

الصفحة	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا الدورة العادية 2025 Page 1/33 -الموضوع-		المملكة المغربية وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة المركز الوطني للامتحانات المدرسية وتقييم التعلّيمات	
1				
5				
Y**				
▽	LLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLL		NS - 24F	

4h	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (خيار فرنسية)	الشعبة المسلك

كما وعدتكم جائزة لمن حصل على 20 في الامتحان الوطني لتلاميذتي عن قرب
و أيضا عن بعد

CONSIGNES :

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
- L'épreuve comporte quatre exercices indépendants.
- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.
- L'EXERCICE1 se rapporte à l'analyse(10 pts)
- L'EXERCICE2 se rapporte aux nombres complexes.....(3.5 pts)
- L'EXERCICE3 se rapporte à l'arithmétique(3 pts)
- L'EXERCICE4 se rapporte aux structures algébriques.....(3.5 pts)

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé

Pour tous vos renseignements et commentaires, veuillez me contacter via....

Nr WhatsApp : +212661969668

Email : bouazzaloukilia@gmail.com

**EXERCICE1 : (10 points)**

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{e^x}{e^{2x} + e}$

et soit (Γ) sa courbe représentative dans un repère **orthogonal** $(O; \vec{i}, \vec{j})$

Partie I :

- 0.25 1- a) Montrer que: $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f(1-x) = f(x)$
- 0.25 b) Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
- 0.5 c) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ puis en déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- 0.5 d) Interpréter graphiquement les deux résultats obtenus.

- 0.5 2- a) Montrer que: $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = f(x) \frac{1 - e^{2x-1}}{1 + e^{2x-1}}$

b) Donner les variations de f puis en déduire que :

1 $(\forall x \in \mathbb{R}) ; 0 < f(x) < \frac{1}{2}$

- 0.5 3- Représenter graphiquement la courbe (Γ) .

(On prendra $\|\vec{i}\| = 1cm$, $\|\vec{j}\| = 2cm$ et $\frac{1}{2\sqrt{e}} \cong 0.30$ et $\frac{1}{1+e} \cong 0.27$)

- 0.5 4- a) Montrer que: $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx$

- 0.25 b) En déduire que $\int_0^1 f(x) dx = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx$

- 5- a) En effectuant le changement de variables : $t = e^x$, montrer que :

0.25 $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{dt}{t^2 + e}$

- 0.5 b) Montrer que : $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{e}} \left(\arctan(\sqrt{e}) - \frac{\pi}{4} \right)$

- 0.25 c) En déduire l'aire, en cm^2 , du domaine plan délimité par (Γ) , les droites d'équations respectives : $x = 0$, $x = 1$ et $y = 0$

Partie II :

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 \in \left] 0; \frac{1}{2} \right[$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = f(u_n)$

- 0.5 1- En utilisant le résultat de la question I.2-a), montrer que :

$(\forall x \in \mathbb{R}) ; |f'(x)| \leq f(x)$

- 0.5 2- a) Montrer que : $\left(\forall x \in \left[0; \frac{1}{2} \right] \right) ; 0 \leq f'(x) < \frac{1}{2}$

- 0.25 b) Montrer que la fonction $g: x \mapsto g(x) = f(x) - x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$
- 0.5 c) En déduire qu'il existe un unique réel $\alpha \in \left]0; \frac{1}{2}\right[$ tel que : $f(\alpha) = \alpha$
- 0.5 3- a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < u_n < \frac{1}{2}$
- 0.5 b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$
- 0.5 c) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$
- 0.25 d) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α

Partie III :

On considère la suite numérique $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; S_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{k}{e^n + e^{\frac{n-k}{n}}}$$

0.25 1-a) Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; S_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{k}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$

0.5 b) Montrer que : $\int_0^1 x f(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx$

(On pourra effectuer le changement de variables : $t = 1 - x$)

0.5 2- Montrer que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

EXERCICE2 : (3.5 points)

Soit $\alpha \in [0; 2\pi[$

On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation (E_α) d'inconnue z :

$$(E_\alpha) : z^2 - 2^\alpha e^{i\alpha} (1 + 2i)z + i 2^{2\alpha+1} e^{i2\alpha} = 0$$

Partie I :

0.25 1- a) Vérifier que le discriminant de l'équation (E_α) est : $\Delta_\alpha = \left(2^\alpha e^{i\alpha} (1 - 2i)\right)^2$

0.5 b) En déduire les deux solutions a et b de l'équation (E_α) avec $|a| < |b|$

0.25 2- Vérifier que $\frac{b}{a}$ est un imaginaire pur.

**Partie II :**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On note par $M(z)$ le point d'affixe le nombre complexe z

On pose $\frac{b}{a} = \lambda i$ avec $\lambda = \text{Im}\left(\frac{b}{a}\right)$

1- On considère les points $A(a)$, $B(b)$ et $H(h)$ avec $\frac{1}{h} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

0.5 a) Montrer que : $\frac{h}{b-a} = -\left(\frac{\lambda}{\lambda^2+1}\right)i$ puis en déduire que les droites (OH) et (AB) sont perpendiculaires.

0.5 b) Montrer que : $\frac{h-a}{b-a} = \frac{1}{\lambda^2+1}$ puis en déduire que les points H, A et B sont alignés.

2- Soient $I(m)$ le milieu du segment $[OH]$ et $J(n)$ le milieu du segment $[HB]$

0.5 a) Montrer que : $\frac{n}{m-a} = -\lambda i$

0.5 b) En déduire que les droites (OJ) et (AI) sont perpendiculaires et que $OJ = |\lambda| AI$

0.25 c) Soit K le point d'intersection des droites (OJ) et (AI)

Montrer que les points K, I, H et J sont cocycliques.

0.25 d) Montrer que les droites (IJ) et (OA) sont perpendiculaires.

EXERCICE3 : (3 points)

Soient p un nombre premier impair et a un entier premier avec p

0.5 1- Montrer que $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$ ou $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}$

2- On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $ax^2 \equiv 1 \pmod{p}$. Soit x_0 une solution de cette équation.

0.5 a) Montrer que : $x_0^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

0.25 b) En déduire que : $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$

3- Soit n un entier naturel non nul.

0.5 a) Montrer que si p divise $2^{2n+1} - 1$ alors $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$

0.5 b) En déduire que l'équation $(E) : 11x + (2^{2n+1} - 1)y = 1$ admet au moins une solution dans $\mathbb{Z}^2$

4- On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(F) : x^2 + 5x + 2 \equiv 0 \pmod{11}$

0.25 a) Montrer que : $(F) \Leftrightarrow 2(2x+5)^2 \equiv 1 \pmod{11}$

0.5 b) En déduire que l'équation (F) n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}$

**EXERCICE4 : (3.5 points)**

On rappelle que $(M_3(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire et non commutatif de zéro la

matrice $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et d'unité la matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et que $(M_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est

un espace vectoriel réel.

Soient la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ et l'ensemble $E = \{M(x) = I + xA / x \in \mathbb{R}\}$

0.25 1- a) Vérifier que : $A^2 = -2A$

0.25 b) En déduire que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; M(x) \times M(y) = M(x + y - 2xy)$

0.25 2- a) Calculer $M\left(\frac{1}{2}\right) \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

0.25 b) En déduire que la matrice $M\left(\frac{1}{2}\right)$ n'est pas inversible dans $(M_3(\mathbb{R}), \times)$

0.25 3- Montrer que : $E - \left\{M\left(\frac{1}{2}\right)\right\}$ est stable pour la multiplication dans $M_3(\mathbb{R})$

(on pourra utiliser l'identité : $\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right) = \frac{-1}{2}\left(x + y - 2xy - \frac{1}{2}\right)$)

1 4- Montrer que : $\left(E - \left\{M\left(\frac{1}{2}\right)\right\}, \times\right)$ est un groupe commutatif.

5- On munit E de la loi de composition interne T définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; M(x) T M(y) = M\left(x + y - \frac{1}{2}\right)$$

et on considère l'application φ définie de $\mathbb{R}$ vers E par : $\forall x \in \mathbb{R} ; \varphi(x) = M\left(\frac{1-x}{2}\right)$

0.5 a) Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ vers (E, T) et que $\varphi(\mathbb{R}) = E$

0.25 b) En déduire que (E, T) est un groupe commutatif.

0.5 6- Montrer que $(E, T, \times)$ est un corps commutatif.

FIN

Exercice 1 (Analyse)

Soit $f(x) = \frac{e^x}{e^{2x} + e}$, $x \in \mathbb{R}$

Partie I

Rappel: Elements de symétrie d'une courbe

La droite (D) d'équation $x = a$ est un axe de symétrie de (C_f)

$$\text{ssi } \begin{cases} \forall x \in D_f & 2a - x \in D_f \\ \forall x \in D_f & f(2a - x) = f(x) \end{cases}$$

⑥ Le point $\Omega(a, b)$ est un centre de symétrie de (C_f)

$$\text{ssi } \begin{cases} \forall x \in D_f & 2a - x \in D_f \\ \forall x \in D_f & f(2a - x) = 2b - f(x) \end{cases}$$

Résultat: Domaine d'étude: D_E

$$D_E = D_f \cap [a, +\infty[$$

① Soit $x \in \mathbb{R}$ $f(1-x) = \frac{e^{1-x}}{e^{2(1-x)} + e} = \frac{\frac{1}{e^{x-1}}}{\frac{1}{e^{2(x-1)}} + e} = \frac{\frac{1}{e^{x-1}}}{\frac{1 + e^{2x-1}}{e^{2(x-1)}}}$

$$= \frac{1}{e^{x-1}} \cdot \frac{e^{2(x-1)}}{1 + e^{2x-1}} = \frac{e^{x-1}}{e^{-1}(e + e^{2x})}$$

$$= \frac{e^x \cdot e^{-1}}{e^{-1}(e^{2x} + e)} = \frac{e^x}{e^{2x} + e} = f(x)$$

② on a $\forall x \in \mathbb{R} \quad 1-x = 2\left(\frac{1}{2}\right) - x$ et $1-x \in \mathbb{R}$

et $f(1-x) = f(x) \Rightarrow f\left(2\left(\frac{1}{2}\right) - x\right) = f(x)$

Donc la droite (D) d'équation $x = \frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de (Γ) .

③ on a $\lim_{n \rightarrow -\infty} (e^{2n}) = \lim_{n \rightarrow -\infty} (e^n) = 0$

Donc $\lim_{n \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

Déduction

on pose $x = 1-t \Leftrightarrow t = 1-x$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = \lim_{t \rightarrow -\infty} (1-t)$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow -\infty} f(1-t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = 0$

④ on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ Donc la courbe (Γ) admet une asymptote horizontale d'équation $y=0$ (l'axe des abscisses) au voisinage de $+\infty$

de plus $\lim_{n \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, donc la courbe (Γ) admet l'axe des abscisses (Ox), $y=0$ comme asymptote horizontale au vers de $-\infty$

⑤ (a) soit $x \in \mathbb{R}$

on a $n \mapsto e^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

et $n \mapsto e^{2n} + e$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^{2n} + e \neq 0$

Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) &= \left(\frac{e^x}{e^{2n} + e} \right)' = \frac{e^x (e^{2n} + e) - 2e^{2n} \cdot e^n}{(e^{2n} + e)^2} \\ &= \frac{e^x}{e^{2n} + e} \left(\frac{e^{2n} + e - 2e^{2n}}{e^{2n} + e} \right) = f(x) \cdot \frac{e - e^{2n}}{e^{2n} + e} \end{aligned}$$

$$= f(x) \cdot \frac{e(1 - e^{2x-1})}{e(1 + e^{2x-1})} = f(x) \cdot \frac{1 - e^{2x-1}}{1 + e^{2x-1}}$$

Remarque. Il suffit de signaler que f est seulement que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ sans le démontrer

$$\textcircled{b} \text{ on } \forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = f(x) \cdot \frac{1 - e^{2x-1}}{1 + e^{2x-1}} = \frac{f(x)}{1 + e^{2x-1}} \cdot (1 - e^{2x-1})$$

$$\text{comme } \forall x \in \mathbb{R} \quad \frac{f(x)}{1 + e^{2x-1}} > 0 \quad (\text{car } \forall x \in \mathbb{R} \quad e^x > 0)$$

alors le signe de $f'(x)$ est celui de $1 - e^{2x-1}$ sur $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \text{on pose } 1 - e^{2x-1} = 0 &\Leftrightarrow 1 = \frac{e^{2x}}{e} \\ &\Leftrightarrow e^{2x} = e \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc si } x > \frac{1}{2} &\Rightarrow 2x > 1 \\ &\Rightarrow e^{2x} > e \\ &\Rightarrow 1 - e^{2x-1} < 0 \\ &\Rightarrow f'(x) < 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow f$ est strictement décroissante sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$

$$\begin{aligned} \text{si } x \leq \frac{1}{2} &\Rightarrow 2x \leq 1 \\ &\Rightarrow 1 - e^{2x-1} \geq 0 \\ &\Rightarrow f'(x) \geq 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow f$ est strictement croissante sur $] -\infty, \frac{1}{2}]$

Deduction:

Méthode 1: on a f est continue et strictement croissante sur $]-\infty, \frac{1}{2}]$

$$\text{donc } f\left(]-\infty, \frac{1}{2}]\right) = \left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f\left(\frac{1}{2}\right) \right] = \left] 0, f\left(\frac{1}{2}\right) \right]$$

et de même f est continue et strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$

$$\text{donc } f\left(\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[\right) = \left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f\left(\frac{1}{2}\right) \right] = \left] 0, f\left(\frac{1}{2}\right) \right]$$

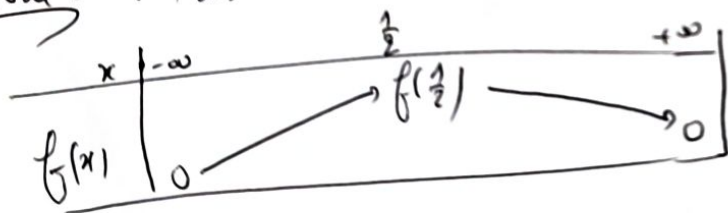
$$\text{Donc } \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \in \left] 0, f\left(\frac{1}{2}\right) \right]$$

$$\text{et comme } f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e^{\frac{1}{2}}}{e + e} = \frac{e^{\frac{1}{2}}}{2e} = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}} < \frac{1}{2} \quad \left(\text{car } e^{-\frac{1}{2}} < 1 \right)$$

$$\text{D'où } \forall x \in \mathbb{R} \quad 0 < f(x) \leq f\left(\frac{1}{2}\right) < \frac{1}{2}$$

$$\text{conclusion } \forall x \in \mathbb{R} \quad 0 < f(x) < \frac{1}{2}$$

Méthode 2: Tableau de variation



D'après le tableau de variation (f est continue sur $\mathbb{R}$) on a:

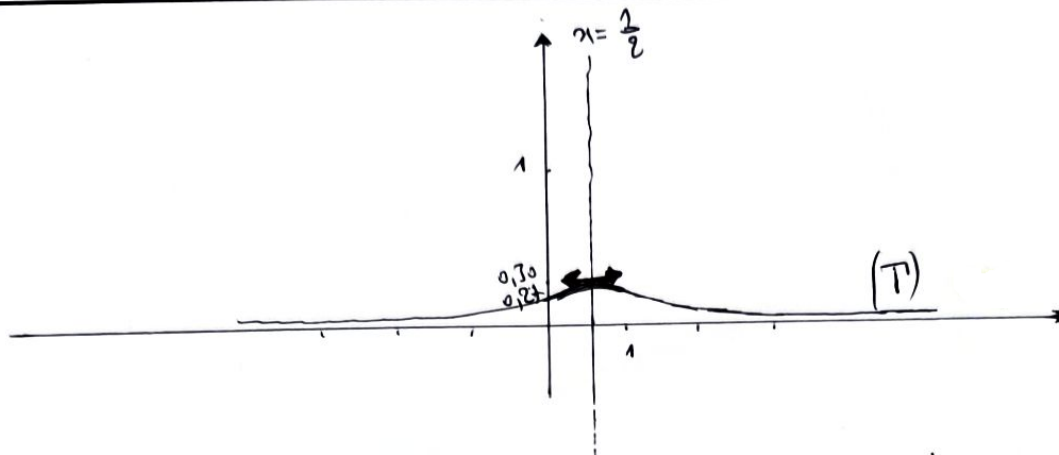
$$f(\mathbb{R}) = \left] 0, f\left(\frac{1}{2}\right) \right]$$

$$\text{Donc } \forall x \in \mathbb{R} \quad 0 < f(x) < f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\text{et comme } f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}} \quad \left(-\frac{1}{2} < 0 \Rightarrow e^{-\frac{1}{2}} < e^0 \text{ car } x \mapsto e^x \text{ est } \nearrow \text{ sur } \mathbb{R} \right)$$

$$\text{Donc } \forall x \in \mathbb{R} \quad 0 < f(x) < \frac{1}{2}$$

③



④ a) on pose $x = 1-t \Leftrightarrow t = 1-x$ et $dx = -dt$
si $x=0$ alors $t=1$, si $x=\frac{1}{2}$ alors $t=\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \text{donc } \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx &= \int_1^{\frac{1}{2}} f(1-t) (-dt) = \int_{\frac{1}{2}}^1 f(1-t) dt = \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t) dt \quad (\text{car } f(1-t) = f(t), t \in \mathbb{R}) \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^x f(x) dx. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int_0^1 f(x) dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx \quad (\text{d'après ce qui précède}) \\ &= 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx. \end{aligned}$$

5) a) on pose $t = e^x \Rightarrow \ln t = x$ et $dx = \frac{1}{t} dt$
 si $x = 0$ alors $t = 1$ si $x = \frac{1}{2}$ alors $t = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

$$\text{donc } \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{e^x}{e^{2x} + e} dx$$

$$= \int_1^{\sqrt{e}} \frac{t}{t^2 + e} \cdot \frac{1}{t} dt = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{t^2 + e} dt$$

Rappel

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx \begin{cases} \Delta = b^2 - 4ac < 0 & \left[\operatorname{Arctan}(P(x)) \right]_{\alpha}^{\beta} \\ \Delta = b^2 - 4ac > 0 & \left[\ln |P(x)| \right]_{\alpha}^{\beta} \end{cases}$$

$$\text{on a } \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{dt}{t^2 + e} = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{dt}{e \left(\left(\frac{t}{\sqrt{e}} \right)^2 + 1 \right)}$$

$$= \frac{\sqrt{e}}{e} \int_1^{\sqrt{e}} \frac{\frac{1}{\sqrt{e}}}{\left(\frac{t}{\sqrt{e}} \right)^2 + 1} dt = \frac{1}{\sqrt{e}} \int_1^{\sqrt{e}} \frac{\left(\frac{t}{\sqrt{e}} \right)'}{\left(\frac{t}{\sqrt{e}} \right)^2 + 1} dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{e}} \left[\operatorname{Arctan} \left(\frac{t}{\sqrt{e}} \right) \right]_1^{\sqrt{e}} = \frac{1}{\sqrt{e}} \left(\operatorname{Arctan}(1) - \operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{\sqrt{e}} \right) \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{e}} \left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{\sqrt{e}} \right) \right)$$

et comme $\operatorname{Arctan} \sqrt{e} + \operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{\sqrt{e}} \right) = \frac{\pi}{2}$ (car $\sqrt{e} > 0$)
 alors $-\operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{\sqrt{e}} \right) = \operatorname{Arctan} \sqrt{e} - \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} \text{Don } \int_0^{\frac{1}{\sqrt{e}}} f(x) dx &= \frac{1}{\sqrt{e}} \left(\frac{\pi}{4} + \operatorname{Arctan} \sqrt{e} - \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{e}} \left(\operatorname{Arctan} \sqrt{e} - \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

Rappel

$$\forall x > 0 \quad \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \forall x < 0 \quad \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$$

$$c) \quad A = \left(\int_0^1 |f(x)| dx \right) \cdot \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$$

$$\begin{aligned} \text{et comme } \int_0^1 |f(x)| dx &= \int_0^1 f(x) dx \quad (\text{car } \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) > 0) \\ &= 2 \int_0^1 f(x) dx = 2 \int_1^{\sqrt{e}} \frac{dt}{t^2 + e} = \frac{2}{\sqrt{e}} \left(\operatorname{Arctan} \sqrt{e} - \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

$$\text{et } \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| = 1 \text{ cm} \cdot 2 \text{ cm} = 2 \text{ cm}^2$$

$$\begin{aligned} \text{alors } A &= \left(\int_0^1 |f(x)| dx \right) \cdot \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \\ &= \left(\frac{2}{\sqrt{e}} \left(\operatorname{Arctan} \sqrt{e} - \frac{\pi}{4} \right) \right) \cdot 2 \text{ cm}^2 \\ &= \frac{4}{e} \left(\operatorname{Arctan} \sqrt{e} - \frac{\pi}{4} \right) \cdot \text{cm}^2. \end{aligned}$$

Pour tous vos renseignements et commentaires, veuillez me contacter via....

Nr WhatsApp : +212661969668

Email : bouazzaloukilia@gmail.com

Partie II

Soit $u_0 \in]0, \frac{1}{2}[$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n)$

1) D'après la question I.2.a) on a $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = f(x) \cdot \frac{1 - e^{2x-1}}{1 + e^{2x-1}}$

$$\text{donc } \forall x \in \mathbb{R} \quad |f'(x)| = \left| f(x) \cdot \frac{1 - e^{2x-1}}{1 + e^{2x-1}} \right| = f(x) \cdot \left| \frac{1 - e^{2x-1}}{1 + e^{2x-1}} \right|$$

(car $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) > 0$)

de plus $\forall x \in \mathbb{R} \quad |1 - e^{2x-1}| < |1 + e^{2x-1}| \leq 1 + e^{2x-1}$

$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad \left| \frac{1 - e^{2x-1}}{1 + e^{2x-1}} \right| < \frac{1 + e^{2x-1}}{1 + e^{2x-1}}$$

$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad \left| \frac{1 - e^{2x-1}}{1 + e^{2x-1}} \right| \leq 1$$

d'où $\forall x \in \mathbb{R} \quad |f'(x)| \leq f(x)$

Autre méthode, on peut montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \quad -1 \leq \frac{1 - e^{2x-1}}{1 + e^{2x-1}} \leq 1$
en utilisant la différence double.

A retenir $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad |x \pm y| \leq |x| + |y|$

2) soit $x \in [0, \frac{1}{2}[$

Méthode 1, on a d'après la question précédente $\forall x \in \mathbb{R} \quad |f'(x)| \leq f(x)$

et d'après la question I.2.b) $\forall x \in \mathbb{R} \quad 0 < f(x) < \frac{1}{2}$

donc $\forall x \in [0, \frac{1}{2}[\quad |f'(x)| \leq f(x) < \frac{1}{2}$

de plus si $0 \leq x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2x-1}{1 - e^{2x-1}} > 0$

$$\Rightarrow f'(x) \geq 0$$

$$\Rightarrow |f'(x)| = f'(x)$$

$$\text{D'on } \forall x \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \quad 0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$$

Méthode 2 on $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = f(x) \cdot \frac{1 - e^{2n-1}}{1 + e^{2n-1}}$

$$\text{et pour } x \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \text{ on a } 1 - e^{2n-1} \geq 0$$

$$\text{de plus } \forall x \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \quad 0 < f(x) < \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad 1 + e^{2n-1} > 0$$

$$\text{Donc } \forall x \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \quad f'(x) \geq 0$$

$$\text{et } \frac{1 - e^{2n-1}}{1 + e^{2n-1}} - 1 = \frac{1 - e^{2n-1} - 1 - e^{2n-1}}{1 + e^{2n-1}} = \frac{-2e^{2n-1}}{1 + e^{2n-1}} < 0$$

$$\text{donc } \forall x \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \quad 0 \leq \frac{1 - e^{2n-1}}{1 + e^{2n-1}} < 1$$

$$\text{D'on } \forall x \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \quad 0 \leq f(x) \cdot \frac{1 - e^{2n-1}}{1 + e^{2n-1}} < 1$$

$$\text{Rc } \forall x \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \quad 0 \leq f'(x) < \frac{1}{2}$$

⑥ La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ (comme somme de deux fcts) dérivables sur $\mathbb{R}$

$$\text{et on a } \forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) = f'(x) - 1$$

$$\text{et comme } \forall x \in \mathbb{R} \quad 1 - e^{2n-1} < 1 \quad \text{et} \quad f(x) \cdot \frac{1}{1 + e^{2n-1}} > 0$$

$$\text{alors } \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \cdot \frac{1 - e^{2n-1}}{1 + e^{2n-1}} < f(x) \cdot \frac{1}{1 + e^{2n-1}} < \frac{1}{2} \times 1 < 1$$

(car $f(x) < \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{1 + e^{2n-1}} < 1$)
(pour tout $n \in \mathbb{R}$)

D'où $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) < 1$

car $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 1 < 0$

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) < 0$

D'où g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

② La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$ (comme somme de deux fcts continues)

donc g est continue sur $]0, \frac{1}{2}[$

de plus g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ donc elle est de

même strictement décroissante sur $]0, \frac{1}{2}[$

donc g réalise une fonction bijective définie sur $J = g(]0, \frac{1}{2}[)$

$$=]\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} g(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)[$$

$$=]g(\frac{1}{2}), g(0)[$$

$$=]f(\frac{1}{2}) - \frac{1}{2}, f(0)[$$

et comme $\forall x \in \mathbb{R} \quad 0 < f(x) < \frac{1}{2}$ alors $f(\frac{1}{2}) - \frac{1}{2} < 0$ et $f(0) > 0$

D'où $0 \in J$ alors $\exists ! \alpha \in]0, \frac{1}{2}[\quad g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow f(\alpha) - \alpha = 0$

Donc il existe un unique réel $\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$ tel que $f(\alpha) = \alpha$

Autre méthode. T.V.I + Monotonie (T.V.I: Existence, Monotonie: Unicité)

③ a) on a bien $u_0 \in]0, \frac{1}{2}[$ et bien vérifiée

Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $0 < u_n < \frac{1}{2}$ et $\forall n \quad 0 < u_{n+1} < \frac{1}{2}$

On a d'après la question 1.2 b) $\forall x \in \mathbb{R} \quad 0 < f(x) < \frac{1}{2}$

et comme $u_n \in]0, \frac{1}{2}[\subset \mathbb{R}$ alors $0 < f(u_n) < \frac{1}{2}$ car $0 < u_{n+1} < \frac{1}{2}$

Donc d'après le principe de récurrence $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < u_n < \frac{1}{2}$

⑥ Méthode 1 :

f est continue sur $[0, \frac{1}{2}]$ et dérivable sur $]0, \frac{1}{2}[$

et d'après la question II. 2) a) $\forall x \in]0, \frac{1}{2}[\quad 0 \leq f'(x) < \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \forall x \in (0, \frac{1}{2}) \quad |f'(x)| < \frac{1}{2}$$

et comme $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < U_n < \frac{1}{2}$ et on a $\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$

donc d'après le théorème de l'inégalité des accroissements finis

$$\forall x, y \in]0, \frac{1}{2}[\quad |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2} |x - y|$$

D'où
$$|f(U_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2} |U_n - \alpha|$$

$$\Rightarrow |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_n - \alpha| \quad \left(\begin{array}{l} \text{car } U_{n+1} = f(U_n) \\ f(\alpha) = \alpha \end{array} \right)$$

Méthode 2

on a f est dérivable sur $]0, \frac{1}{2}[$ et $\alpha, U_n \in]0, \frac{1}{2}[$

donc f est continue sur l'intervalle fermé d'extrémités α et U_n

et f est dérivable sur l'intervalle ouvert d'extrémités α et U_n

d'où d'après T. A. F il existe un réel c compris entre α et U_n

$$\text{d'où } |f(U_n) - f(\alpha)| = |f'(c)| (U_n - \alpha)$$

$$\Rightarrow |U_{n+1} - \alpha| \leq |f'(c)| \cdot |U_n - \alpha|$$

et comme $\forall x \in]0, \frac{1}{2}[\quad 0 \leq f'(x) < \frac{1}{2}$ donc $|f'(c)| \leq \frac{1}{2}$

D'où
$$|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_n - \alpha| \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

c) Pour $n=0$ on a $U_0 \in]0, \frac{1}{2}[$ et de plus $\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$
 et comme $|U_0 - \alpha| = d(U_0, \alpha) \leq \text{Amplitude de l'intervalle }]0, \frac{1}{2}[$

alors $|U_0 - \alpha| \leq \frac{1}{2}$ est vrai

Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ et montrons que

$$|U_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$$

$$\text{on a } |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \Rightarrow \frac{1}{2} |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$$

et comme $\forall n \in \mathbb{N} \quad |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_n - \alpha|$ alors $|U_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$

Donc d'après le principe de récurrence $\forall n \in \mathbb{N} \quad |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

d) On a d'après ce qui précède $\forall n \in \mathbb{N} \quad |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

et comme $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$ (car $-1 < \frac{1}{2} < 1$)

$$\text{donc } \sum_{n=0}^{+\infty} (U_n) = \alpha$$



Rappel

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (q^n) = 0 \quad \text{si } -1 < q < 1$$

$$\text{si } \forall n, n_0 \quad |U_n - l| \leq V_n \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} V_n = 0$$

$$\text{alors } \sum_{n=0}^{+\infty} U_n = l$$

Partie III

Soit $n \in \mathbb{N}^+$

$$S_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n \frac{k}{e^{\frac{k}{n}} + e^{\frac{n-k}{n}}}$$

① a) Soit $n \in \mathbb{N}^+$

Méthode 1 :

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \cdot f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n k \cdot \frac{e^{\frac{k}{n}}}{e^{\frac{2k}{n}} + e}$$

$$= \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n \frac{k}{e^{-\frac{k}{n}} (e^{\frac{2k}{n}} + e)}$$

$$= \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n \frac{k}{e^{\frac{k}{n}} + e^{1-\frac{k}{n}}}$$

$$= \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n \frac{k}{e^{\frac{k}{n}} + e^{\frac{n-k}{n}}} = S_n$$

Méthode 2 :

$$S_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n \frac{k}{e^{\frac{k}{n}} + e^{\frac{n-k}{n}}}$$

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \cdot \frac{1}{e^{-\frac{k}{n}} (e^{\frac{2k}{n}} + e^{\frac{n-k}{n}})}$$

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \cdot \frac{e^{\frac{k}{n}}}{e^{\frac{2k}{n}} + e} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \cdot f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^+$ $S_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \cdot f\left(\frac{k}{n}\right)$

⑥ Rappel : Intégration par changement de variable

$$I = \int_a^b f(x) dx \quad \underline{x = g(t)} \quad \int_a^b f(g(t)) \cdot g'(t) dt$$

(A changer :)

- Les bornes
- x en fonction de t
- dx en fonction de dt

(b) on a $t = 1-x \Leftrightarrow x = 1-t$ et $dx = -dt$

si $x=0$ alors $t=1$, si $x=1$ alors $t=0$

$$\int_0^1 x \cdot f(x) dx = \int_1^0 (1-t) f(1-t) (-dt) = \int_0^1 (1-t) \cdot f(t) dt \quad (\text{car } f(1-t)=f(t))$$

$$= \int_0^1 f(t) dt - \int_0^1 t \cdot f(t) dt$$

$$\int_0^1 x \cdot f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 x \cdot f(x) dx \quad (\text{car } t \text{ est une variable muette})$$

donc $\int_0^1 x \cdot f(x) dx + \int_0^1 x \cdot f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx$

$$\Rightarrow 2 \int_0^1 x \cdot f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx$$

$$\Rightarrow \int_0^1 x \cdot f(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2} \left(2 \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx \right) \quad (\text{question I.4.b})$$

Penc $\int_0^1 x \cdot f(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx$

(2) on a d'après ce qui précède $S_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \cdot f\left(\frac{k}{n}\right)$ interval

$$= \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$= \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1-0}{n} \sum_{k=1}^n \left(0 + k \frac{1-0}{n}\right) f\left(0 + k \frac{1-0}{n}\right)$$

et comme la fonction $x \mapsto x \cdot f(x)$ est continue sur $[0,1]$
(comme somme de 2 fcts continues)

alors la suite $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \cdot f\left(\frac{k}{n}\right)$ est convergente et on a,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \cdot f\left(\frac{k}{n}\right) &= \int_0^1 x \cdot f(x) dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{e}}} f(x) dx \quad \left(\text{d'après la question précédente} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{e}} \left(\operatorname{Arctan} \sqrt{e} - \frac{\pi}{4} \right) \quad (\text{I.S.b}) \end{aligned}$$

de plus $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n(1+\frac{1}{n})} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1 \quad \left(\text{car } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \right)$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \cdot f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{e}} \left(\operatorname{Arctan} \sqrt{e} - \frac{\pi}{4} \right)$

D'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{\sqrt{e}} \left(\operatorname{Arctan} \sqrt{e} - \frac{\pi}{4} \right)$.

Rappel : Somme de Riemann

• si f est continue sur $[a, b]$ alors les deux suites :

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right) \quad \text{et} \quad T_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right)$$

sont convergentes et on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = \int_a^b f(x) dx$$

• si $a = 0$ et $b = 1$, on obtient $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$, $T_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$

dans ce cas $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = \int_0^1 f(x) dx$

Exercice 2 (Nombres complexes)

Soit $\alpha \in [0, 2\pi[$

$$(E_\alpha): z^2 - z^\alpha e^{i\alpha} (1+2i)z + i z^{2\alpha+1} e^{i2\alpha} = 0$$

Partie I

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \textcircled{a} \quad \Delta &= (-z^\alpha e^{i\alpha} (1+2i))^2 - 4i z^{2\alpha+1} e^{i2\alpha} \\ &= (z^\alpha e^{i\alpha})^2 (1+2i)^2 - 8i (z^\alpha e^{i\alpha})^2 \\ &= (z^\alpha e^{i\alpha})^2 (1 + 4i + (2i)^2 - 8i) \\ &= (z^\alpha e^{i\alpha})^2 (1 - 4i + (2i)^2) = (z^\alpha e^{i\alpha})^2 (1-2i)^2 \\ \text{Donc} \quad \Delta &= (z^\alpha e^{i\alpha} (1-2i))^2 \end{aligned}$$

② comme $\Delta \neq 0$ alors l'équation (E_α) admet deux solutions

$$z = \frac{z^\alpha e^{i\alpha} (1+2i) + z^\alpha e^{i\alpha} (1-2i)}{2} = \frac{z^\alpha e^{i\alpha} (1+2i + 1-2i)}{2}$$

$$= z^\alpha e^{i\alpha}$$

$$\text{ou } z = \frac{z^\alpha e^{i\alpha} (1+2i) - z^\alpha e^{i\alpha} (1-2i)}{2} = \frac{z^\alpha e^{i\alpha} (1+2i - 1+2i)}{2}$$

$$= z^\alpha e^{i\alpha} 2i = z^{\alpha+1} e^{i\alpha} i$$

$$\text{et comme } |z^\alpha e^{i\alpha}| = z^\alpha \text{ et } |z^{\alpha+1} e^{i\alpha} i| = z^{\alpha+1}$$

$$\text{et } z^\alpha < z^{\alpha+1} \text{ alors } a = z^\alpha e^{i\alpha} \text{ et } b = z^{\alpha+1} e^{i\alpha} i$$

$$\text{donc } S = \left\{ z^\alpha e^{i\alpha}, z^{\alpha+1} e^{i\alpha} i \right\}$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{b}{a} = \frac{2^{\alpha+1} \cdot e^{i\alpha} \cdot i}{2^{\alpha} \cdot e^{i\alpha}} = 2i \in i\mathbb{R}^*$$

donc $\frac{b}{a}$ est un imaginaire pur.

Partie II

on pose $\frac{b}{a} = \lambda i$ avec $\lambda = \text{Im}\left(\frac{b}{a}\right) = \text{Im}(2i) = 2$ donc $\frac{b}{a} = 2i$

$$\textcircled{1} \textcircled{a} \quad \text{ona} \quad \frac{1}{h} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \Rightarrow \frac{1}{h} = \frac{a+b}{a \cdot b}$$

$$\Rightarrow h = \frac{a \cdot b}{a+b}$$

$$\text{Donc} \quad \frac{h}{b-a} = \frac{\frac{a \cdot b}{a+b}}{b-a} = \frac{a \cdot b}{a+b} \cdot \frac{1}{b-a} = \frac{ab}{b^2 - a^2} = \frac{ab}{a^2 \left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right)}$$

$$= \frac{\frac{b}{a}}{\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 1} = \frac{\lambda i}{-\lambda^2 - 1} = - \frac{1}{\lambda^2 + 1} \cdot i$$

Autre méthode

$$\text{ona} \quad \frac{b-a}{h} = (b-a) \cdot \frac{1}{h} = (b-a) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = \frac{b}{a} + 1 - 1 - \frac{a}{b}$$

$$= \lambda i - \frac{1}{\lambda i} = \frac{-\lambda^2 - 1}{\lambda i} = - \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda i}$$

$$\text{donc} \quad \frac{h}{b-a} = - \frac{1}{\lambda^2 + 1} i$$

Dérivation

$$\text{ona} \quad \frac{h}{b-a} = - \left(\frac{1}{\lambda^2 + 1} \right) i \Rightarrow \frac{h-0}{b-a} = - \frac{2}{5} i \in i\mathbb{R}^*$$

$$\Rightarrow \arg\left(\frac{h-0}{b-a}\right) = -\frac{\pi}{2} \quad (2\pi)$$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OH}) = -\frac{\pi}{2} \quad (2\pi)$$

$$\Rightarrow (OH) \perp (AB)$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{b} \quad \frac{h-a}{b-a} &= \frac{\frac{a \cdot b}{a+b} - a}{b-a} = \frac{ab - a^2 - ab}{b^2 - a^2} = \frac{-a^2}{b^2 - a^2} = \frac{-1}{\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 1} = \frac{-1}{(\lambda')^2 - 1} \\
 &= \frac{-1}{-\lambda'^2 - 1} = \frac{1}{\lambda'^2 + 1}
 \end{aligned}$$

Deduction

$$\text{on a } \frac{h-a}{b-a} = \frac{1}{\lambda'^2 + 1} = \frac{1}{5} \in \mathbb{R}^*$$

donc les points H, A et B sont alignés.

② On a $I(m)$ le milieu du segment (OH) et $J(n)$ le milieu du (HB)

$$\text{donc } m = \frac{h}{2} \quad \text{et } n = \frac{h+b}{2}$$

$$\text{Donc } \frac{n}{m-a} = \frac{\frac{h+b}{2}}{\frac{h}{2} - a} = \frac{h+b}{h-2a} = \frac{\frac{ab}{a+b} + b}{\frac{ab}{a+b} - 2a}$$

$$= \frac{ab + ab + b^2}{ab - 2ab - 2a^2} = - \frac{2ab + b^2}{ab + 2a^2}$$

$$= - \frac{a^2 \left(2 \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} \right)}{a^2 \left(\frac{b}{a} + 2 \right)} = - \frac{2\lambda' + (\lambda')^2}{\lambda' + 2}$$

$$= - \lambda' \left(\frac{2 + \lambda'}{\lambda' + 2} \right) = - \lambda'$$

③ on a d'après ce qui précède $\frac{n}{m-a} = -\lambda' \in i\mathbb{R}^*$

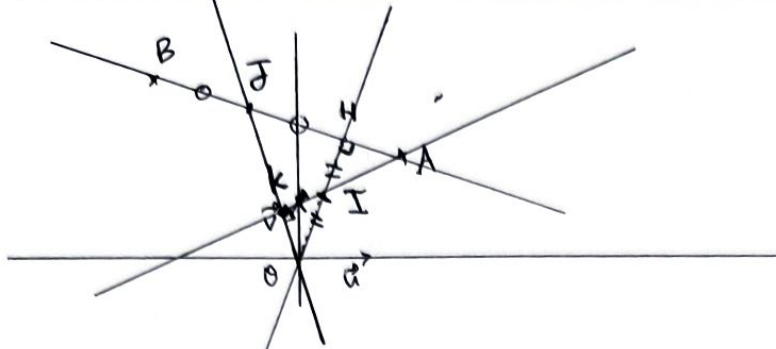
$$\text{donc } \frac{n-a}{m-a} \in i\mathbb{R}^*$$

$$\text{donc } (OJ) \perp (AI) \quad \text{et} \quad \left| \frac{n}{m-a} \right| = |-\lambda'| = |\lambda| \quad (\text{car } |-i|=1)$$

$$\text{Donc } (OJ) \perp (AI) \quad \text{et} \quad |n| = |\lambda| \cdot |m-a|$$

$$\Rightarrow OJ = |\lambda| \cdot AI$$

c)



on a les droites (OH) et (AB) sont perpendiculaires et les points H, A et B sont alignés et $I \in (OH)$ et $J \in (AB)$

donc $(IH) \perp (HJ)$ and $\frac{n-h}{m-h} \in i\mathbb{R}^*$

de plus $(OJ) \perp (AI)$ et k est le points d'intersection des droites (OJ) et (AI) donc $(kJ) \perp (kI)$ and $\frac{m-k}{n-k} \in i\mathbb{R}^* \quad (k(k))$

d'où $\frac{n-h}{m-h} \times \frac{m-k}{n-k} \in \mathbb{R}^*$

Donc les points k, I, H et J sont cocycliques.

$$\textcircled{d} \text{ on a } \frac{m-n}{a-0} = \frac{\frac{h}{2} - \frac{h+b}{2}}{a} = \frac{\frac{h}{2} - \frac{h}{2} - \frac{b}{2}}{a} = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{b}{a} = -\frac{1}{2} \lambda i$$

et comme $-\frac{1}{2} \lambda i \in i\mathbb{R}^*$ alors $\frac{m-n}{a-0} \in i\mathbb{R}^*$

donc (IJ) et (OA) sont perpendiculaires

A retenir si $\frac{a-b}{c-b} \in i\mathbb{R}^*$ alors $\arg\left(\frac{a-b}{c-b}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$

donc $(AB) \perp (BC)$

Exercice 3 (Arithmétique)

Soit p premier impair et $a \in \mathbb{N}$ tel que $a \wedge p = 1$

① on a p est premier et $a \wedge p = 1$.

donc d'après le théorème de Fermat $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

$$\Rightarrow \left(a^{\frac{p-1}{2}}\right)^2 - 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

$$\Rightarrow \left(a^{\frac{p-1}{2}} - 1\right) \left(a^{\frac{p-1}{2}} + 1\right) \equiv 0 \pmod{p}$$

$$\Rightarrow a^{\frac{p-1}{2}} - 1 \equiv 0 \pmod{p} \text{ ou } a^{\frac{p-1}{2}} + 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

(car p est premier)

$$\Rightarrow a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p} \text{ ou } a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}$$

($\frac{p-1}{2} \in \mathbb{N}$ car p est impair)

② soit x_0 solution de l'équation $ax^2 \equiv 1 \pmod{p}$

① Méthode 1

$$\text{on a } ax_0^2 \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : ax_0^2 = 1 + pk$$

$$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : (ax_0)x_0 - pk = 1$$

$$\Rightarrow \exists u, v \in \mathbb{Z} \text{ tq } x_0 \cdot u + p \cdot v = 1$$

$$(u = ax_0, v = -k)$$

$$\Rightarrow p \wedge x_0 = 1 \text{ d'après Bézout}$$

Donc d'après le théorème de Fermat $x_0^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

Méthode 2 : supposons que $p \nmid x_0$ (p est premier) $\Rightarrow x_0 \not\equiv 0 \pmod{p}$

$$\Rightarrow ax_0^2 \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow 1 \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow p \mid 1 \text{ absurde}$$

$$\text{Donc } p \nmid x_0 \text{ car } p \wedge x_0 = 1$$

⑥ on a $ax_0^2 \equiv 1 \pmod{p}$

et comme p est impair donc $\frac{p-1}{2} \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow (ax_0^2)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$$

$$\Rightarrow a^{\frac{p-1}{2}} \cdot x_0^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

et on a $x_0^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow a^{\frac{p-1}{2}} \cdot x_0^{p-1} \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$

$$\Rightarrow a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$$

③ Soit $n \in \mathbb{N}^*$

① on a p divise $2^{2n+1} - 1 \Rightarrow 2^{2n+1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$

$$\Rightarrow 2 \cdot (2^n)^2 \equiv 1 \pmod{p}$$

donc 2^n vérifie l'équation $a \cdot x^2 \equiv 1 \pmod{p}$ avec $a = 2$ et $2 \nmid p = 1$

d'où d'après la question 2b) $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$

② Pour montrer que l'équation (E) : $11x + (2^{2n+1} - 1)y = 1$ admet au moins une solution dans $\mathbb{Z}^2$, il suffit de montrer que $11 \nmid (2^{2n+1} - 1)$

on a 11 est premier, supposons donc que 11 divise $2^{2n+1} - 1$

donc d'après la question 3a) $2^{\frac{11-1}{2}} \equiv 1 \pmod{11}$ car $2^5 \equiv 1 \pmod{11}$

or $2^5 \equiv -1 \pmod{11}$ ($32 = 3 \times 11 - 1$) donc $2^5 \equiv 1 \pmod{11}$ fausse

donc 11 ne divise pas $2^{2n+1} - 1$ car $11 \nmid 2^{2n+1} - 1 = 1$

D'où d'après Bezout il existe $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ $\nmid 11x + (2^{2n+1} - 1)y = 1$

d'où l'équation (E) admet au moins une solution dans $\mathbb{Z}^2$

④ Soit l'équation (F): $x^2 + 5x + 2 \equiv 0 \pmod{11}$

$$\textcircled{a} \quad 2(2n+5)^2 \equiv 1 \pmod{11} \iff 2(4x^2 + 20x + 25) \equiv 1 \pmod{11}$$

$$\iff 8x^2 + 40x + 50 - 1 \equiv 0 \pmod{11}$$

$$\iff 8x^2 + 40x + 16 \equiv 0 \pmod{11} \quad (\text{car } 49 \equiv 16 \pmod{11})$$

$$\iff 8(x^2 + 5x + 2) \equiv 0 \pmod{11}$$

$$\iff x^2 + 5x + 2 \equiv 0 \pmod{11} \quad (\text{car } 8 \times 11 = 1 \text{ et d'après Gauss})$$

⑥ supposons que (F) admet une solution dans $\mathbb{Z}$

$$\implies \exists x \in \mathbb{Z} \text{ tq } 2(2n+5)^2 \equiv 1 \pmod{11} \quad (\text{d'après ce qui précède})$$

$$\implies 2x_0^2 \equiv 1 \pmod{11} \quad \text{avec } x_0 = 2n+5$$

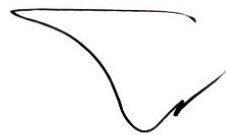
$$\implies x_0 \text{ est solution de l'équation } ax^2 \equiv 1 \pmod{p} \quad \text{avec } a=2, p=11$$

$$\implies 2^{\frac{11-1}{2}} \equiv 1 \pmod{11}$$

$$\implies 2^5 \equiv 1 \pmod{11} \quad \text{absurde}$$

$$(\text{Car } 2^5 \equiv -1 \pmod{11} \quad (32 \equiv 11 \times 3 - 1))$$

Donc l'équation (F) n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}$.



كما وعدتكم جائزة لمن حصل على 20 في الامتحان الوطني لتلامذتي عن قرب
و أيضا عن بعد

Exercice 4 (Structures algébriques)

①a) on a $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \text{Donc } A^2 &= A \times A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1+1 & 1+1 & 0 \\ 1+1 & 1+1 & 0 \\ 1-1+2 & 1-1-2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \\ &= -2 \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = -2A \end{aligned}$$

①b) soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} M(x) \times M(y) &= (I + xA)(I + yA) = I + yA + xA + x \cdot y A^2 \\ &= I + (x+y) \cdot A - 2xyA \quad (\text{car } A^2 = -2A) \\ &= I + (x+y-2xy) \cdot A \\ &= M(x+y-2xy) \end{aligned}$$

②a) $M(\frac{1}{2}) \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$

①b) Supposons que $M(\frac{1}{2})$ est inversible dans $(M_3(\mathbb{R}), \times)$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \exists N \neq 0_3 \text{ tel } M(\frac{1}{2}) \times N &= I_3 \text{ et } N \times M(\frac{1}{2}) = I_3 \\ \Rightarrow N \times M(\frac{1}{2}) \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &= I_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow N \times 0_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 0_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ce qui est absurde}$$

Donc $M(\frac{1}{2})$ n'est pas inversible dans $(M_3(\mathbb{R}), \times)$

③ on a bien $\mathbb{I}_3 = \mathbb{I}_3 + 0 \cdot A$ donc $\mathbb{I}_3 = M(0) \in E$ D'où $E \neq \emptyset$

soit $M(x), M(y) \in E - \{M(\frac{1}{2})\}$

on a d'après la question 1/b) $M(x) \times M(y) = M(x+y-2xy)$

Montrons que $M(x+y-2xy) \in E - \{M(\frac{1}{2})\}$

on a $x+y-2xy-\frac{1}{2} = -2(x-\frac{1}{2})(y-\frac{1}{2})$ (d'après l'identité donnée)

et comme $x \neq \frac{1}{2}$ alors $x-\frac{1}{2} \neq 0$ (car $M(x) \in E - \{M(\frac{1}{2})\}$)

et $y \neq \frac{1}{2}$ alors $y-\frac{1}{2} \neq 0$ (car $M(y) \in E - \{M(\frac{1}{2})\}$)

D'où $-2(x-\frac{1}{2})(y-\frac{1}{2}) \neq 0$

Donc $x+y-2xy \neq \frac{1}{2}$

D'où $M(x+y-2xy) \in E - \{M(\frac{1}{2})\}$

dc $E - \{M(\frac{1}{2})\}$ est stable pour la multiplication dans $M_3(\mathbb{R})$

④ Rappel Cans (group commutatif)

$(G, *)$ est un groupe commutatif (Cans) ssi

- La loi $*$ est commutative (c)
- La loi $*$ est associative (a)
- La loi $*$ admet un élément neutre (n)
- Tout élément de E admet un élément symétrique (s)

on a d'après la question précédente $E - \left\{ M\left(\frac{1}{2}\right) \right\}$ est stable pour la multiplication dans $M_3(\mathbb{R})$, et comme la loi $\times$ est associative, d'élément neutre $I_3 = M(0) \in E$.

donc la loi $\times$ est associative dans $E - \left\{ M\left(\frac{1}{2}\right) \right\}$ et d'élément neutre $I_3 = M(0)$

• Soit $M(x) \in E - \left\{ M\left(\frac{1}{2}\right) \right\}$. Existe-il $M(x') \in E - \left\{ M\left(\frac{1}{2}\right) \right\}$ tel que $M(x) \times M(x') = I_3$ et $M(x') \times M(x) = I_3$

$$\begin{aligned} \text{on pose } M(x) \times M(x') &= I_3 \Leftrightarrow M(x + x' - 2xx') = I_3 \\ &\Leftrightarrow I_3 + (x + x' - 2xx') \cdot A = I_3 \\ &\Leftrightarrow (x + x' - 2xx') \cdot A = O_3 \\ &\Leftrightarrow x + x' - 2xx' = 0 \quad (\text{car } A \neq O_3) \\ &\Leftrightarrow x' (1 - 2x) = -x \\ &\Leftrightarrow x' = \frac{x}{2x - 1} \quad \left(\text{car } x \neq \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\text{de plus } x' - \frac{1}{2} = \frac{x}{2x-1} - \frac{1}{2} = \frac{2x - 2x + 1}{2(2x-1)} = \frac{1}{2(2x-1)} \neq 0$$

$$\text{donc } x' \neq \frac{1}{2}$$

Or la loi $\times$ est commutative car $M(x) \times M(y) = M(x+y-2xy)$
 $= M(y+x-2yx)$
 $= M(y) \times M(x)$ (car les lois $+$ et $\times$ sont commutatives dans $\mathbb{R}$)

donc $\forall M(x) \in E - \left\{ M\left(\frac{1}{2}\right) \right\} \exists M(x') \in E - \left\{ M\left(\frac{1}{2}\right) \right\}$
 $\left(x' = \frac{x}{2x-1} \right) \text{ tq } M(x) \times M(x') = I_3$

Donc tout élément de $E = \{M(\frac{1}{2})\}$ admet un élément symétrique dans $E = \{M(\frac{1}{2})\}$

d'où $(E = \{M(\frac{1}{2})\}, \times)$ est un groupe commutatif.

$$\textcircled{5} \text{ soit } \varphi: \mathbb{R} \longrightarrow E$$

$$x \longmapsto M\left(\frac{1-x}{2}\right)$$

soient $x, y \in \mathbb{R}$

$$\text{on a } \varphi(x+y) = M\left(\frac{1-(x+y)}{2}\right)$$

$$\text{et } \varphi(x) \tau \varphi(y) = M\left(\frac{1-x}{2}\right) \tau M\left(\frac{1-y}{2}\right) = M\left(\frac{1-x}{2} + \frac{1-y}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$= M\left(\frac{1-x+1-y-1}{2}\right) = M\left(\frac{1-(x+y)}{2}\right)$$

$$\text{Donc } \varphi(x+y) = \varphi(x) \tau \varphi(y)$$

D'où φ est un homomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ vers (E, τ) .

$$\bullet \varphi(\mathbb{R}) = \left\{ \varphi(x) \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ M\left(\frac{1-x}{2}\right) \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ M(y) \mid y = \frac{1-x}{2} \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= E.$$

Autre méthode, soit $M(y) \in E$

$$\text{on pose } M(y) = \varphi(x) \Leftrightarrow M(2y) = M\left(\frac{1-x}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1-x}{2} \Leftrightarrow x = 1-2y$$

$$\text{Donc } \forall M(y) \in E \quad \exists x \in \mathbb{R} \ (x = 1-2y) \text{ tq } \varphi(x) = M(y)$$

Donc φ est surjective de $\mathbb{R}$ vers E

D'où $\varphi(\mathbb{R}) = E$.

⑤ Comme φ est l'isomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ vers (E, τ)

et $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe commutatif alors $(\varphi(\mathbb{R}), \tau)$ est un groupe commutatif

D'où (E, τ) est un groupe commutatif (car $\varphi(\mathbb{R}), E$)

⑥ Rappel $(K, *, \tau)$ est un corps $\Leftrightarrow \begin{cases} (K, *) \text{ est un gpe commutatif} \\ (K - \{0_K\}, \tau) \text{ est un gpe} \\ \tau \text{ est distributive par rapport à } * \end{cases}$

D'après la question 5/b), (E, τ) est un groupe commutatif d'élément

$\varphi(0)$ (car 0 est l'élément neutre de + dans $\mathbb{R}$) avec $\varphi(0) = M(\frac{1}{2})$

et d'après la question 4), $(E - \{M(\frac{1}{2})\}, \times)$ est un groupe.

de plus soit $M(x), M(y), M(z) \in E - \{M(\frac{1}{2})\}$

$$\text{car } M(x) \times (M(y) \tau M(z)) = M(x) \times M(y + z - \frac{1}{2})$$

$$= M(x + y + z - \frac{1}{2} - 2x(y + z - \frac{1}{2}))$$

$$\text{et } (M(x) \times M(y)) \tau (M(x) \times M(z)) = M(x + y - 2xy) \tau M(x + z - 2xz)$$

$$= M(x + y - 2xy + x + z - 2xz - \frac{1}{2})$$

$$= M(x + y + z - \frac{1}{2} - 2x(y + z - \frac{1}{2}))$$

et comme la loi $\times$ est commutative dans E alors la loi $\times$ est distributive par rapport à la loi τ

c/c $(E, \tau, \times)$ est un corps commutatif.

La loi $\times$

Mathématiques pour les concours des écoles de l'enseignement supérieur

Page 1 / 31

Préliminaire

Notez bien que dans un concours sous forme de QCM (Questions à choix multiples), que la gestion du temps est le plus grand défi pour l'élève. Donc pour cela ce dernier se trouve dans l'obligation de s'entraîner avant même d'arriver aux concours.

Au jour du concours l'élève n'est pas obligé d'écrire toutes les étapes du raisonnement qu'on a appris au bac ou bien de terminer les calculs.

Il est porté à l'élève de connaître des techniques du supérieur comme règle de l'Hôpital, le développement limité, les fonctions équivalentes, décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples.....

La méthode d'élimination des cas avec remplacement ou vérification est très importante, permettant à l'élève la localisation la bonne réponse à cocher.

Pour une bonne préparation je vous propose ce document, contenant toutes astuces et un résumé du cours de mathématique pour vous aider à bien passer vos concours.

Bon courage.....

Page 2 / 31

Préface

Ce document contient

- ① Calcul de limites
 - Règle de L'Hôpital.
 - Limites de fonctions irrationnelles.
 - le développement limité.
 - les fonctions équivalentes.
- ② Suites numériques
 - Suite de la forme $U_{n+1} = aU_n + b$
 - Suite de la forme $U_{n+1} = \frac{aU_n + b}{cU_n + d}$
 - Suite de la forme $U_{n+1} = f(U_n)$
 - Limite d'une somme.
 - Suite définie par intégral.
 - Somme de Césaro.
 - Somme de Riemann.
 - Théorème de comparaison.
- ③ Sommes usuelles
 - Sommes définies.
 - Binôme de Newton.
- ④ Nombres complexes
- ⑤ Fonction Arctan
- ⑥ Calcul intégral
 - A retenir.
 - Intégration par parties.
 - Intégration par changement de variable.
 - Intégral de Wallis.
 - décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples.
- ⑦ Rappel sur les fonctions numériques.

Prof B. LOUKILIA

Bouazzaloukilia@gmail.com

Nr whatsapp 0661969668

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتعليم الأولي والثانوي



Mathématiques d'excellence

2BACSM

Option A et B

Prof B. LOUKILIA

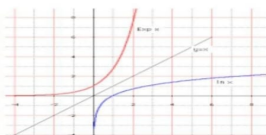
Email : bouazzaloukilia@gmail.com

Gsm : 0661969668

sommes de Riemann

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$$



Mathématiques

khourigba



Préparer mon examen national

2ème Bac SM

Thème

Structures algébriques

Prof B. LOUKILIA

Bouazzaloukilia@gmail.com

Nr Whatsapp 0661969668