



ROYAUME DU MAROC

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

DU PRÉSCOLAIRE & DES SPORTS



EXAMEN DU BACCALAURÉAT

SESSION NORMALE 2026

ÉPREUVE :
Mathématiques

SECTION :
Sciences Expérimentales

DURÉE : 3 H

COEFFICIENT DE L'ÉPREUVE : 7



INSTRUCTIONS GÉNÉRALES :

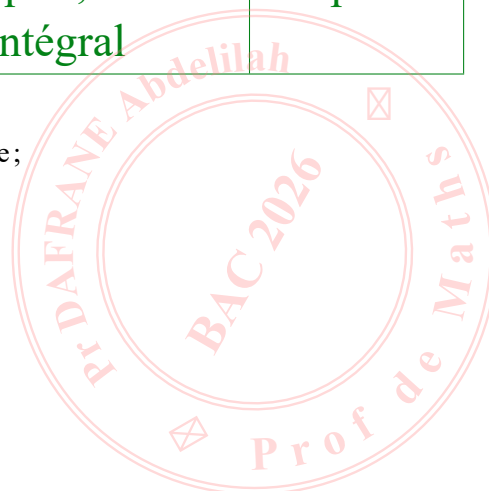
- ✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;
- ✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- ✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter.

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de trois exercices et un problème indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice 1	Géométrie de l'espace	3 points
Exercice 2	Nombres complexes	3,5 points
Exercice 3	Calcul des probabilités	2,5 points
Problème	Étude de fonctions numériques, suites numériques et Calcul intégral	11 points

- ✓ On désigne par $\bar{z}$ le conjugué du nombre complexe z et $|z|$ son module ;
- ✓ $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien ;
- ✓ e est le nombre réel tel que $\ln(e) = 1$.





EXERCICE 1 *(3 POINTS)*

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(-1, 0, 1)$, $B(-3, 2, 2)$, $C(-1, 1, 2)$ et $D(2, 7, -4)$. Soit (Δ) la droite passant par le point D et dirigée par le vecteur $\vec{u}(2, 1, 2)$.

- 0.5 pt 1 a Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$.
- 0.25 pt b Déduire que $x + 2y - 2z + 3 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC) .
- 0.5 pt c Calculer $\vec{u} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})$ et déduire que la droite (Δ) est parallèle au plan (ABC) .
- 2 Soit (S) la sphère de centre $\Omega(0, 3, 0)$ et tangente à la droite (Δ) .
- 0.5 pt a Vérifier que $\overrightarrow{\Omega D} \cdot \vec{u} = 0$ et déduire que le rayon de la sphère (S) est égale à 6.
- 0.75 pt b Calculer $d(\Omega, (ABC))$ et déduire que (ABC) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ) de rayon $r = 3\sqrt{3}$.
- 0.5 pt c Vérifier que $\overrightarrow{C\Omega} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ et déduire que le point C est le centre du cercle (Γ) .

EXERCICE 2 *(3,5 POINTS)*

On considère dans le plan complexe les points A , B et C d'affixes respectives :

$$a = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \quad b = e^{i\frac{\pi}{12}} \quad \text{et} \quad c = 1$$

- 0.5 pt 1 a Écrire le nombre complexe a sous forme trigonométrique.
- 0.5 pt b Vérifier que $b^2 = a$ et que $b\bar{b} = 1$.
- 0.5 pt c Montrer que $a - 1 = (2 - \sqrt{3})i(a + 1)$.
- 2 Soit T la translation de vecteur $\overrightarrow{OC}$ et D le point d'affixe d tel que $T(A) = D$.
- 0.5 pt a Vérifier que $d = b(b + \bar{b})$ et déduire que les points O , B et D sont alignés.
- 0.5 pt b Déduire que $\arg(d) \equiv \frac{\pi}{12} [2\pi]$.
- 0.5 pt 3 a Vérifier que $\frac{a-c}{d} = (2 - \sqrt{3})i$ et déduire que les droites (AC) et (OD) sont perpendiculaires.
- 0.5 pt b Montrer que le quadrilatère $OCDA$ est un losange.

EXERCICE 3 *(2,5 POINTS)*

Une urne contient cinq boules blanches, quatre boules noires et deux boules vertes. Toutes les boules sont indiscernables au toucher. On tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne.

On considère les événements suivants :

- A : «Les trois boules tirées sont de même couleur.»
- B : «Tirer au moins une boule verte.»

- 0.5 pt 1 a Montrer que $p(A) = \frac{14}{165}$.
- 0.5 pt b Calculer $p(\bar{B})$, la probabilité de l'événement contraire de B et déduire que $p(B) = \frac{27}{55}$.
- 0.5 pt 2 Calculer la probabilité $p(A \cup B)$.
- 3 On considère la variable aléatoire X qui associe à chaque tirage le nombre de boules vertes tirées.



- 0.75 pt a Copier et compléter le tableau ci-dessous, qui représente la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

x_i	0	1	2
$p(X = x_i)$			

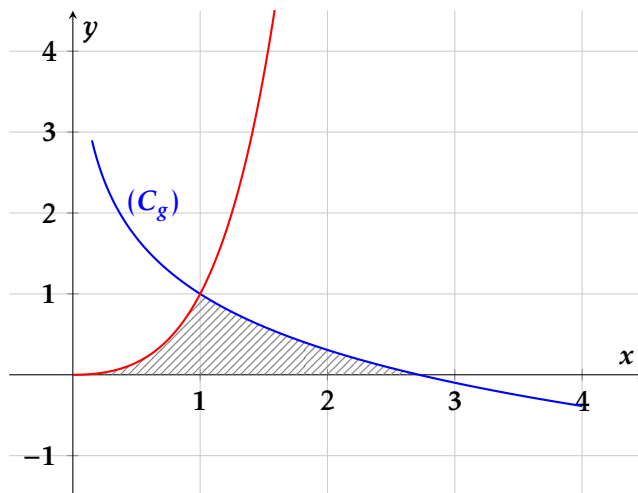
- 0.25 pt b Montrer que l'espérance de la variable aléatoire X est $E(X) = \frac{6}{11}$.

PROBLÈME *(11 POINTS) *

Partie I : On considère les fonctions numériques g et h définies sur $]0, +\infty[$ par :

$$g(x) = 1 - \ln x \quad \text{et} \quad h(x) = x^2 e^{x-1}$$

- 0.5 pt 1 a Calculer $g(1)$ et $h(1)$.
- 0.5 pt b Résoudre l'équation $g(x) = 0$ dans l'intervalle $]0, +\infty[$.
- 2 Le graphique ci-dessous représente les courbes (C_g) et (C_h) des fonctions g et h dans un même repère orthonormé.



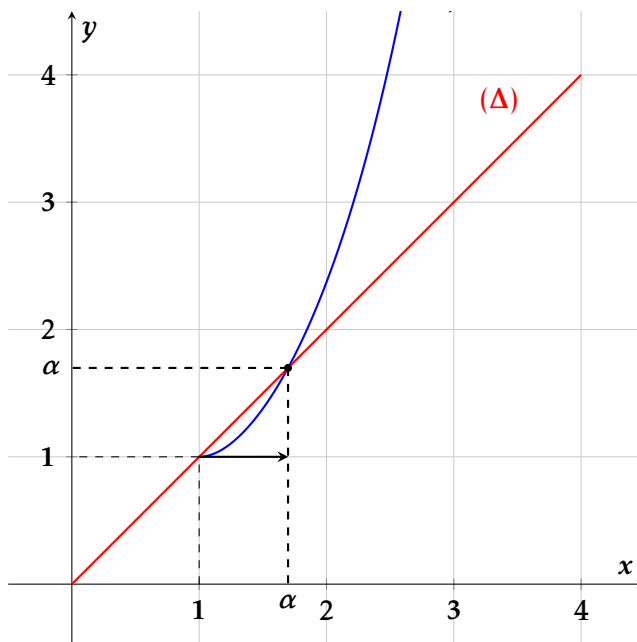
- 0.5 pt a Justifier graphiquement que : pour tout x de $]0, 1[$: $h(x) - g(x) < 0$ et pour tout x de $]1, +\infty[$: $h(x) - g(x) > 0$.
- 0.5 pt b En utilisant une intégration par parties, montrer que : $\int_1^e g(x) dx = e - 2$.
- 0.75 pt c Vérifier que la fonction $H : x \mapsto e^{x-1}(x^2 - 2x + 2)$ est une primitive de la fonction h sur $]0, +\infty[$, puis calculer $\int_0^1 h(x) dx$.
- 0.5 pt d Calculer l'aire du domaine hachuré sur le graphique précédent. (en unité d'aire)

Partie II : On considère la fonction numérique f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = e^{x-1} - \frac{\ln x}{x}$.
Soit (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 0.5 pt 1 a Vérifier que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, puis interpréter géométriquement ce résultat.
- 0.25 pt b Vérifier que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
- 0.5 pt c Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, puis interpréter géométriquement ce résultat.
- 0.5 pt 2 a Montrer que pour tout x de $]0, +\infty[$, $f'(x) = \frac{h(x) - g(x)}{x^2}$.



- 0.5 pt b Dresser le tableau de variations de f sur $]0, +\infty[$. (On peut utiliser la question 2.a de la partie I.)
- 0.5 pt c Dédire que pour tout x de $]0, +\infty[$, $e^{x-1} \geq 1 + \frac{\ln x}{x}$.
- 0.75 pt 3 Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α tel que : $\frac{3}{2} < \alpha < 2$ (On donne $f(2) \approx 2.37$ et $f(\frac{3}{2}) \approx 1.38$).
- 4 Soit φ la restriction de la fonction f sur l'intervalle $[1, +\infty[$.
- 0.5 pt a Montrer que φ admet une fonction réciproque φ^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera. (L'expression de $\varphi^{-1}(x)$ n'est pas demandée)
- 0.25 pt b Justifier que la fonction φ^{-1} est strictement croissante sur l'intervalle J .
- 5 Le graphique ci-dessous représente la courbe (C_φ) de la fonction φ et la droite (Δ) d'équation $y = x$ dans un repère orthonormé.



- 0.5 pt a Justifier graphiquement que pour tout x de $[1, \alpha]$: $\varphi(x) \leq x$.
- 0.5 pt b Dédire que pour tout x de $[1, \alpha]$: $\varphi^{-1}(x) \geq x$.
- 0.5 pt c Reproduire la courbe (C_φ) et tracer la courbe $(C_{\varphi^{-1}})$ de la fonction φ^{-1} dans un même repère orthonormé.

Partie III : Soit la suite numérique (u_n) définie par $u_0 \in]1, \alpha[$ et $u_{n+1} = \varphi^{-1}(u_n)$, pour tout entier naturel n .

- 0.5 pt 1 Montrer par récurrence que $1 < u_n < \alpha$, pour tout entier naturel n .
- 0.5 pt 2 Montrer que la suite (u_n) est croissante. (On peut utiliser la question 5.b de la partie II.)
- 0.75 pt 3 En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

FIN DE L'ÉPREUVE



UNE CORRECTION POSSIBLE

EXERCICE 1 *(3 POINTS)*

0.5 pt

- 1 a Montrons que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$:

On a les points $A(-1, 0, 1)$, $B(-3, 2, 2)$ et $C(-1, 1, 2)$.

Alors les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 - (-1) \\ 2 - 0 \\ 2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 - (-1) \\ 1 - 0 \\ 2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= (2(1) - 1(1))\vec{i} - (-2(1) - 0(1))\vec{j} + (-2(1) - 0(2))\vec{k} \\ &= (2 - 1)\vec{i} - (-2 - 0)\vec{j} + (-2 - 0)\vec{k} \\ &= \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k} \end{aligned}$$

Par suite, $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$.

0.25 pt

- b Dédisons une équation cartésienne du plan (ABC) :

Le vecteur $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$ est un vecteur normal au plan (ABC) .

Donc, une équation cartésienne du plan (ABC) est de la forme $x + 2y - 2z + d = 0$.

Or, le point $A(-1, 0, 1)$ appartient au plan (ABC) , donc ses coordonnées vérifient l'équation :

$$(-1) + 2(0) - 2(1) + d = 0 \iff -1 - 2 + d = 0 \iff d = 3$$

Par conséquent, $x + 2y - 2z + 3 = 0$ est bien une équation cartésienne du plan (ABC) .

0.5 pt

- c Calculons $\vec{u} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})$ et déduisons la position relative :

On a $\vec{u}(2, 1, 2)$ et $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(1, 2, -2)$.

$$\text{Alors } \vec{u} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = (2)(1) + (1)(2) + (2)(-2) = 2 + 2 - 4 = 0$$

Puisque le produit scalaire est nul, le vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite (Δ) est orthogonal au vecteur normal du plan (ABC) .

Or $D(2, 7, -4)$ n'appartient pas au plan (ABC) car $2 + 2(7) - 2(-4) + 3 \neq 0$, alors la droite (Δ) est strictement parallèle au plan (ABC) .

0.5 pt

- 2 a Vérifions que $\overrightarrow{\Omega D} \cdot \vec{u} = 0$ et déduisons le rayon R :

$$\text{On a } \Omega(0, 3, 0) \text{ et } D(2, 7, -4), \text{ alors } \overrightarrow{\Omega D} = \begin{pmatrix} 2 - 0 \\ 7 - 3 \\ -4 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc : } \overrightarrow{\Omega D} \cdot \vec{u} = (2)(2) + (4)(1) + (-4)(2) = 4 + 4 - 8 = 0$$

Puisque $\overrightarrow{\Omega D} \cdot \vec{u} = 0$ et que $D \in (\Delta)$ (car (Δ) passe par D), alors les droites (ΩD) et (Δ) sont perpendiculaires en D . Le point D est donc le projeté orthogonal de Ω sur la droite (Δ) .

Comme la sphère (S) est tangente à (Δ) , son rayon R est exactement la distance $d(\Omega, (\Delta))$, qui est égale à ΩD .

$$\text{Donc } R = \Omega D = \sqrt{2^2 + 4^2 + (-4)^2} = \sqrt{4 + 16 + 16} = \sqrt{36} = 6$$

Le rayon de la sphère (S) est donc bien $R = 6$.

0.75 pt

- b Calculons $d(\Omega, (ABC))$ et déduisons le rayon du cercle d'intersection :

La distance du point $\Omega(0, 3, 0)$ au plan $(ABC) : x + 2y - 2z + 3 = 0$ est :

$$d(\Omega, (ABC)) = \frac{|0 + 2(3) - 2(0) + 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{|6 + 3|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{9}{\sqrt{9}} = \frac{9}{3} = 3$$



0.5 pt

On a $d(\Omega, (ABC)) = 3$ et $R = 6$ alors Puisque $d(\Omega, (ABC)) < R$.

Donc le plan (ABC) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ) de rayon r tel que :

$$r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{36 - 9} = \sqrt{27} = \sqrt{9 \times 3} = 3\sqrt{3}$$

Donc, le rayon du cercle (Γ) est $r = 3\sqrt{3}$.

c Vérifions que $\overrightarrow{C\Omega} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ et concluons :

On a $C(-1, 1, 2)$ et $\Omega(0, 3, 0)$, alors $\overrightarrow{C\Omega}$ sont : $\overrightarrow{C\Omega} = \begin{pmatrix} 0 - (-1) \\ 3 - 1 \\ 0 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

On a bien $\overrightarrow{C\Omega} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

Donc $\overrightarrow{C\Omega}$ est un vecteur normal au plan (ABC) . Par conséquent, la droite $(C\Omega)$ est perpendiculaire au plan (ABC) .

Or C appartient au plan (ABC) alors, le point C est le projeté orthogonal du centre Ω de la sphère sur le plan (ABC) .

On en déduit que le point C est le centre du cercle (Γ) .

EXERCICE 2 *(3,5 POINTS)*

0.5 pt

1 a Forme trigonométrique du nombre complexe a :

On a $a = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$. Son module est $|a| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{1} = 1$.

Soit θ un argument de a . On a : $\cos(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\theta) = \frac{1}{2}$

Donc $\theta \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$. La forme trigonométrique de a est donc $a = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

0.5 pt

b Vérifions que $b^2 = a$ et que $b\bar{b} = 1$:

• On a $b = e^{i\frac{\pi}{12}}$, alors $b^2 = \left(e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^2 = e^{i\frac{2\pi}{12}} = e^{i\frac{\pi}{6}} = a$

Donc $b^2 = a$.

• On a : $b\bar{b} = |b|^2 = \left|e^{i\frac{\pi}{12}}\right|^2 = 1^2 = 1$

Donc $b\bar{b} = 1$.

0.5 pt

c Montrons que $a - 1 = (2 - \sqrt{3})i(a + 1)$:

On a : $a - 1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) - 1 = \frac{\sqrt{3} - 2}{2} + \frac{1}{2}i$ et $a + 1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) + 1 = \frac{\sqrt{3} + 2}{2} + \frac{1}{2}i$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi : } (2 - \sqrt{3})i(a + 1) &= (2 - \sqrt{3})i \left(\frac{\sqrt{3} + 2}{2} + \frac{1}{2}i \right) \\ &= (2 - \sqrt{3})i \left(\frac{2 + \sqrt{3}}{2} \right) + (2 - \sqrt{3})i \left(\frac{1}{2}i \right) \\ &= \frac{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})}{2}i + \frac{2 - \sqrt{3}}{2}i^2 \\ &= \frac{2^2 - (\sqrt{3})^2}{2}i - \frac{2 - \sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{4 - 3}{2}i + \frac{\sqrt{3} - 2}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3} - 2}{2} + \frac{1}{2}i \end{aligned}$$

Donc : $a - 1 = (2 - \sqrt{3})i(a + 1)$.



0.5 pt

2 a Vérifions que $d = b(b + \bar{b})$ et l'alignement des points O, B et D :

- Soit T la translation de vecteur $\overrightarrow{OC}$. L'expression complexe de T est $z' = z + c$.
Puisque $T(A) = D$, on a : $d = a + c = a + 1$
D'après la question 1.b, on a $a = b^2$ et $1 = b\bar{b}$. Alors : $d = b^2 + b\bar{b} = b(b + \bar{b})$
Donc $d = b(b + \bar{b})$.
- Alignement de O, B et D :
On a : $\frac{d-0}{b-0} = \frac{b(b+\bar{b})}{b} = b + \bar{b}$ Or, $b + \bar{b} = 2\text{Re}(b)$ alors $b + \bar{b} \in \mathbb{R}$.
Donc $\frac{d-0}{b-0} \in \mathbb{R}$, ainsi les vecteurs $\overrightarrow{OD}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont colinéaires.
Par conséquent, les points O, B et D sont alignés.

0.5 pt

b Déduction de l'argument de d :

On a : $d = b \times (b + \bar{b})$, alors : $\arg(d) \equiv \arg(b) + \arg(b + \bar{b}) \pmod{2\pi}$
Or, $\arg(b) \equiv \frac{\pi}{12} \pmod{2\pi}$.
De plus, $b + \bar{b} = 2 \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$. Or $\frac{\pi}{12} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, alors $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0$.
D'où $\arg(b + \bar{b}) \equiv 0 \pmod{2\pi}$.
Donc : $\arg(d) \equiv \frac{\pi}{12} + 0 \pmod{2\pi}$. Par conséquent, $d \equiv \frac{\pi}{12} \pmod{2\pi}$

0.5 pt

3 a Vérifions que $\frac{a-c}{d} = (2 - \sqrt{3})i$ et déduisons la perpendicularité :

- On a $c = 1$ et d'après la question 2.a, $d = a + 1$, alors : $\frac{a-c}{d} = \frac{a-1}{a+1}$
D'après la question 1.c, on a $a - 1 = (2 - \sqrt{3})i(a + 1)$, alors $\frac{a-1}{a+1} = (2 - \sqrt{3})i$
Donc $\frac{a-c}{d} = (2 - \sqrt{3})i$.
- On a : $\arg\left(\frac{a-c}{d-0}\right) \equiv \arg((2 - \sqrt{3})i) \pmod{2\pi}$
Or $2 - \sqrt{3} > 0$, alors $\arg((2 - \sqrt{3})i) \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$.
Donc $\arg\left(\frac{a-c}{d}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$, ainsi $(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{CA}) \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$
Par suite les droites (AC) et (OD) sont perpendiculaires.

0.5 pt

b Montrons que $OCDA$ est un losange :

On a : $T(A) = D$, alors $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AD}$. Donc le quadrilatère $OCDA$ est un parallélogramme dont les diagonales sont les segments $[OD]$ et $[AC]$.
D'après la question précédente, on a : $(AC) \perp (OD)$.
Or un parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires est un losange.
Donc, $OCDA$ est un losange.

EXERCICE 3 *(2,5 POINTS) *

L'urne contient 11 boules au total (5 Blanches, 4 Noires, 2 Vertes). Le tirage est simultané de 3 boules.

Alors le nombre total de cas possibles est : $\text{card}(\Omega) = \binom{11}{3} = \frac{11 \times 10 \times 9}{3 \times 2 \times 1} = 165$

0.5 pt

1 a Montrons que $p(A) = \frac{14}{165}$:

L'événement A est : "Les trois boules tirées sont de même couleur". Comme on tire 3 boules et qu'il n'y a que 2 boules vertes, il est impossible de tirer 3 boules vertes.



On peut donc seulement tirer 3 boules Blanches OU 3 boules Noires.

$$\text{D'où } \text{card}(A) = \binom{5}{3} + \binom{4}{3} = 10 + 4 = 14$$

La probabilité est donc : $p(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{14}{165}$

0.5 pt

b Calcul de $p(\bar{B})$ et déduction de $p(B)$:

L'événement contraire $\bar{B}$ est : "Ne tirer aucune boule verte". Cela revient à tirer 3 boules parmi les 9 boules non vertes (5B + 4N).

$$\text{Alors } \text{card}(\bar{B}) = \binom{9}{3} = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = 84$$

$$\text{Donc } p(\bar{B}) = \frac{84}{165}$$

$$\text{On a : } p(B) = 1 - p(\bar{B}) = 1 - \frac{84}{165} = \frac{165 - 84}{165} = \frac{81}{165} = \frac{27}{55}. \text{ Donc : } p(B) = \frac{27}{55}$$

0.5 pt

2 Calcul de la probabilité $p(A \cup B)$:

On utilise la formule $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.

L'événement $A \cap B$ représente : "Tirer 3 boules de même couleur ET au moins une boule verte".

Puisqu'il faut que les 3 boules soient de même couleur et qu'il y a au moins une verte, cela impliquerait de tirer 3 boules vertes. Or, il n'y a que 2 boules vertes dans l'urne. C'est donc un événement impossible : $A \cap B = \emptyset$ et $p(A \cap B) = 0$.

$$\text{Ainsi : } p(A \cup B) = p(A) + p(B) = \frac{14}{165} + \frac{81}{165} = \frac{95}{165} = \frac{19}{33}$$

$$\text{Donc : } p(A \cup B) = \frac{19}{33}$$

0.75 pt

3 **a** Loi de probabilité de X :

La variable X compte le nombre de boules vertes tirées. Ses valeurs possibles sont 0, 1, 2.

- $X = 0$: 0 boule verte. C'est l'événement $\bar{B}$. Donc $p(X = 0) = p(\bar{B}) = \frac{28}{55}$
- $X = 1$: Exactement 1 boule verte. On tire 1 verte parmi 2 ET 2 non-vertes parmi 9.

$$\text{Alors } p(X = 1) = \frac{\binom{2}{1} \times \binom{9}{2}}{165} = \frac{2 \times 36}{165} = \frac{24}{55}$$

- $X = 2$: Exactement 2 boules vertes. On tire 2 vertes parmi 2 ET 1 non-verte parmi 9.

$$\text{Alors } p(X = 2) = \frac{\binom{2}{2} \times \binom{9}{1}}{165} = \frac{1 \times 9}{165} = \frac{3}{55}$$

$$\text{On a : } \frac{28}{55} + \frac{24}{55} + \frac{3}{55} = \frac{55}{55} = 1.$$

Donc la loi de probabilité de X est :

x_i	0	1	2
$p(X = x_i)$	$\frac{28}{55}$	$\frac{24}{55}$	$\frac{3}{55}$

0.25 pt

b Montrons que l'espérance est $E(X) = \frac{6}{11}$:

Par définition, $E(X) = \sum x_i p(X = x_i)$.

$$\text{Alors } E(X) = 0 \times \frac{28}{55} + 1 \times \frac{24}{55} + 2 \times \frac{3}{55} = 0 + \frac{24}{55} + \frac{6}{55} = \frac{30}{55} = \frac{6}{11}$$

$$\text{Donc } E(X) = \frac{6}{11}$$



PROBLÈME *(11 POINTS) *

Partie I :

0.5 pt

- 1 a Calculons $g(1)$ et $h(1)$:

On a : $g(1) = 1 - \ln(1) = 1 - 0 = 1$ et $h(1) = 1^2 \cdot e^{1-1} = 1 \cdot e^0 = 1 \cdot 1 = 1$

Donc $g(1) = 1$ et $h(1) = 1$.

0.5 pt

- b Résolvons l'équation $g(x) = 0$:

On a : $g(x) = 0 \iff 1 - \ln x = 0 \iff \ln x = 1 \iff x = e$

La solution de l'équation dans l'intervalle $]0, +\infty[$ est $x = e$.

0.5 pt

- 2 a Justification graphique des signes de $h(x) - g(x)$:

- Sur l'intervalle $]0, 1[$, on observe sur le graphique que la courbe (C_h) est située **strictement en dessous** de la courbe (C_g) .

Par conséquent, pour tout $x \in]0, 1[$, on a $h(x) < g(x)$.

Donc pour tout $x \in]0, 1[$, $h(x) - g(x) < 0$.

- Sur l'intervalle $]1, +\infty[$, on observe que la courbe (C_h) est située **strictement au-dessus** de la courbe (C_g) .

Par conséquent, pour tout $x \in]1, +\infty[$, on a $h(x) > g(x)$.

Donc pour tout $x \in]1, +\infty[$, $h(x) - g(x) > 0$.

0.5 pt

- b Calcul de $\int_1^e g(x) dx$ par intégration par parties :

$$\text{On : } \int_1^e g(x) dx = \int_1^e (1 - \ln x) dx = \int_1^e 1 dx - \int_1^e \ln x dx$$

$$\text{Calculons : } \int_1^e \ln x dx \text{ On pose : } \begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = 1 \end{cases} \text{ c.à.d. } \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = x \end{cases}$$

Par intégration par parties, on obtient :

$$\int_1^e \ln x dx = [x \ln x]_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx = (e \ln e - 1 \ln 1) - \int_1^e 1 dx = (e - 0) - [x]_1^e = e - (e - 1) = 1$$

$$\text{Alors : } \int_1^e g(x) dx = \int_1^e (1 - \ln x) dx = \int_1^e 1 dx - \int_1^e \ln x dx = [x]_1^e - 1 = (e - 1) - 1 = e - 2$$

$$\text{Donc } \int_1^e g(x) dx = e - 2.$$

0.75 pt

- c Vérifions la primitive H et calculons $\int_0^1 h(x) dx$:

La fonction $H : x \mapsto e^{x-1}(x^2 - 2x + 2)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme produit de fonctions dérivables.

$$\begin{aligned} \text{Alors : } H'(x) &= (e^{x-1})' \cdot (x^2 - 2x + 2) + e^{x-1} \cdot (x^2 - 2x + 2)' \\ &= e^{x-1} \cdot (x^2 - 2x + 2) + e^{x-1} \cdot (2x - 2) \\ &= e^{x-1} \cdot (x^2 - 2x + 2 + 2x - 2) \\ &= e^{x-1} \cdot (x^2) \\ &= h(x) \end{aligned}$$

Puisque $H'(x) = h(x)$, alors H est une primitive de h sur $]0, +\infty[$.

$$\begin{aligned} \text{Donc : } \int_0^1 h(x) dx &= [H(x)]_0^1 = H(1) - H(0) \\ &= e^{1-1}(1^2 - 2(1) + 2) - e^{0-1}(0^2 - 2(0) + 2) \\ &= e^0(1) - e^{-1}(2) \\ &= 1 - \frac{2}{e} \end{aligned}$$



0.5 pt

Par suite $\int_0^1 h(x) dx = 1 - \frac{2}{e}$.

d Calcul de l'aire du domaine hachuré :

Le domaine hachuré est délimité d'une part par (C_h) , l'axe des abscisses, $x = 0$ et $x = 1$, et d'autre part par (C_g) , l'axe des ordonnées, $x = 1$ et $x = e$ (où (C_g) croise l'axe).

Puisque les deux fonctions sont positives sur ces intervalles respectifs, alors l'aire $\mathcal{A}$ est :

$$\mathcal{A} = \int_0^1 h(x) dx + \int_1^e g(x) dx = \left(1 - \frac{2}{e}\right) + (e - 2) = e - 1 - \frac{2}{e}$$

Donc L'aire est : $\mathcal{A} = e - 1 - \frac{2}{e}$ (en unité d'aire).

Partie II :

0.5 pt

1 a Limite à droite en 0 et interprétation géométrique :

On a : $f(x) = e^{x-1} - \frac{\ln x}{x}$

On a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x-1} = e^{-1} = \frac{1}{e}$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{\ln x}{x} = +\infty$ car $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = -\infty$.

Donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$.

Interprétation géométrique : La droite d'équation $x = 0$ (l'axe des ordonnées) est une asymptote verticale à la courbe (C_f) .

0.25 pt

b Limite en $+\infty$:

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^{x-1} - \frac{\ln x}{x} \right)$

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-1} = \lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

0.5 pt

c Limite de $\frac{f(x)}{x}$ et branche infinie :

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x-1} - \frac{\ln x}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x-1}}{x} - \frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e} \cdot \frac{e^x}{x} - \frac{\ln x}{x^2} = +\infty$

car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$.

Donc , $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.

Interprétation géométrique : La courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

0.75 pt

2 a Dérivée de f :

La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$, alors :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(e^{x-1} - \frac{\ln x}{x} \right)' \\ &= e^{x-1} - \frac{(\ln x)' \cdot x - (\ln x) \cdot (x)'}{x^2} \\ &= e^{x-1} - \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} \\ &= e^{x-1} - \frac{1 - \ln x}{x^2} \\ &= \frac{x^2 e^{x-1} - (1 - \ln x)}{x^2} \\ &= \frac{h(x) - g(x)}{x^2} \end{aligned}$$



0.5 pt

Donc : $f'(x) = \frac{h(x) - g(x)}{x^2}$.

b Tableau de variations de f :

Le signe de $f'(x)$ dépend uniquement du signe du numérateur $h(x) - g(x)$ car $x^2 > 0$ sur $]0, +\infty[$.
D'après la question I.2.a :

- Sur $]0, 1[$, $h(x) - g(x) < 0$, alors $f'(x) < 0$.
Donc f est strictement décroissante sur $]0, 1[$.
- Sur $]1, +\infty[$, $h(x) - g(x) > 0$, alors $f'(x) > 0$.
Donc f est strictement croissante sur $]1, +\infty[$.
- Pour $x = 1$, $h(1) - g(1) = 1 - 1 = 0$, donc $f'(1) = 0$.

on a : $f(1) = e^{1-1} - \frac{\ln 1}{1} = e^0 - 0 = 1$

Donc le tableau de variation de f est :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
f	$+\infty$	1	$+\infty$

0.5 pt

c Dédution d'une inégalité :

D'après le tableau de variations, la fonction f admet un minimum global sur $]0, +\infty[$ atteint en $x = 1$, et ce minimum vaut $f(1) = 1$. Par conséquent, pour tout $x \in]0, +\infty[$: $f(x) \geq 1$

D'où $e^{x-1} - \frac{\ln x}{x} \geq 1$. Par suite : pour tout $x \in]0, +\infty[$ $e^{x-1} \geq 1 + \frac{\ln x}{x}$

0.75 pt

3 Solution de l'équation $f(x) = x$ sur un intervalle donné :

On pose : $k(x) = f(x) - x$, alors $f(x) = x \iff k(x) = 0$

La fonction f est continue sur $]0, +\infty[$ (comme somme et quotient de fonctions continues), donc la fonction k est continue sur l'intervalle $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$.

Or : $k\left(\frac{3}{2}\right) = f\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{3}{2} \approx 1.38 - 1.50 = -0.12$ c.à.d $k\left(\frac{3}{2}\right) < 0$.

et $k(2) = f(2) - 2 \approx 2.37 - 2.00 = 0.37$, c.à.d Donc $k(2) > 0$.

Alors $k\left(\frac{3}{2}\right) \times k(2) < 0$

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $k(x) = 0$ (ce qui équivaut à $f(x) = x$) admet **au moins une solution** α vérifiant $\frac{3}{2} < \alpha < 2$.

Par suite l'équation $f(x) = x$ admet une solution α vérifiant $\frac{3}{2} < \alpha < 2$.

0.5 pt

4 a Fonction réciproque de φ :

La fonction φ est la restriction de f sur l'intervalle $[1, +\infty[$.

- φ est continue sur $[1, +\infty[$ car f l'est.
- D'après II.2.b, φ est strictement croissante sur $[1, +\infty[$.

Ainsi, φ admet une fonction réciproque définie sur l'intervalle J tel que :

$J = \varphi([1, +\infty[) = \left[\varphi(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)\right[= [1, +\infty[$



0.25 pt

b Variations de φ^{-1} :

La fonction réciproque φ^{-1} a le même sens de variation que la fonction φ .

Puisque φ est strictement croissante sur $[1, +\infty[$, alors φ^{-1} est strictement croissante sur $J = [1, +\infty[$.

0.5 pt

5 a Justification graphique pour $\varphi(x) \leq x$:

Sur l'intervalle $[1, \alpha]$, la courbe (C_φ) est située **en dessous** de la droite (Δ) d'équation $y = x$.

Par lecture graphique, cela se traduit par l'inégalité : $\forall x \in [1, \alpha] : \varphi(x) \leq x$.

0.5 pt

b Déduction pour $\varphi^{-1}(x) \geq x$:

Pour tout $x \in [1, \alpha]$, on a montré que $\varphi(x) \leq x$.

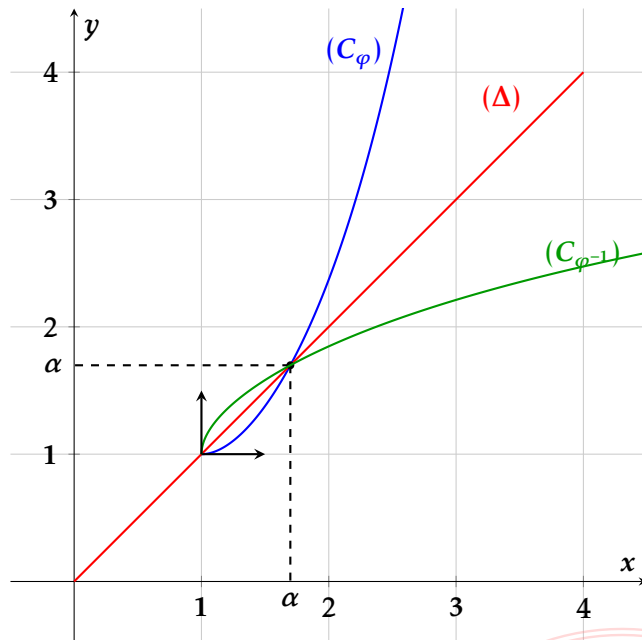
Puisque φ^{-1} est **strictement croissante** sur $[1, +\infty[$, alors : $\varphi^{-1}(\varphi(x)) \leq \varphi^{-1}(x)$. Ainsi $x \leq \varphi^{-1}(x)$

Donc pour tout $x \in [1, \alpha]$ $\varphi^{-1}(x) \geq x$

0.5 pt

c Tracé de la courbe $(C_{\varphi^{-1}})$

La courbe $(C_{\varphi^{-1}})$ est l'image de (C_φ) par la symétrie axiale par rapport à la droite (Δ) d'équation $y = x$.



Partie III :

0.5 pt

1 Montrons par récurrence que $1 < u_n < \alpha$:

On pose : $P(n) : 1 < u_n < \alpha$.

Initialisation : Pour $n = 0$, on a : $u_0 \in]1, \alpha[$. Donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $1 < u_n < \alpha$ et montrons que $1 < u_{n+1} < \alpha$.

Nous avons $1 < u_n < \alpha$. Puisque la fonction φ^{-1} est **strictement croissante** sur $[1, +\infty[$, alors :

$$\varphi^{-1}(1) < \varphi^{-1}(u_n) < \varphi^{-1}(\alpha)$$

On a, $\varphi(1) = 1 \iff \varphi^{-1}(1) = 1$.

Et on sait que α est solution de $f(x) = x$, soit $\varphi(\alpha) = \alpha \iff \varphi^{-1}(\alpha) = \alpha$.

De plus, $\varphi^{-1}(u_n) = u_{n+1}$.

D'où : $1 < u_{n+1} < \alpha$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $1 < u_n < \alpha$.



0.5 pt

2 Monotonie de la suite (u_n) :

d'après la partie II.5.b, on a : pour tout $x \in [1, \alpha]$: $\varphi^{-1}(x) \geq x$.

Or, d'après la question précédente, $u_n \in]1, \alpha[$ pour tout entier n .

Alors : $\varphi^{-1}(u_n) \geq u_n \implies u_{n+1} \geq u_n$

On en déduit que la suite (u_n) est croissante.

0.75 pt

3 Convergence et limite de la suite :

- La suite (u_n) est croissante.
- La suite (u_n) est majorée par α (car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < \alpha$).

Donc, la suite (u_n) est convergente.

Soit ℓ la limite de la suite (u_n) .

Puisque :
$$\begin{cases} u_{n+1} = \varphi^{-1}(u_n) \\ u_n \in]1, \alpha[\text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \\ \text{la fonction } \varphi^{-1} \text{ est continue sur } [1, \alpha] \\ \text{la suite } (u_n) \text{ est convergente vers } \ell \end{cases}$$

Alors la limite $\ell \in [1, \alpha]$ est solution de l'équation : $\varphi^{-1}(\ell) = \ell$

Résolvons cette équation sur $[1, \alpha]$:

$$\varphi^{-1}(\ell) = \ell \iff \ell = \varphi(\ell) \iff \varphi(\ell) - \ell = 0 \iff (\ell = 1 \text{ ou } \ell = \alpha)$$

Or, la suite (u_n) est croissante, alors elle est minorée par son premier terme u_0 .

Puisque $u_0 \in]1, \alpha[$, on a $u_0 > 1$, ce qui implique que $\ell \geq u_0 > 1$. D'où $\ell \neq 1$.

Donc, la limite de la suite est $\ell = \alpha$.

FIN DE LA CORRECTION

