

Correction

Baccalauréat Sciences & Technologie

Session : Rattrapage 2026

MATHÉMATIQUES

Exercice 1 : (3 pts)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(-1, 0, 1)$, $B(-3, 2, 2)$, $C(-1, 1, 2)$ et $D(2, 7, -4)$

Soit (Δ) la droite passant par le point D et dirigée par le vecteur $\vec{u}(2, 1, 2)$

1 - a) Montrons que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$.

On a $\overrightarrow{AB}(-2, 2, 1)$

Et $\overrightarrow{AC}(0, 1, 1)$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= (1 \times 2 - 1 \times 1)\vec{i} - ((-2) \times 1 - 0 \times 1)\vec{j} + ((-2) \times 1 - 0 \times 2)\vec{k} \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$$

b) Dédudisons que $x + 2y - 2z + 3 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC) .

On a $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ et un vecteur normal au plan (ABC) , donc l'équation correspondante de (ABC) s'écrit : $(ABC) : x + 2y - 2z + d = 0$

Or $A \in (ABC)$ donc $x_A + 2y_A - 2z_A + d = 0$

$$\text{Donc } -1 + 2 \times 0 - 2 \times 1 + d = 0$$

$$\text{Donc } d = 3$$

$$\text{Donc } (ABC) : x + 2y - 2z + 3 = 0$$

$$\text{Donc } x + 2y - 2z + 3 = 0 \text{ est une équation cartésienne du plan } (ABC).$$

c) Calculons $\vec{u} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})$ et déduisons que la droite (Δ) est parallèle au plan (ABC)

On a $\vec{u}(2, 1, 2)$ et $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(1; 2; -2)$

Donc $\vec{u} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = 2 \times 1 + 1 \times 2 + 2 \times (-2) = 0$

Donc $\vec{u} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = 0$

Puisque $\vec{u} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = 0$, le vecteur directeur de (Δ) est orthogonal au vecteur normal $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ du plan (ABC)

Donc la droite (Δ) est parallèle au plan (ABC)

2 - Soit (S) la sphère de centre $\Omega(0, 3, 0)$ est tangente à la droite (Δ) .

a) Vérifions que $\overrightarrow{\Omega D} \cdot \vec{u} = 0$ et déduisons que le rayon de la sphère (S) est égale à 6.

On a $\overrightarrow{\Omega D}(x_D - x_\Omega; y_D - y_\Omega; z_D - z_\Omega)$ alors $\overrightarrow{\Omega D}(2 - 0; 7 - 3; -4 - 0); \overrightarrow{\Omega D}(2; 4; -4)$

D'autre part, $\overrightarrow{\Omega D} \cdot \vec{u} = 2 + 4 + (-4) = 0$

Donc : $\overrightarrow{\Omega D} \cdot \vec{u} = 0$ Puisque $\overrightarrow{\Omega D} \cdot \vec{u} = 0$, la droite (Δ) est perpendiculaire au rayon $[\Omega D]$ au point D.

Comme (S) est tangente à (Δ) et passe par D (car $D \in (\Delta)$), le point de tangence est exactement D.

Le rayon R de la sphère est donc la distance ΩD :

$$R = \Omega D = \sqrt{2^2 + 4^2 + (-4)^2} = 6, \text{ Alors } R = 6$$

b) Calculons $d(\Omega, (ABC))$ et déduisons que (ABC) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ) , de rayon $r = 3\sqrt{3}$.

$$\text{On sait que } d(\Omega, (ABC)) = \frac{|x_\Omega + 2y_\Omega - 2z_\Omega + 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{|0 + 2 \cdot 3 - 2 \cdot 0 + 3|}{\sqrt{9}} = \frac{9}{3} = 3$$

Donc : $d(\Omega, (ABC)) = 3$ Puisque $d = 3 < R = 6$, le plan (ABC) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ) .

$$\text{Le rayon de ce cercle est } r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{36 - 9} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}.$$

Donc (ABC) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ) , de rayon $r = 3\sqrt{3}$

c) Vérifions que $\overrightarrow{\Omega D} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ et déduisons que le point C est le centre du cercle (Γ)

On a $\Omega(0, 3, 0)$ et $C(-1, 1, 2)$.

$$\overrightarrow{C\Omega}(0 - (-1), 3 - 1, 0 - 2) \Rightarrow \overrightarrow{C\Omega}(1, 2, -2).$$

On remarque clairement que $\overrightarrow{C\Omega} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ (qui est le vecteur normal au plan).

Donc $\overrightarrow{\Omega D} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ Ainsi, la droite $(C\Omega)$ est perpendiculaire au plan (ABC) .

Vérifions si le point C appartient au plan (ABC) : $(-1) + 2(1) - 2(2) + 3 = -1 + 2 - 4 + 3 = 0$.

C'est vérifié.

Puisque la droite $(C\Omega)$ est orthogonale à (ABC) et $C \in (ABC)$, le point C est la projection orthogonale de Ω sur le plan (ABC) .

Conclusion : Le point C est le centre du cercle (Γ) .

Exercice 2 : (3.5 pts)

On considère dans le plan complexe les points A, B et C d'affixes respectives $a = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, $b = e^{i\frac{\pi}{12}}$ et $c = 1$

1 - a) Écrivons le nombre complexe a sous forme trigonométrique.

Calculons d'abord le module de a :

$|a| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = 1$. On factorise par le module : $a = 1 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \right)$. On sait que $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$. **Conclusion :** La forme trigonométrique est $a = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$. Donc $a = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

b) Vérifions que $b^2 = a$ et que $b\bar{b} = 1$.

On a $b = e^{i\frac{\pi}{12}}$.

- Calcul de b^2 : $b^2 = (e^{i\frac{\pi}{12}})^2 = e^{i(2 \times \frac{\pi}{12})} = e^{i\frac{\pi}{6}}$.

Or, on a vu que $a = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = e^{i\frac{\pi}{6}}$. Donc $b^2 = a$.

- Calcul de $b\bar{b}$: On sait que $z\bar{z} = |z|^2$.

Le module de b est $|b| = |e^{i\frac{\pi}{12}}| = 1$. Donc $|b|^2 = 1^2 = 1$. Donc $b\bar{b} = 1$. D'où $b^2 = a$ et que $b\bar{b} = 1$

c) Montrons que $a - 1 = (2 - \sqrt{3})i(a + 1)$

On a $a = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, donc $a + 1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right) + \frac{1}{2}i = \frac{\sqrt{3} + 2}{2} + \frac{1}{2}i$.

Multiplions par $(2 - \sqrt{3})i$: $(2 - \sqrt{3})i \times (a + 1) = (2 - \sqrt{3})i \left[\frac{2 + \sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right] = (2 - \sqrt{3}) \left[i \left(\frac{2 + \sqrt{3}}{2} \right) + \frac{1}{2}i^2 \right]$

$= (2 - \sqrt{3}) \left[-\frac{1}{2} + i \frac{2 + \sqrt{3}}{2} \right] = -\frac{2 - \sqrt{3}}{2} + i \frac{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})}{2}$

Or : $(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 2^2 - (\sqrt{3})^2 = 4 - 3 = 1$.

L'expression devient : $\frac{\sqrt{3} - 2}{2} + \frac{1}{2}i = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \right) + \frac{1}{2}i$.

D'autre part, on calcule le membre de gauche : $a - 1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) - 1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \right) + \frac{1}{2}i$.

Conclusion : L'égalité $a - 1 = (2 - \sqrt{3})i(a + 1)$ est bien vérifiée.

2 - Soit T la translation de vecteur $\overrightarrow{OC}$ et D le point d'affixe d tel que $T(A) = D$

a) Vérifions que $d = b(b + \bar{b})$ et déduisons que les points O , B et D sont alignés.

Soit T la translation de vecteur $\overrightarrow{OC}$. L'écriture complexe de T est $z' = z + z_{\overrightarrow{OC}}$. Or, $z_{\overrightarrow{OC}} = c - 0 = 1$. Donc l'expression est $z' = z + 1$. On a $T(A) = D \Leftrightarrow z_D = z_A + 1 \Rightarrow d = a + 1$. D'après 1.b, on sait que $a = b^2$ et $1 = b\bar{b}$. En remplaçant, on obtient : $d = b^2 + b\bar{b} = b(b + \bar{b})$. **Donc $d = b(b + \bar{b})$** *Déduction de l'alignement :*

On sait que $b + \bar{b} = 2\operatorname{Re}(b) = 2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$. Posons $k = 2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$, remarquons que $k \in \mathbb{R}$. On a alors $d = k \times b$, ce qui s'écrit $\overrightarrow{OD} = k\overrightarrow{OB}$. Puisque les vecteurs $\overrightarrow{OD}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont colinéaires,

Donc les points O , B et D sont alignés.

b) Déduisons que $\arg(d) \equiv \frac{\pi}{12}[2\pi]$

On a $d = 2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \cdot b$ ($\cos\frac{\pi}{12} > 0$).

Alors $\arg(d) \equiv \arg\left(2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \times b\right) [2\pi] \equiv \arg(b)[2\pi]$.

Donc $\arg(d) \equiv \arg(b)[2\pi] \equiv \frac{\pi}{12}[2\pi]$. **Finalement $\arg(d) \equiv \frac{\pi}{12}[2\pi]$**

3 - a) Vérifions que $\frac{a-c}{d} = (2 - \sqrt{3})i$ et déduisons que les droites (AC) et (OD) sont perpendiculaires.

On a $c = 1$ et $d = a + 1$ (vu à la question 2.a).

Donc $\frac{a-c}{d} = \frac{a-1}{a+1}$.

D'après la question 1.c, on a $a - 1 = (2 - \sqrt{3})i(a + 1) \Rightarrow \frac{a-1}{a+1} = (2 - \sqrt{3})i$.

Donc $\frac{a-c}{d} = (2 - \sqrt{3})i$ *Déduction : $\frac{z_A - z_C}{z_D - z_O} = (2 - \sqrt{3})i$.*

Passons aux arguments : $\arg\left(\frac{z_A - z_C}{z_D - z_O}\right) \equiv \arg((2 - \sqrt{3})i)[2\pi]$.

Puisque $2 - \sqrt{3} > 0$ (car $2 = \sqrt{4} > \sqrt{3}$), on a $\arg((2 - \sqrt{3})i) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Ce qui se traduit géométriquement par : $(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{CA}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Conclusion : Les droites (AC) et (OD) sont perpendiculaires.

b) Montrons que le quadrilatère $OCDA$ est un losange

On a $T(A) = D \iff \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OC}$.

Puisque $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OC}$, le quadrilatère $OCDA$ est un parallélogramme.

Dans ce parallélogramme, les diagonales sont les droites (AC) et (OD) .

D'après la question précédente (3.a), on a prouvé que $(AC) \perp (OD)$ (les diagonales sont perpendiculaires).

Rappel géométrique : Un parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires est un losange. **Conclusion : $OCDA$ est un losange.**

Exercice 3 : (2.5 pts)

Une urne contient cinq boules blanches, quatre boules noires et deux boules vertes.

Tout les boules sont indiscernables au toucher.

On tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne

On considère les événements suivants :

A : « Les trois boules tirées sont de même couleur. »

B : « Tirer au moins une boule verte »

On tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne, donc $\text{card}(\Omega) = C_{11}^3 = \frac{11!}{3!8!} = 165$.

1 - Soit Ω l'univers des éventualités

a) Montrons que $p(A) = \frac{14}{165}$

On tire trois boules parmi cinq boules blanches où bien trois boules noires parmi quatre boules noires

$$\text{Donc } \text{card}(A) = C_5^3 + C_4^3 = 10 + 4 = 14$$

$$\text{D'où } P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{14}{165}$$

$$\text{Finalement : } P(A) = \frac{14}{165}$$

b) Calculons $p(\overline{B})$, la probabilité de l'événement contraire de B et déduisons que $p(B) = \frac{27}{55}$

$\overline{B}$: « Tirer trois boules non vertes »

$$\text{Donc } \text{card}(\overline{B}) = C_9^3 = 84$$

$$\text{D'où } P(\overline{B}) = \frac{\text{card}(\overline{B})}{\text{card}(\Omega)} = \frac{84}{165} = \frac{28}{55}$$

$$\text{Finalement : } P(\overline{B}) = \frac{28}{55}$$

d'autre part : $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \frac{28}{55} = \frac{27}{55}$

0.5 pt 2 - Calculons la probabilité $p(A \cup B)$

On sait que $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

$A \cap B$: "Tirer 3 boules de même couleur ET au moins une boule verte"

Alors $A \cap B$: "tirer 3 boules Vertes"

Or, l'urne ne contient que 2 boules vertes, il est donc impossible de tirer 3 boules vertes.

donc $p(A \cap B) = p(\emptyset) = 0$

Alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{14}{165} + \frac{27}{55} - 0 = \frac{19}{33}$ Donc $p(A \cup B) = \frac{19}{33}$

3 - considère la variable aléatoire X qui associe à chaque tirage le nombre de boules vertes tirées

0.75 pt

a) Recopions et complétons le tableau ci-dessous, qui représente la loi de probabilités de la variable aléatoire X :

$(X = 0)$: « Tirer trois boules non vertes » : $\overline{B}$

Donc : $p(X = 0) = P(\overline{B}) = \frac{28}{55}$

$(X = 1)$: « Tirer une boule verte et deux boules non vertes »

Donc : $p(X = 1) = \frac{C_2^1 \times C_9^2}{165} = \frac{72}{165} = \frac{24}{55}$

$(X = 2)$: « Tirer deux boules vertes et une boule non verte »

Donc : $p(X = 2) = \frac{C_2^2 \times C_9^1}{165} = \frac{9}{165} = \frac{3}{55}$

$X = x_i$	0	1	2
$p(X = x_i)$	$\frac{28}{55}$	$\frac{24}{55}$	$\frac{3}{55}$

0.25 pt

b) Montrons que l'espérance de la variable aléatoire X est $E(X) = \frac{6}{11}$

On sait que $E(X) = \sum \left(x_i \times P(X = x_i) \right)$

$E(X) = 0 \times \frac{28}{55} + 1 \times \frac{24}{55} + 2 \times \frac{3}{55} = \frac{6}{11}$

Problème : (11 pts)

On considère les fonctions numériques g et h définies sur $]0, +\infty[$ par :

$g(x) = 1 - \ln x$ et $h(x) = x^2 e^{x-1}$

1 - a) Calculons $g(1)$ et $h(1)$

On a : $g(1) = 1 - \ln(1) = 1$ et $h(1) = 1^2 e^{1-1} = 1.$

Donc : $g(1) = 1$ et $h(1) = 1.$

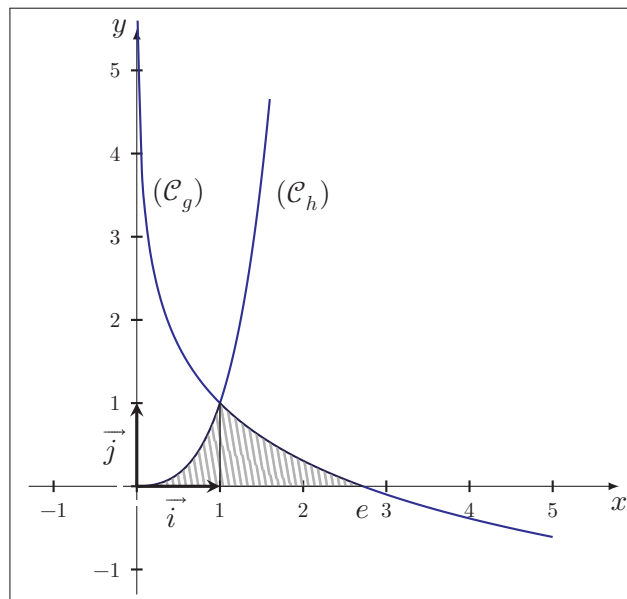
0.5 pt

b) Résolvons l'équation $g(x) = 0$ dans l'intervalle $]0, +\infty[$.

$1 - \ln x = 0 \iff \ln x = 1 \iff x = e.$

Donc la solution est $x = e.$

2 - Le graphique ci-dessous représente les courbes (C_g) et (C_h) des fonctions g et h dans un même repère orthonormé.



0.5 pt

a) Justifions graphiquement que :

pour tout $x \in]0, 1[$, $h(x) - g(x) < 0$ et pour tout $x \in]1, +\infty[$, $h(x) - g(x) > 0$

Graphiquement, les deux courbes se coupent en un point d'abscisses $x = 1$, et on a :

— pour $x \in]0, 1[$, la courbe (C_h) est en dessous de (C_g) , donc $h(x) < g(x)$

Donc $\forall x \in]0, 1[$; $h(x) - g(x) < 0$

— pour $x \in]1, +\infty[$, la courbe (C_h) est en dessus de (C_g) , donc $h(x) > g(x)$

Donc $\forall x \in]1, +\infty[$; $h(x) - g(x) > 0$

0.5 pt

b) En utilisant une intégration par parties, montrons que : $\int_1^e g(x) dx = e - 2$

On calcule : $\int_1^e g(x) dx$

$$\begin{aligned} \text{On a : } \int_1^e g(x) dx &= \int_1^e (1 - \ln x) dx \\ &= \int_1^e 1 dx - \int_1^e \ln x dx \\ &= [x]_1^e - \int_1^e \ln x dx \\ &= e - 1 - \int_1^e \ln x dx \end{aligned}$$

Or, par intégration par parties : $\int \ln x dx = x \ln x - x.$

On pose : $\begin{cases} u(x) = \ln(x) \\ v'(x) = 1 \end{cases}$ donc : $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = x \end{cases}$

Donc : $\int_1^e \ln x \, dx = [x \ln x - x]_1^e = (e \cdot 1 - e) - (0 - 1) = 1.$

Ainsi : $\int_1^e g(x) \, dx = (e - 1) - 1 = e - 2.$

Finalement : $\int_1^e g(x) \, dx = e - 2.$

- c) Vérifions que la fonction $H : x \mapsto e^{x-1}(x^2 - 2x + 2)$ est une primitive de la fonction h sur $]0, +\infty[$, puis calculons $\int_0^1 h(x) \, dx$

— Vérifions que la fonction $H : x \mapsto e^{x-1}(x^2 - 2x + 2)$ est une primitive de la fonction h sur $]0, +\infty[$ ► On a h est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme le produit de deux fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$

$$\forall x \in]0, +\infty[\quad ; \quad H'(x) = e^{x-1}(x^2 - 2x + 2) + e^{x-1}(2x - 2).$$

$$\text{Donc : } H'(x) = e^{x-1}(x^2 - 2x + 2 + 2x - 2) = e^{x-1}x^2 = h(x).$$

Donc H est une fonction primitive de h sur $]0, +\infty[$.

— Calculons $\int_0^1 h(x) \, dx$ $\int_0^1 h(x) \, dx = [H(x)]_0^1 = H(1) - H(0).$

Puisque : $H(1) = e^0(1 - 2 + 2) = 1$ et $H(0) = e^{-1}(2) = \frac{2}{e}.$

Donc : $\int_0^1 h(x) \, dx = 1 - \frac{2}{e}.$

- d) Calculons l'aire du domaine hachuré sur le graphique précédent (en unité d'aire).

- e) Soit $\mathcal{A}$ l'aire hachurée sur le graphique précédent

$$\mathcal{A} = \int_0^1 |h(x)| \, dx + \int_1^e |g(x)| \, dx.$$

Puisque $g(x) \geq 0$ pour tout $x \in [1, e]$ et $h(x) \geq 0$ pour tout $x \in [0, 1]$

$$\text{Donc : } \mathcal{A} = \left(\int_0^1 h(x) \, dx + \int_1^e g(x) \, dx \right) \times u.a. = \left(\left(1 - \frac{2}{e} \right) + (e - 2) \right) \times u.a.$$

Finalement : $\mathcal{A} = \left(e - 1 - \frac{2}{e} \right) \times u.a.$

Partie II : On considère la fonction numérique f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = e^{x-1} - \frac{\ln x}{x}$
Soit (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1 - a) Vérifions que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, puis interpréter géométriquement ce résultat.

Comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x-1} = e^{-1}$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{x} = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{\ln(x)}{x} = +\infty$

Alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-1} - \frac{\ln(x)}{x} = +\infty$

Finalemment $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$

Interpréter géométriquement (C_f) admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$

b) Vérifions que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e} \times e^x = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$

Alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-1} - \frac{\ln(x)}{x} = +\infty$

Finalemment $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$

c) Montrons que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, puis interprétons géométriquement ce résultat.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-1} - \frac{\ln(x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x-1}}{x} - \frac{\ln(x)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e} \times \frac{e^x}{x} - \frac{\ln(x)}{x^2} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= +\infty \quad ; \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0 \end{aligned}$$

Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

Interpréter géométriquement (C_f) admet une branche parabolique vers l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$

2 - a) Montrons que pour tout x de $]0, +\infty[$: $f'(x) = \frac{h(x) - g(x)}{x^2}$

f est dérivable sur $]0; 0[$ comme la somme de deux fonctions dérivable sur $]0; 0[$

Soit $x \in]0; 0[$

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{x-1} - \frac{\frac{1}{x} \times x - 1 \times \ln(x)}{x^2} \\ &= \frac{x^2 e^{x-1} - (1 - \ln(x))}{x^2} \\ f'(x) &= \frac{h(x) - g(x)}{x^2} \end{aligned}$$

Donc : pour tout x de $]0, +\infty[$: $f'(x) = \frac{h(x) - g(x)}{x^2}$

b) Dresser le tableau de variations de f sur $]0, +\infty[$

D'après la partie I :

$$\begin{cases} f'(x) < 0 & \text{sur }]0, 1[, \\ f'(1) = 0, \\ f'(x) > 0 & \text{sur }]1, +\infty[. \end{cases}$$

Donc f est décroissante sur $]0, 1]$ puis croissante sur $[1, +\infty[$.

$$\text{Or : } f(1) = e^{1-1} - \frac{\ln 1}{1} = e^0 = 1$$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		0	
	-	+	
f	$+\infty$	1	$+\infty$

- c) Dédudisons que pour tout x de $]0, +\infty[$, $e^{x-1} \geq 1 + \frac{\ln x}{x}$
 D'après le tableau de variations de f , la valeur minimale de f est 1.

Comme $f(x) \geq f(1) = 1$

Alors $e^{x-1} - \frac{\ln x}{x} \geq 1$.

Donc : $e^{x-1} \geq 1 + \frac{\ln x}{x}$

- 3 - Montrons que l'équation $f(x) = x$ admet une solution α tel que :

$$\frac{3}{2} < \alpha < 2 \quad (\text{On donne } f(2) \approx 2,37 \text{ et } f\left(\frac{3}{2}\right) \approx 1,38)$$

Soit w une fonction définie sur $\left[\frac{3}{2}; 2\right]$ par : $w(x) = f(x) - x$

i) w est continue sur $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$. ii) Or : $f\left(\frac{3}{2}\right) \approx 1,38$, donc $w\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{3}{2} < 0$

et $f(2) \approx 2,37$, donc : $f(2) - 2 > 0$.

D'après théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = x$ admet une solution α telle que : $\frac{3}{2} < \alpha < 2$.

- 4 - Soit φ la restriction de la fonction f sur l'intervalle $[1, +\infty[$

- a) Montrons que φ admet une fonction réciproque φ^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.

(L'expression $\varphi^{-1}(x)$ n'est pas demandée.)

Comme f est continue sur $[1, +\infty[$, alors φ est continue sur $[1, +\infty[$

Et f est strictement croissante sur $[1, +\infty[$, alors φ est strictement croissante sur $[1, +\infty[$

Donc φ admet une fonction réciproque φ^{-1}

φ^{-1} définie sur un intervalle $J = \varphi([1, +\infty[) = f([1, +\infty[)$.

Or : $\varphi(1) = f(1) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Donc : $J = [1, +\infty[$.

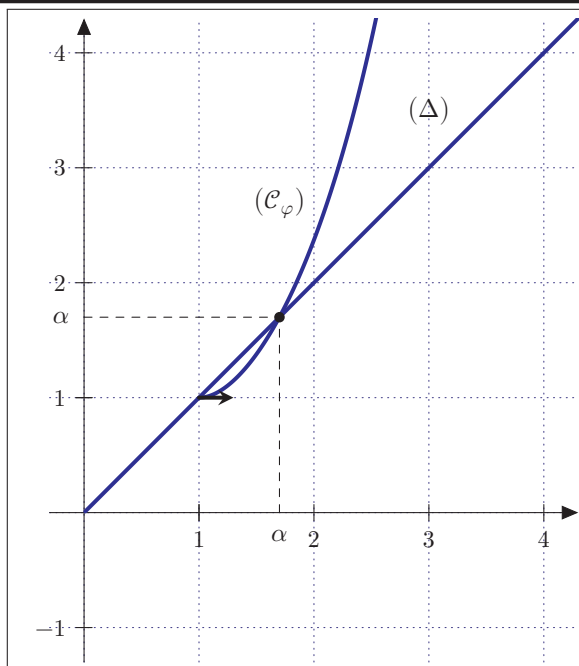
- b) Justifions que la fonction φ^{-1} est strictement croissante sur l'intervalle J

Comme la fonction f est strictement croissante sur $[1, +\infty[$

Alors la fonction φ est strictement croissante sur $[1, +\infty[$ et sa fonction réciproque φ^{-1} est également strictement croissante sur J .

Finalement la fonction φ^{-1} est strictement croissante sur l'intervalle J

- 5 - Le graphique ci-dessous représente la courbe $(\mathcal{C}_\varphi)$ de la fonction φ et la droite (Δ) d'équation $y = x$ dans un repère orthonormé.



0.5 pt

- a) Justifions graphiquement que pour tout x de $[1, \alpha]$: $\varphi(x) \leq x$

Graphiquement, sur $[1, \alpha]$, la courbe $(\mathcal{C}_\varphi)$ est située sous la droite (Δ) d'équation $y = x$.

Donc : pour tout x de $[1, \alpha]$: $\varphi(x) \leq x$

0.5 pt

- b) Déduisons que pour tout x de $[1, \alpha]$: $\varphi^{-1}(x) \geq x$

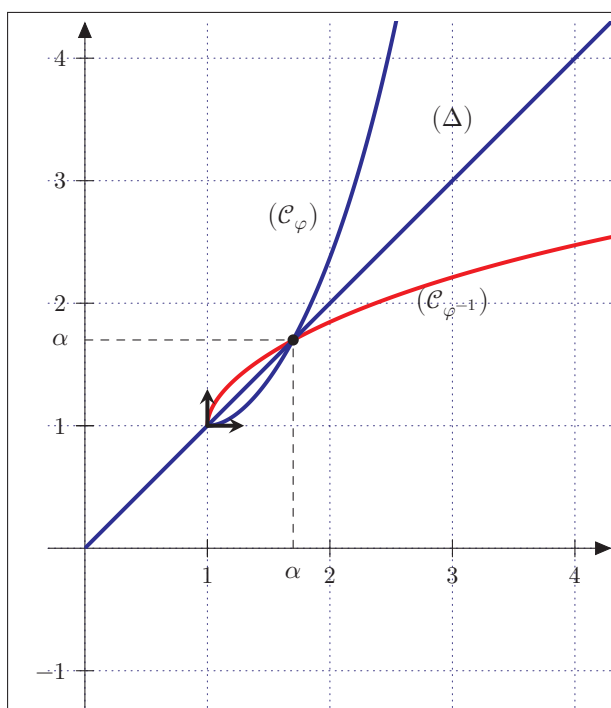
On a pour tout x de $[1, \alpha]$: $\varphi(x) \leq x$

Alors pour tout x de $[1, \alpha]$: $x \leq \varphi(x)$; (Car φ est strictement croissante sur $[1, \alpha]$)

Donc pour tout x de $[1, \alpha]$: $\varphi^{-1}(x) \geq x$

0.5 pt

- c) Reproduisons la courbe $(\mathcal{C}_\varphi)$ et traçons la courbe $(\mathcal{C}_{\varphi^{-1}})$ de la fonction φ^{-1} dans un même repère orthonormé.



Partie III

Soit la suite numérique (u_n) définie par $u_0 \in]1, \alpha[$ et $u_{n+1} = \varphi^{-1}(u_n)$, pour tout n de $\mathbb{N}$.

1 - Montrons par récurrence que $1 < u_n < \alpha$, pour tout entier naturel n .

Initialisation :

i) Pour $n = 0$ on a $u_0 \in]1, \alpha[$.

Donc la propriété est vraie au rang 0.

ii) Supposons : que $1 < u_n < \alpha$, pour tout n fixé de $\mathbb{N}$ et montrons que : $1 < u_{n+1} < \alpha$

Comme : $u_{n+1} = \varphi^{-1}(u_n)$

Or : $\varphi^{-1}(x) \geq x$ sur $[1, \alpha]$

Alors $u_{n+1} \geq u_n > 1$. ; (Car $u_n \in]1, \alpha[$)

Donc $u_{n+1} = \varphi^{-1}(u_n) < \varphi^{-1}(\alpha)$.

Or : $\varphi(\alpha) = \alpha \Rightarrow \varphi^{-1}(\alpha) = \alpha$.

Donc : $1 < u_{n+1} < \alpha$. iii) D'après principe de raisonnement par récurrence on a

$1 < u_n < \alpha$, pour tout entier naturel n

2 - Montrons que la suite (u_n) est croissante.

D'après question 5 – b **Partie II**

Pour tout n : $\varphi^{-1}(u_n) \geq u_n \Leftrightarrow u_{n+1} \geq u_n \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n \geq 0$

Donc la suite (u_n) est croissante.

3 - Déduisons que la suite (u_n) est convergente et déterminons sa limite.

La suite (u_n) est croissante et majorée par α .

Donc la suite (u_n) est convergente .

déterminons $\lim u_n$

On a :

► $u_{n+1} = \varphi^{-1}(u_n)$, pour tout n de $\mathbb{N}$.

► φ^{-1} est continue sur $]1, \alpha[$

► $\varphi^{-1}([1, \alpha[) =]1, \alpha[\subset]1, \alpha[$

► $1 < u_n < \alpha$, pour tout entier naturel n

► (u_n) est convergente vers l la solution de l'équation $\varphi^{-1}(x) = x$

D'après la courbe $\varphi^{-1}(x) = x \Leftrightarrow x = \alpha$; ou $x = 1$

Puisque (u_n) est croissante

Alors $\lim u_n = \alpha$

FIN