}(2 - 0, 0 - 0, 1 - 0) \Rightarrow \vec{OB}(2, 0, 1)$

$$\text{donc: } \vec{OA} \wedge \vec{OB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= (1 - 0)\vec{i} - (1 - 2)\vec{j} + (0 - 2)\vec{k}$$

$$= 1\vec{i} + 1\vec{j} - 2\vec{k}$$

$$= \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$$

$$\text{Ainsi: } \boxed{\vec{OA} \wedge \vec{OB} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}}$$

b) on déduit que les plans (P) et (OAB) sont parallèles.

on sait que: deux plans sont parallèles ssi leurs vecteurs normaux sont colinéaires.

d'après la question précédente on a: $\vec{OA} \wedge \vec{OB} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$

on note $\vec{n}_1 = \vec{OA} \wedge \vec{OB} = (1, 1, -2)$ le vecteur normal au plan (OAB)

de plus on a: $(P): x + y - 2z + 12 = 0$ alors:

①

(P): $x + y - 2z + 12 = 0$ alors le vecteur normal au plan (P) est: $\vec{n}_2(1, 1, -2)$.

on remarque alors: $\vec{n}_1 = \vec{n}_2 \Rightarrow \vec{n}_1 = 1 \times \vec{n}_2$ donc ces vecteurs normaux sont colinéaires. Ainsi: $(P) // (OAB)$

c) vérifions que: $\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=-2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$ est une représentation paramétrique

de la droite (OC).

on a: la droite (OC) passe par $O(0, 0, 0)$ et de vecteur directeur $\vec{OC}(-2, -2, 4)$ donc:

$$(OC): \begin{cases} x = x_0 + (-2)K \\ y = y_0 + (-2)K \\ z = z_0 + 4K \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 - 2K \\ y = 0 - 2K \\ z = 0 + 4K \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2K \\ y = -2K \\ z = 4K \end{cases} \quad (K \in \mathbb{R})$$

on pose $t = -2K$ alors:

$$(OC): \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = -2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Ainsi: le résultat.

d) vérifions que: $C \in (P)$ et montrons que: $(OC) \perp (P)$.

on a: $C(-2, -2, 4)$ et (P): $x + y - 2z + 12 = 0$

$$or: (-2) + (-2) - 2 \times 4 + 12 = 0$$

$$\Rightarrow -4 - 2 \times 4 + 12 = 0$$

$$\Rightarrow -4 - 8 + 12 = 0$$

$$\Rightarrow -12 + 12 = 0$$

$$\Rightarrow 0 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{C \in (P)}$$

جواباً

Montrons $(OC) \perp (P)$.

on a: d'après 1-c) $(OC): \begin{cases} x=1t \\ y=1t \\ z=-2t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ alors le vecteur

directeur de la droite (OC) est: $\vec{u}(1,1,-2)$ et $\vec{m}(1,1,-2)$ c'est le vecteur normal au plan (P) donc: $\vec{u} = 1 \times \vec{m}$ c'est-à-dire les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{m}$ sont colinéaires. de plus on a: $C \in (P)$ et par suite

$$\boxed{(OC) \perp (P)}$$

e) on a: (S) est une sphère de centre $\Omega(a,b,c)$, tangente au plan (P) au point C et coupée par le plan (OAB) suivant un cercle (I) de centre O et de rayon $r = 4\sqrt{3}$.

a) vérifions que: $\Omega \in (OC)$ et on déduit que: $a=b$ et $c=-2a$.

→ on a: (S) est une sphère de centre $\Omega(a,b,c)$, tangente au plan (P) au point C donc: $(\Omega C) \perp (P)$ et d'après 1-d) on a: $(OC) \perp (P)$ au point C alors les points O, C et Ω sont donc alignés par conséquent

$$\boxed{\Omega \in (OC)}$$

→ on a: d'après 1-c) $(OC): \begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=-2t \end{cases} \text{ avec } (t \in \mathbb{R})$

puisque: $\Omega(a,b,c) \in (OC)$ alors:

$$(OC): \begin{cases} a=t \\ b=t \\ c=-2t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

$$\text{or: } a=t=b \Rightarrow \boxed{a=b}$$

$$\text{et } c=-2t \text{ comme } t=a \text{ alors } \boxed{c=-2a}$$

b) Montrons que: $O\Omega = |a|\sqrt{6}$

$$\begin{aligned} \text{on a: } O\Omega &= \sqrt{(x_\Omega - x_O)^2 + (y_\Omega - y_O)^2 + (z_\Omega - z_O)^2} \\ &= \sqrt{(a-0)^2 + (b-0)^2 + (c-0)^2} \end{aligned}$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

or: $a = b$ et $c = -2a$ alors:

$$0\Omega = \sqrt{a^2 + a^2 + (-2a)^2}$$

$$= \sqrt{2a^2 + 4a^2}$$

$$= \sqrt{6a^2}$$

$$= |a|\sqrt{6} \text{ et par suite: } \boxed{0\Omega = |a|\sqrt{6}}$$

c vérifions que: $d(\Omega, (\mathbb{P})) = |a+2|\sqrt{6}$

on a: $\Omega(a, b, c) \Rightarrow \Omega(a, a, -2a)$ et $(\mathbb{P}): x+y-2z+12=0$

$$\text{donc: } d(\Omega, (\mathbb{P})) = \frac{|x_\Omega + y_\Omega - 2z_\Omega + 12|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2}}$$

$$= \frac{|a + a - 2(-2a) + 12|}{\sqrt{6}}$$

$$= \frac{|2a + 4a + 12|}{\sqrt{6}}$$

$$= \frac{|6a + 12|}{\sqrt{6}}$$

$$= \frac{|6(a+2)|}{\sqrt{6}}$$

$$= \frac{6}{\sqrt{6}} |a+2|$$

$$= \frac{\sqrt{6}^2}{\sqrt{6}} |a+2|$$

$$= \sqrt{6} |a+2|$$

$$\text{Ainsi: } \boxed{d(\Omega, (\mathbb{P})) = |a+2|\sqrt{6}}$$

d Montrons que: $a = 1$ puis on déduit les coordonnées de Ω et le rayon R de la sphère.

جواب مني

on a: (S) est tangente au plan (P) au point C donc:

$$SC = R = d(S, (P))$$

et le plan (OAB) coupe la sphère (S) selon cercle (I') de centre O et de rayon $r = 4\sqrt{3}$ alors d'après le théorème de pythagore du triangle formé par les deux centres et un point du cercle on a:

$$R^2 = SO^2 + r^2 \Rightarrow SC^2 = SO^2 + (4\sqrt{3})^2$$

$$\Rightarrow SC^2 - SO^2 = 16 \times 3$$

$$\Rightarrow SC^2 - SO^2 = 48$$

$$\text{on: } SO^2 = (1a\sqrt{6})^2 = 6a^2$$

$$\text{et } SC^2 = (d(S, (P)))^2 = (1a+2\sqrt{6})^2 = 6(a+2)^2$$

on remplace on trouve:

$$6(a+2)^2 - 6a^2 = 48$$

$$\Rightarrow 6(a^2 + 4a + 4) - 6a^2 = 48$$

$$\Rightarrow 6a^2 + 24a + 24 - 6a^2 = 48$$

$$\Rightarrow 24a = 48 - 24$$

$$\Rightarrow 24a = 24$$

$$\Rightarrow a = \frac{24}{24} = 1 \Rightarrow \boxed{a=1}$$

$$\text{donc on: } S(a, a, -2a) \Rightarrow \boxed{S(1, 1, -2)} \text{ centre de (S)}$$

$$\text{et } R = SC = d(S, (P)) = |a+2|\sqrt{6} = |1+2|\sqrt{6} = |3|\sqrt{6} = 3\sqrt{6}$$

$$\Rightarrow \boxed{R = 3\sqrt{6}} \text{ Rayon de (S)}$$

Exercice ② 3,5 points

on a: les points A, B et C d'affixes respectives: $a = \sqrt{3} + i$, $b = \bar{a}$ et $c = 2\sqrt{3}$

⑤

① a) Montrons que : $\frac{a-c}{a} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\begin{aligned} \text{on a : } \frac{a-c}{a} &= \frac{(\sqrt{3}+i)-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i} = \frac{-\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}+i} \\ &= \frac{(-\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)} \\ &= \frac{-3+i\sqrt{3}+i\sqrt{3}-i^2}{(\sqrt{3})^2-i^2} \\ &= \frac{-3+2i\sqrt{3}+1}{3-(-1)} \\ &= \frac{-2+2i\sqrt{3}}{4} \\ &= -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$i^2 = -1$$

b) on écrit le nombre complexe $-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$ sous forme trigonométrique.

$$\text{Soit } z = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{donc } |z| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow z &= 1 \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \\ &= \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

جواب السؤال

$$\Rightarrow \boxed{z = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$$

② on a : R la transformation du plan qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = e^{i\frac{2\pi}{3}}(z-a) + a$

a) vérifions que : R est une rotation dont on déterminera le centre et l'angle.

⑥

on a : $z' = e^{i\frac{2\pi}{3}}(z-a) + a$

$\Rightarrow z' - a = e^{i\frac{2\pi}{3}}(z-a)$ alors : R est une rotation de centre $A(a)$ et d'angle de rotation $\theta = \frac{2\pi}{3}$

b) Montrons que : $R(\theta) = C$

on a : $z' = e^{i\frac{2\pi}{3}}(z-a) + a$ or : $z_0 = 0$ donc :

$$\begin{aligned} z' &= e^{i\frac{2\pi}{3}}(0-a) + a \\ &= -a \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}} + a \\ &= a - a \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}} \\ &= a(1 - e^{i\frac{2\pi}{3}}) \end{aligned}$$

et d'après 1-b) on a : $\frac{a-c}{a} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}} \Rightarrow \frac{a-c}{a} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

$$\Rightarrow a-c = a \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$\Rightarrow c = a - a \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$\Rightarrow c = a(1 - e^{i\frac{2\pi}{3}})$$

$$\Rightarrow z' = c = a(1 - e^{i\frac{2\pi}{3}})$$

alors on a : bien : $R(\theta) = C$

(3) on a : $\mathcal{D}$ un point d'affixe d tel que : $R(B) = \mathcal{D}$.

a) Montrons que : $d = 2\sqrt{3} + 2i$ et on déduit que les points $A, \mathcal{D}$ et O sont alignés.

on a : $R(B) = \mathcal{D} \Leftrightarrow d = e^{i\frac{2\pi}{3}}(b-a) + a$

$$\Leftrightarrow d = e^{i\frac{2\pi}{3}}(\bar{a}-a) + a$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow d &= e^{i\frac{2\pi}{3}}(\sqrt{3}-i - \sqrt{3}-i) + \sqrt{3}+i \\ &= e^{i\frac{2\pi}{3}}(-2i) + \sqrt{3}+i \end{aligned}$$

$$\textcircled{7} \quad = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times (-2i) + \sqrt{3} + i$$

3:

$$\Rightarrow d = i + \sqrt{3} + \sqrt{3} + i \\ = 2\sqrt{3} + 2i$$

$$\Rightarrow \boxed{d = 2\sqrt{3} + 2i}$$

$$\text{on a: } \frac{d}{a} = \frac{2\sqrt{3} + 2i}{\sqrt{3} + i} = \frac{2(\sqrt{3} + i)}{\sqrt{3} + i} = 2 \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \frac{d - 0}{a - 0} = 2 \in \mathbb{R} \text{ d'où les points } A, D \text{ et } O \text{ sont alignés.}$$

b) Montrons que: $\frac{c - b}{d} = \frac{1}{2}$

$$\text{on a: } \frac{c - b}{d} = \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{3} + i}{2\sqrt{3} + 2i} \\ = \frac{\sqrt{3} + i}{2(\sqrt{3} + i)} \\ = \boxed{\frac{1}{2}}$$

c) Montrons que: $OB = DC$.

$$\text{on a: } OB = |b - z_O| = |b - 0| = |b|$$

$$\text{on a: } b = \bar{a} = \sqrt{3} - i$$

$$\Rightarrow |b| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$

$$\Rightarrow OB = |b| = 2 \Rightarrow \boxed{OB = 2}$$

de même $DC = |c - d|$

$$\text{on a: } c - d = 2\sqrt{3} - (2\sqrt{3} + 2i) = -2i$$

$$\Rightarrow |c - d| = |-2i| = 2 \Rightarrow \boxed{DC = 2}$$

Ainsi: $\boxed{OB = DC}$

d) on déduit que : le quadrilatère $OBCD$ est un trapèze isocèle.

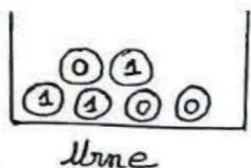
on a : d'après 3-b) : $\frac{c-b}{d} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{c-b}{d-0} = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$

donc $(BC) \parallel (OD)$. et d'après 3-c) on a : $OB = DC = 2$

Ainsi : le quadrilatère $OBCD$ est un trapèze isocèle.

Exercice ③ 2,5 points

on a :



• type de tirage : successivement et sans remise

• nombre totale de boules : 6 boules

• nombre de boules tirées : 2 boules

① a) Montrons que : $P(A) = \frac{7}{15}$

on a : $\text{card}(\Omega) = A_6^2 = 6 \times 5 = 30 \Rightarrow \boxed{\text{card}(\Omega) = 30}$

et A : « les deux boules tirées sont de même couleur ».

$\Rightarrow \text{card}(A) = A_4^2 + A_2^2 = 12 + 2 = 14 \Rightarrow \boxed{\text{card}(A) = 14}$

donc : $P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{14}{30} = \frac{7}{15} \Rightarrow \boxed{P(A) = \frac{7}{15}}$

b) Montrons que : $P(B) = \frac{1}{5}$

on a : B : « la somme des nombres portés par les deux boules tirées est égale à 2 ».

donc $\text{card}(B) = A_3^2 = 3 \times 2 = 6$

$\Rightarrow P(B) = \frac{\text{card}(B)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5} \Rightarrow \boxed{P(B) = \frac{1}{5}}$

② Montrons que : $P(B|A) = \frac{1}{7}$.

on sait que : $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

$$\text{or: } \text{card}(A \cap B) = A_2^2 = 2 \times 1 = 2$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = \frac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$$

on remplace on trouve:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{7}{15}} = \frac{1}{15} \times \frac{15}{7} = \frac{1}{7}$$

$$\Rightarrow \boxed{P(B|A) = \frac{1}{7}}$$

③ on a : X est la variable aléatoire associée à la somme des nombres portés par les deux boules tirées.

a) complétons le tableau.

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

توزيع احتمالي

$$\bullet P(X=0) = \frac{A_2^2}{30} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$$

$$\bullet P(X=1) = \frac{A_3^1 \times A_3^1 \times 2}{30} = \frac{3 \times 3 \times 2}{30} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}$$

$$\bullet P(X=2) = P(B) = \frac{1}{5}$$

b) Montrons que : $E(X) = 1$

$$\begin{aligned} \text{on a: } E(X) &= \left(0 \times \frac{1}{5}\right) + \left(1 \times \frac{3}{5}\right) + \left(2 \times \frac{1}{5}\right) \\ &= 0 + \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \\ &= \frac{5}{5} = 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{E(X) = 1}$$

④

Problème 11 points (Partie I)

on a: $g(x) = e^{2x} - 1, \forall x \in \mathbb{R}$

① a) on résout dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(x) = 0$.

on a: $g(x) = 0$

$\Rightarrow e^{2x} - 1 = 0$

$\Rightarrow e^{2x} = 1$

$\Rightarrow \ln(e^{2x}) = \ln(1)$

$\Rightarrow 2x = 0$

$\Rightarrow x = 0$

Ainsi: la solution de cette équation

est: $S = \{0\}$

b) vérifions que: $g(x) < 0$ sur $]-\infty, 0[$

et que: $g(x) > 0$ sur $]0, +\infty[$

• Soit $x \in]-\infty, 0[$ on a:

$x < 0 \Rightarrow 2x < 0 \Rightarrow e^{2x} < e^0$

$\Rightarrow e^{2x} < 1 \Rightarrow e^{2x} - 1 < 0$

$\Rightarrow g(x) < 0, \forall x \in]-\infty, 0[$

• Soit $x \in]0, +\infty[$ on a:

$x > 0 \Rightarrow 2x > 0$

$\Rightarrow e^{2x} > e^0$

$\Rightarrow e^{2x} > 1$

$\Rightarrow e^{2x} - 1 > 0$

$\Rightarrow g(x) > 0, \forall x \in]0, +\infty[$

② Montrons que: $\int_{-\ln(2)}^{\ln(2)} |g(x)| dx$

(11)

on a:

$$\int_{-\ln(2)}^{\ln(2)} |g(x)| dx = \int_{-\ln(2)}^0 |g(x)| dx + \int_0^{\ln(2)} |g(x)| dx$$

$$= \int_{-\ln(2)}^0 -g(x) dx + \int_0^{\ln(2)} g(x) dx$$

$$= \int_{-\ln(2)}^0 -(e^{2x} - 1) dx + \int_0^{\ln(2)} (e^{2x} - 1) dx$$

$$= \int_{-\ln(2)}^0 1 - e^{2x} dx + \int_0^{\ln(2)} e^{2x} - 1 dx$$

$$= \left[x - \frac{e^{2x}}{2} \right]_{-\ln(2)}^0 + \left[\frac{e^{2x}}{2} - x \right]_0^{\ln(2)}$$

$$= \left(0 - \frac{1}{2} e^0 \right) - \left(-\ln(2) - \frac{1}{2} e^{-2\ln(2)} \right) + \left[\frac{e^{2x}}{2} - x \right]_0^{\ln(2)}$$

$$= -\frac{1}{2} + \ln(2) + \frac{1}{2} e^{-\ln(2)} + \left[\frac{e^{2x}}{2} - x \right]_0^{\ln(2)}$$

$$= -\frac{1}{2} + \ln(2) + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \left[\frac{e^{2x}}{2} - x \right]_0^{\ln(2)}$$

$$= -\frac{1}{2} + \ln(2) + \frac{1}{8} + \left[\frac{e^{2x}}{2} - x \right]_0^{\ln(2)}$$

$$= \ln(2) - \frac{3}{8} + \left[\left(\frac{e^{2\ln(2)}}{2} - \ln(2) \right) - \left(\frac{1}{2} e^0 - 0 \right) \right]$$

$$= \ln(2) - \frac{3}{8} + \left[\frac{e^{\ln(2)}}{2} - \ln(2) - \frac{1}{2} \right]$$

$$= \ln(2) - \frac{3}{8} + 2 - \ln(2) - \frac{1}{2}$$

$$= \ln(2) - \ln(2) - \frac{3}{8} + 2 - \frac{1}{2}$$

$$= -\frac{3}{8} + \frac{3}{2}$$

$$= -\frac{3}{8} + \frac{12}{8}$$

$$= \frac{-3+12}{8}$$

$$= \frac{9}{8}$$

→ Partie II :

on a: $f(x) = x - \ln(2) + \ln(1 + e^{2x})$

① vérifiant que: f est définie sur

$\mathbb{R}$.

on a: $f(x) = x - \ln(2) + \ln(1 + e^{2x})$

on a: $x \mapsto x - \ln(2)$ est une fonction polynomiale définie $\mathbb{R}$. et on

sait que $\forall x \in \mathbb{R}, e^{2x} > 0$

$$\Rightarrow 1 + e^{2x} > 1 > 0$$

$$\Rightarrow 1 + e^{-2x} > 0$$

alors aussi $x \mapsto \ln(1 + e^{2x})$ est définie sur $\mathbb{R}$.

Ainsi on a bien f est définie sur $\mathbb{R}$ et par suite $df = \mathbb{R}$.

② a) Montrons que f est une fonction paire.

puisque $df = \mathbb{R}$ on a:

• $\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$

• soit $x \in \mathbb{R}$.

on a:

$$\begin{aligned} f(-x) &= -x - \ln(2) + \ln(1 + e^{2x}) \\ &= -x - \ln(2) + \ln(e^{2x}(1 + \frac{1}{e^{2x}})) \end{aligned}$$

$$= -x - \ln(2) + \ln(e^{2x}) + \ln(1 + \frac{1}{e^{2x}})$$

$$= -x - \ln(2) + 2x + \ln(1 + e^{-2x})$$

$$= x - \ln(2) + \ln(1 + e^{2x})$$

$$= f(x)$$

Ainsi f est une fonction paire.

b) vérifions que: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

et on déduit $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

• on a: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln(2) + \ln(1 + e^{2x})$$

$$= +\infty$$

$$(\text{car } \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} = +\infty)$$

• Puisque f est paire alors sa courbe représentative (C_f) est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

on pose alors: $X = -x$ alors lorsque $x \rightarrow -\infty$ on a: $X \rightarrow +\infty$. donc:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{X \rightarrow +\infty} f(-X)$$

$$= \lim_{X \rightarrow +\infty} f(X)$$

$$= +\infty$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty}$$

③ a) Montrons que: la droite (Δ) : $y = x - \ln(2)$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$.

on a: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - y$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln(2) + \ln(1 + e^{2x}) - (x - \ln(2))$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^{2x})$$

$$= 0$$

$$(\text{car } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} = +\infty)$$

puisque: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - y = 0$

Ainsi: la droite $(\Delta): y = x - \ln(2)$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$.

b) on déduit que: la droite $(\Delta'): y = -x - \ln(2)$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $-\infty$.

$$\text{on a: } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x - \ln(2)) = 0$$

or: par parité de f on pose: $X = -x$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (-x - \ln(2))$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} f(-x) - (X - \ln(2))$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (X - \ln(2))$$

$$= 0$$

Ainsi: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - y = 0$ et par suite la droite $(\Delta'): y = -x - \ln(2)$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $-\infty$.

(4) a) Montrons que, $\forall x \in \mathbb{R}$ on a:

$$f'(x) = \frac{g(x)}{1 + e^{2x}}$$

on a: f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

donc:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x - \ln(2) + \ln(1 + e^{2x}))' \\ &= 1 - 0 + \frac{(1 + e^{2x})'}{1 + e^{2x}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 1 + \frac{-2e^{2x}}{1 + e^{2x}} \\ &= 1 - \frac{2e^{2x}}{1 + e^{2x}} \\ &= \frac{(1 + e^{2x}) - 2e^{2x}}{1 + e^{2x}} \\ &= \frac{1 - e^{2x}}{1 + e^{2x}} \\ &= \frac{(1 - e^{2x}) \times e^{2x}}{(1 + e^{2x}) \times e^{2x}} \\ &= \frac{e^{2x} - e^{2x} \times e^{2x}}{e^{2x} + e^{2x} \times e^{2x}} \\ &= \frac{e^{2x} - e^0}{e^{2x} + e^0} \\ &= \frac{e^{2x} - 1}{1 + e^{2x}} \end{aligned}$$

g.
n.
3.
J.
3:

$$\text{Ainsi: } \boxed{f'(x) = \frac{g(x)}{1 + e^{2x}}}; \forall x \in \mathbb{R}$$

b) on déduit que: f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et strictement décroissante sur $] -\infty, 0]$.

$$\text{on a: } f'(x) = \frac{g(x)}{1 + e^{2x}}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$: on a:

$1 + e^{2x} > 0$ alors le signe de f' est celui de g .

d'après la question 1-b) du partie I.

- sur $[0, +\infty[$: on a: $g(x) \geq 0$ donc $f'(x) \geq 0$ alors f est strictement croissante.

- sur $] -\infty, 0]$: on a: $g(x) \leq 0$ donc $f'(x) \leq 0$ alors f est strictement

décroissante.

⑤ a) on résout dans $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) = x$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

on a: $f(x) = x$

$$\Rightarrow x - \ln(2) + \ln(1 + e^{2x}) = x$$

$$\Rightarrow x - x - \ln(2) + \ln(1 + e^{2x}) = 0$$

$$\Rightarrow -\ln(2) + \ln(1 + e^{2x}) = 0$$

$$\Rightarrow \ln(1 + e^{2x}) = \ln(2)$$

$$\Rightarrow 1 + e^{2x} = 2$$

$$\Rightarrow e^{2x} = 2 - 1$$

$$\Rightarrow e^{2x} = 1$$

$$\Rightarrow \ln(e^{2x}) = \ln(1)$$

$$\Rightarrow -2x = 0$$

$$\Rightarrow x = 0$$

Ainsi: la solution de cette équation est: $S = \{0\}$

b) Montrons que: $f(x) \leq x, \forall x \in \mathbb{R}_+$

soit $x \in [0, +\infty[$

on a:

$$f(x) - x = -\ln(2) + \ln(1 + e^{2x})$$

$$= \ln(1 + e^{2x}) - \ln(2)$$

$$= \ln\left(\frac{1 + e^{2x}}{2}\right)$$

$$\text{on a: } x \geq 0 \Rightarrow -2x \leq 0$$

$$\Rightarrow e^{-2x} \leq e^0$$

$$\Rightarrow e^{-2x} \leq 1$$

(14)

$$\Rightarrow 1 + e^{-2x} \leq 2$$

$$\Rightarrow \frac{1 + e^{-2x}}{2} \leq 1$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{1 + e^{-2x}}{2}\right) \leq \ln(1)$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{1 + e^{-2x}}{2}\right) \leq 0$$

$$\Rightarrow f(x) - x \leq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) \leq x, \forall x \in \mathbb{R}_+}$$

c) Étudions la position de la courbe (C_f) et la droite (Δ) sur $[0, +\infty[$.

on a: $(\Delta): y = x - \ln(2)$

on étudie le signe de $f(x) - y$

soit $x \in \mathbb{R}_+$ on a:

$$f(x) - (x - \ln(2)) = \ln(1 + e^{2x})$$

$$\text{or: } x \geq 0 \Rightarrow e^{2x} > 0$$

$$\Rightarrow 1 + e^{2x} > 1$$

$$\Rightarrow \ln(1 + e^{2x}) > 0$$

$$\Rightarrow f(x) - y > 0$$

Ainsi: la courbe (C_f) est située strictement au-dessus de la droite (Δ) sur $[0, +\infty[$

d) on déduit, $\forall x \in [0, +\infty[$ on a:

$$0 \leq f(x) - (x - \ln(2)) \leq \ln(2)$$

soit $x \in \mathbb{R}_+$ on a:

$$f(x) - (x - \ln(2)) = \ln(1 + e^{2x})$$

donc on montre:

$$0 \leq \ln(1 + e^{2x}) \leq \ln(2)$$

$$\text{on a: } x \geq 0 \Rightarrow -2x \leq 0 \Rightarrow e^{-2x} \leq 1$$

$$\Rightarrow 1 + e^{-2x} \leq 1 + 1$$

$$\Rightarrow 1 + e^{-2x} \leq 2$$

$$\Rightarrow \boxed{\ln(1 + e^{-2x}) \leq \ln(2)}; \forall x \in \mathbb{R}_+$$

• on a: $\forall x \in \mathbb{R}_+, e^{-2x} > 0$

$$\Rightarrow 1 + e^{-2x} > 1$$

$$\Rightarrow \ln(1 + e^{-2x}) > \ln(1)$$

$$\Rightarrow \boxed{\ln(1 + e^{-2x}) > 0}$$

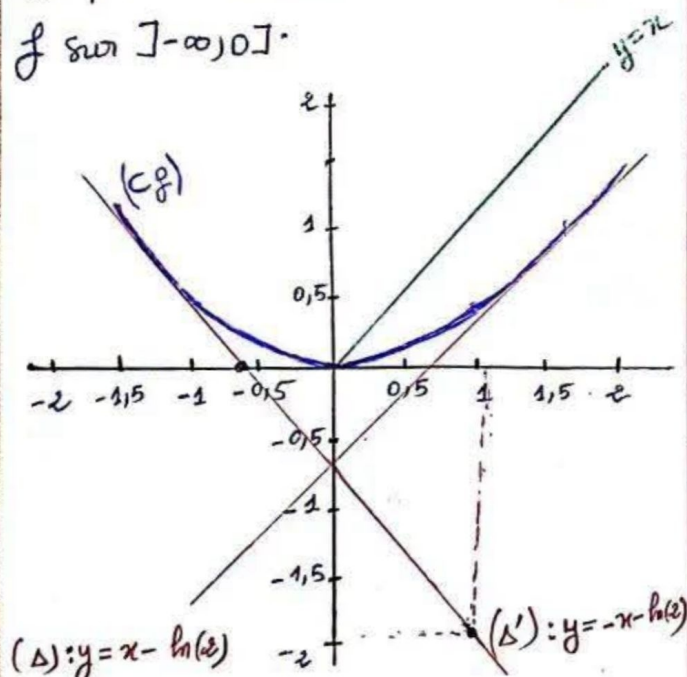
donc:

$$0 < \ln(1 + e^{-2x}) \leq \ln(2)$$

Ainsi:

$$\boxed{0 \leq f(x) - (x - \ln(2)) \leq \ln(2), \forall x \in \mathbb{R}_+}$$

⑥ a) on trace dans la même repère la droite (Δ') et on complète la courbe (C_f) de la fonction f sur $]-\infty, 0]$.



b) Montrons que: $0 \leq A \leq \ln(2)$

on a:

$$A = \int_0^1 |f(x) - y| dx$$

d'après 5-c) $f(x) - y > 0$ alors:

$$A = \int_0^1 f(x) - y dx$$

$$= \int_0^1 f(x) - (x - \ln(2)) dx$$

d'après 5-d) on a:

$$0 \leq f(x) - (x - \ln(2)) \leq \ln(2)$$

$$\Rightarrow 0 \leq \int_0^1 f(x) - (x - \ln(2)) dx \leq \int_0^1 \ln(2) dx$$

$$\Rightarrow 0 \leq A \leq [\ln(2)x]_0^1$$

$$0 \leq A \leq \ln(2) \times 1 - \ln(2) \times 0$$

$$\boxed{0 \leq A \leq \ln(2)}$$

⑦ on a: φ est la restriction de f sur $\mathbb{R}_+$

a) Montrons que φ admet une fonction réciproque φ^{-1} définie sur un intervalle $\mathcal{I}$ que l'on déterminera.

on a: φ est la restriction de f sur $I = [0, +\infty[$ alors: $\forall x \in \mathbb{R}_+, \varphi(x) = f(x)$

on a: alors φ est continue sur $[0, +\infty[$ comme somme de deux fonctions continues et d'après 4-b) on a: φ est strictement croissante sur cet intervalle.

donc φ admet une fonction réciproque φ^{-1} définie sur $\mathcal{I} = \varphi(I) = \varphi([0, +\infty[)$

$$= [\varphi(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)] = [0, +\infty[$$

$$\Rightarrow \mathcal{I} = [0, +\infty[$$

b) vérifions que: $\varphi^{-1}(\ln(\frac{5}{4})) = \ln(2)$

on a :

$$\begin{aligned}\varphi(\ln(2)) &= \ln(2) - \ln(2) + \ln(1 + e^{2\ln(2)}) \\ &= \ln(1 + e^{2\ln(2)}) \\ &= \ln(1 + e^{\ln(2^2)}) \\ &= \ln(1 + e^{\ln(4)}) \\ &= \ln(1 + e^{\ln(\frac{4}{1})}) \\ &= \ln(1 + \frac{4}{1}) \\ &= \ln(\frac{4+1}{1}) \\ &= \ln(\frac{5}{1})\end{aligned}$$

comme $\varphi(\ln(2)) = \ln(\frac{5}{4})$

Ainsi : $\varphi^{-1}(\ln(\frac{5}{4})) = \ln(2)$

c) Montrons que : φ^{-1} est dérivable en $\ln(\frac{5}{4})$ et que : $(\varphi^{-1})'(\ln(\frac{5}{4})) = \frac{5}{3}$

on a : $\varphi(\ln(2)) = \ln(\frac{5}{4})$

et φ est dérivable sur $[0, +\infty[$ surtout en $\ln(2)$ et on a :

$$\begin{aligned}\varphi'(\ln(2)) &= \frac{e^{2\ln(2)} - 1}{1 + e^{2\ln(2)}} \\ &= \frac{4 - 1}{1 + 4} \\ &= \frac{3}{5} \neq 0\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \varphi'(\ln(2)) \neq 0$$

alors on a : bien φ^{-1} est dérivable en $\ln(\frac{5}{4})$.

on sait que :

$$\begin{aligned}(\varphi^{-1})'(\ln(\frac{5}{4})) &= \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(\ln(\frac{5}{4})))} \\ &= \frac{1}{\varphi'(\ln(2))} \\ &= \frac{1}{\frac{3}{5}} \\ &= 1 \times \frac{5}{3} \\ &= \boxed{\frac{5}{3}}\end{aligned}$$

Partie III

on a : la suite (u_n) définie par :
 $u_0 = \ln(2)$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

① Montrons que : $0 \leq u_n \leq \ln(2)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Initialisation :

• pour $n=0$ on a : $0 \leq u_0 \leq \ln(2)$
c'est-à-dire $0 \leq \ln(2) \leq \ln(2)$ ce qui est vrai.

Hérédité :

soit $n \in \mathbb{N}$.

supposons que : $0 \leq u_n \leq \ln(2)$ et
montrons que : $0 \leq u_{n+1} \leq \ln(2)$

on a : $0 \leq u_n \leq \ln(2)$

comme f est strictement croissante sur $[0, \ln(2)]$ alors :

$$f(0) \leq f(u_n) \leq f(\ln(2))$$

$$0 \leq u_{n+1} \leq \ln(\frac{5}{4}) \leq \ln(2)$$

$$\Rightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq \ln(2)$$

conclusion :

d'après le principe de récurrence
on a : $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq u_n \leq \ln(2)$

② Montrons que : la suite (u_n) est décroissante.

d'après la question 5-b) on a : $\forall x \in [0, +\infty[; f(x) \leq x$

comme $u_n \in [0, \ln(2)]$ alors : $f(u_n) \leq u_n$

$$\Rightarrow u_{n+1} \leq u_n$$

$$\Rightarrow u_{n+1} - u_n \leq 0$$

Ainsi la suite (u_n) est décroissante.

③ on déduit que : (u_n) est convergente et déterminons $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

on a : la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 ($u_n \geq 0$)

d'où elle est convergente.

• $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

on a :

• $f(u_n) = u_{n+1}$

• f est continue sur $[0, \ln(2)]$

• $f([0, \ln(2)]) \subset [0, \ln(2)]$

• (u_n) est convergente

• $u_0 = \ln(2) \in [0, \ln(2)]$

alors la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ est la solution de l'équation :

$$f(x) = x$$

et d'après 5-a) on a : $S = \{0\}$

Ainsi : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

Fin



Jawad_Merziany



2026