

"Correction Examen National SM 2025 SN"

Exercice 1

$$f(x) = \frac{e^x}{e^{2x} + e}, D_f = \mathbb{R}.$$

1/12

Partie I:

0,25 a) Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $(1-x) \in \mathbb{R}$ et $f(1-x) = \frac{e^{1-x}}{e^{2(1-x)} + e}$

$$\boxed{f(1-x) = \frac{e/e^x}{e^2/e^{2x} + e} = \frac{e^x}{e + e^{2x}} = f(x)}$$

0,25 b) Comme $(\forall x \in \mathbb{R})$ on a $(\frac{1}{2}-x) \in \mathbb{R}$ et $f(\frac{1}{2}-x) = f(x)$ alors la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de C_f .

0,1 c) on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^{2x} + e} = 0$ car $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x)^2 = 0 \end{cases}$

et on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^{2x} + e} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x + \frac{e}{e^x}} = 0$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

0,1 d) comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, alors la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale à C_f au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$.

0,5 2a) on a f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée, somme et quotient

avec $(\forall x \in \mathbb{R})$: $f'(x) = \left(\frac{e^x}{e^{2x} + e} \right)' = \frac{e^x(e^{2x} + e) - 2xe^{2x} \cdot e^x}{(e^{2x} + e)^2} = \left(\frac{e^x}{e^{2x} + e} \right) \times \frac{e - e^{2x}}{e^{2x} + e}$

c'est-à-dire $f'(x) = f(x) \times \frac{e(1 - e^{2x-1})}{e(1 + e^{2x-1})} = f(x) \times \frac{1 - e^{2x-1}}{1 + e^{2x-1}}$

1 b) on a $(\forall x \in \mathbb{R})$: $f'(x) = f(x) \times \frac{1 - e^{2x-1}}{1 + e^{2x-1}}$ avec $f(x) = \frac{e^x}{e^{2x} + e} > 0$ et $1 + e^{2x-1} > 0$

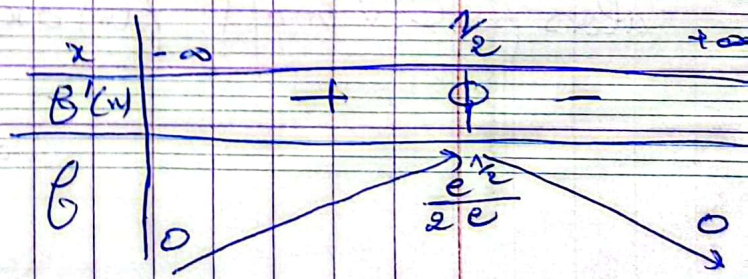
Alors le signe de $f'(x)$ est ce lui de $1 - e^{2x-1}$ sur $\mathbb{R}$.

or $1 - e^{2x-1} \geq 0 \Leftrightarrow e^{2x-1} \leq 1$

$\Leftrightarrow 2x-1 \leq 0$

$\Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}$

Donc :



Et par suite f est strictement croissante sur $] -\infty, \frac{1}{2}]$
 et f est strictement décroissante sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$; de plus
 f est dérivable donc continue sur $\mathbb{R}$; d'où

$\frac{2}{12}$

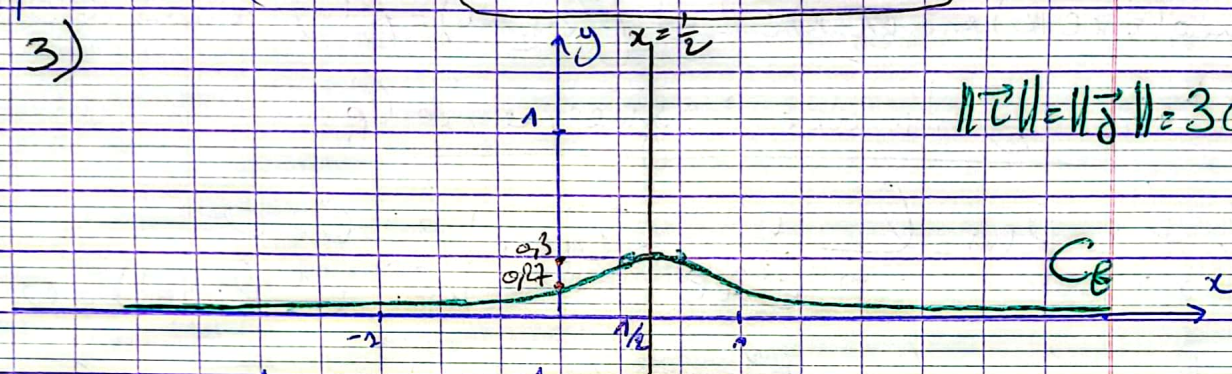
$$f\left(\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)\right) =]_{x \rightarrow +\infty} f(x), f\left(\frac{1}{2}\right) =]0, \frac{\sqrt{e}}{2e}] \text{ avec } \frac{\sqrt{e}}{2e} < \frac{1}{2} \text{ car } \sqrt{e} < e$$

$$\text{et } f\left(]-\infty, \frac{1}{2}]\right) =]_{x \rightarrow -\infty} f(x), f\left(\frac{1}{2}\right) =]0, \frac{\sqrt{e}}{2e}] \quad \left(\frac{\sqrt{e}}{2e} = \frac{1}{2\sqrt{e}} < \frac{1}{2}\right)$$

Car $\sqrt{e} > 1$

$$\text{et par suite } (\forall x \in \mathbb{R}) : 0 < f(x) \leq \frac{\sqrt{e}}{2e} < \frac{1}{2}$$

9.3)



$$\|\vec{C}\| = \|\vec{J}\| = 3 \text{ Carreaux}$$

9.4.a) on a $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} f(1-x) dx$ car $(\forall x \in \mathbb{R}), f(1-x) = f(x)$

on pose $t = 1-x \Rightarrow dt = -dx$ et $\left. \begin{array}{l} x = \frac{1}{2} \\ x = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} t = \frac{1}{2} \\ t = 1 \end{array} \right\}$

donc par I.C.V on aura $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx = -\int_1^{\frac{1}{2}} f(t) dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx$

9.4.b) on a $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx$ (Relation de Chabrol)
 $= \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx + \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx$

9.4.c) pour $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx$, on pose $t = e^x$ donc $dt = e^x dx = t dx$
 et $\left. \begin{array}{l} x = \frac{1}{2} \\ x = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} t = \sqrt{e} \\ t = 1 \end{array} \right\}$

alors par C.V on a $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{e^x}{e^{2x} + e} dx = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{t}{t^2 + e} \frac{dt}{t}$
 $= \int_1^{\sqrt{e}} \frac{dt}{t^2 + e}$

0,5 b) on a $\int_0^{\frac{1}{2}} f(u) dx = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{dt}{t^2 + e} = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{dt}{e(\frac{t^2}{e} + 1)} = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{dt}{e(1 + (\frac{t}{\sqrt{e}})^2)}$ 3/1e

$$= \int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{\sqrt{e}} \times \frac{1}{1 + (\frac{t}{\sqrt{e}})^2} dt = \frac{1}{\sqrt{e}} \int_1^{\sqrt{e}} \frac{(\frac{t}{\sqrt{e}})' dt}{1 + (\frac{t}{\sqrt{e}})^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{e}} \left[\text{Arctan}\left(\frac{t}{\sqrt{e}}\right) \right]_1^{\sqrt{e}} = \frac{1}{\sqrt{e}} \left(\text{Arctan}(1) - \text{arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{e}} \left(\frac{\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{2} - \text{arctan}(\sqrt{e}) \right) \right) = \frac{1}{\sqrt{e}} \left(\text{arctan}(\sqrt{e}) - \frac{\pi}{4} \right)$$

0,25 c) on a $A = \int_0^1 |f(u)| dx \times u.a = \int_0^1 f(u) dx \times u.a$ car $(\forall x \in \mathbb{R}) : f(x) \geq 0$

$$= 2 \int_0^{\frac{1}{2}} f(u) dx \times u.a = \frac{2}{\sqrt{e}} \left(\text{arctan}(\sqrt{e}) - \frac{\pi}{4} \right) \times 2 \text{ cm}^2$$

Partie II: $U_0 \in]0, \frac{1}{2}[$; $U_{n+1} = f(U_n)$; $n \in \mathbb{N}$

0,5 1) d'après Q I 2.a) on a $(\forall x \in \mathbb{R}) : f'(x) = f(x) \frac{1 - e^{2x-1}}{1 + e^{2x+1}}$

alors $|f'(x)| = f(x) \frac{|1 - e^{2x-1}|}{1 + e^{2x+1}}$ car $f(x) \geq 0$ et $1 + e^{2x+1} > 0$

de plus $(\forall x \in \mathbb{R}) : |1 - e^{2x-1}| \leq |1| + |e^{2x-1}| \leq 1 + e^{2x-1}$

donc $\frac{|1 - e^{2x-1}|}{1 + e^{2x+1}} \leq 1$ et par suite $(\forall x \in \mathbb{R}) : |f'(x)| \leq f(x)$

0,5 2.a) comme $(\forall x \in \mathbb{R}) : |f'(x)| \leq f(x)$ et $0 < f(x) < \frac{1}{2}$

et $\forall x \in [0, \frac{1}{2}] : f'(x) \geq 0$ alors $\forall x \in [0, \frac{1}{2}] : 0 \leq f'(x) < \frac{1}{2}$

0,25 b) on a $g: x \mapsto f(x) - x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme avec

$(\forall x \in \mathbb{R}) : g'(x) = f'(x) - 1 < 0$ car $(\forall x \in \mathbb{R}) : f'(x) < \frac{1}{2} < 1$

donc g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

0,5 c) on a g est dérivable sur $[0, \frac{1}{2}] \subset \mathbb{R}$ donc elle est continue sur $[0, \frac{1}{2}]$

et on a g est strictement décroissante sur $[0, \frac{1}{2}] \subset \mathbb{R}$ de plus:

$g(0) = f(0) > 0$ et $g(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}) - \frac{1}{2} < 0$ car $(\forall x \in \mathbb{R}) : f(x) < x$ c'ad $f(x) - x < 0$

alors par T.V.I : $(\exists ! \alpha \in]0, \frac{1}{2}[) : g(\alpha) = 0$ c'ad $f(\alpha) = \alpha$

0,5 3.a) * pour $n=0$ on a $U_0 \in]0, \frac{1}{2}[$ (ce qui est vrai)

* Soit $n \in \mathbb{N}$; Supposons que $0 < U_n < \frac{1}{2}$ et Mq: $0 < U_{n+1} < \frac{1}{2}$

on a $U_{n+1} = f(U_n)$ et d'après H.R. $U_n \in]0, \frac{1}{2}[\subset \mathbb{R}$

et on a $(\forall x \in \mathbb{R}) : 0 < f(x) < \frac{1}{2}$ alors $0 < f(U_n) < \frac{1}{2}$ c'ad $0 < U_{n+1} < \frac{1}{2}$

* d'après P.R. on conclut que $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 < U_n < \frac{1}{2}$

4/12

0,5 b) Soit $n \in \mathbb{N}$; on a $U_{n+1} = f(U_n)$ et $\alpha = f(\alpha)$ avec $\alpha, U_n \in]0, \frac{1}{2}[$

et on a f est continue sur $[\min(\alpha, U_n), \max(\alpha, U_n)] \subset]0, \frac{1}{2}[$ et dérivable sur $] \min(\alpha, U_n), \max(\alpha, U_n) [\subset]0, \frac{1}{2}[$ avec $\forall x \in]0, \frac{1}{2}[: 0 < f'(x) < \frac{1}{2}$

Alors par T.A.F. $\exists c$ compris entre α et U_n c'ad $c \in]0, \frac{1}{2}[$

tel que $|f(U_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2} |U_n - \alpha|$ c'ad $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_n - \alpha|$

0,5 c) * pour $n=0$; on a $0 < U_0 < \frac{1}{2}$ et $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ alors $|U_0 - \alpha| \leq |\frac{1}{2} - 0|$

c'ad $|U_0 - \alpha| \leq (\frac{1}{2})^{0+1}$ ce qui est vrai

0 α $\frac{1}{2}$

* Soit $n \in \mathbb{N}$; Supp: $|U_n - \alpha| \leq (\frac{1}{2})^{n+1}$

al. Mq: $|U_{n+1} - \alpha| \leq (\frac{1}{2})^{n+2}$

$|\frac{1}{2} - 0|$ est la plus grande distance.

d'après H.R. on a $|U_n - \alpha| \leq (\frac{1}{2})^{n+1}$ alors $\frac{1}{2} |U_n - \alpha| \leq (\frac{1}{2})^{n+2}$ ①

et d'après Question précédente $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_n - \alpha|$ ②

par ① et ② on déduit que $|U_{n+1} - \alpha| \leq (\frac{1}{2})^{n+2}$

* par P.R. on conclut que $(\forall n \in \mathbb{N}) : |U_n - \alpha| \leq (\frac{1}{2})^{n+1}$

0,25 d) d'après Q3.c) $(\forall n \in \mathbb{N}) : |U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} (\frac{1}{2})^n$

or $|\frac{1}{2}| < 1$ donne $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{2})^n = 0$ c'ad $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{2})^{n+1} = 0$

Alors par Critères de Convergence on déduit que

$(U_n)_n$ est convergente avec $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \alpha$

c'ad $(U_n)_n$ converge vers α .

Partie III : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : S_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n \frac{k}{e^{\frac{k}{n}} + e^{\frac{n-k}{n}}}$

5/12

0,25 1.a) soit $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \right) &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \times \frac{e^{\frac{k}{n}}}{e^{\frac{k}{n}} + e^{\frac{n-k}{n}}} \times \frac{e^{-\frac{k}{n}}}{e^{-\frac{k}{n}}} \\ &= \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n \frac{k}{e^{\frac{k}{n}} + e^{\frac{n-k}{n}}} = S_n \end{aligned}$$

0,5 b) pour $\int_0^1 x f(x) dx$; on pose $t = 1-x \Leftrightarrow x = 1-t$
 et $dt = -dx$ et $\left. \begin{array}{l} x=1 \\ x=0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} t=0 \\ t=1 \end{array} \right\}$

alors $\int_0^1 x f(x) dx = - \int_1^0 (1-t) f(1-t) dt = \int_0^1 (1-t) f(1-t) dt$
 car $f(1-t) = f(t)$

c'est ad $\int_0^1 x f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 x f(x) dx$ car $\int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(x) dx$

donc $2 \int_0^1 x f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx$ (d'après Parité I)

d'où $\int_0^1 x f(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx$

0,5 2) on a $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : S_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} \right) \times \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$

or $x \mapsto x f(x)$ est continue sur $[0,1] \subset \mathbb{R}$ donc produit

alors la suite $(U_n)_n$ / $U_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ est cste par somme de Riemann avec $\mathcal{L} U_n = \int_0^1 x f(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx$

de plus $\mathcal{L} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1 \in \mathbb{R}$ donc $(S_n)_n$ est convergente

avec $\mathcal{L} S_n = \mathcal{L} U_n = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{e}} \left(\operatorname{arctan}(\sqrt{e}) - \frac{\pi}{4} \right)$

Exercice 2 $(E_2): z^2 - 2^{\alpha} e^{i\alpha} (1+2i)z + i 2^{2\alpha+1} e^{i2\alpha} = 0$
avec $\alpha \in [0, 2\pi[$ ($\alpha \in \mathbb{R}$)

6/12

Partie I:

0,25/1.a) on a $(2^{\alpha} e^{i\alpha} (1-2i))^2 = 2^{2\alpha} e^{i2\alpha} (-3-4i)$

et on a $\Delta_2 = (2^{\alpha} e^{i\alpha} (1+2i))^2 - 4 \times i 2^{2\alpha+1} e^{i2\alpha}$
 $= 2^{2\alpha} e^{i2\alpha} (-3+4i) - 4i \times 2^{2\alpha} \times 2 \times e^{i2\alpha}$
 $= 2^{2\alpha} e^{i2\alpha} (-3+4i-8i) = 2^{2\alpha} e^{i2\alpha} (-3-4i)$

D'où $\Delta_2 = (2^{\alpha} e^{i\alpha} (1-2i))^2$

0,5/b) on a $\Delta_2 \neq 0$ alors $z_1 = \frac{2^{\alpha} e^{i\alpha} (1+2i) - 2^{\alpha} e^{i\alpha} (1-2i)}{2}$

c'est $z_1 = \frac{2^{\alpha} e^{i\alpha} (1+2i-1+2i)}{2} = i 2^{\alpha+1} e^{i\alpha}$

et $z_2 = \frac{2^{\alpha} e^{i\alpha} (1+2i) + 2^{\alpha} e^{i\alpha} (1-2i)}{2} = 2^{\alpha} e^{i\alpha}$

or $|z_1| = |i 2^{\alpha+1} e^{i\alpha}| = 2^{\alpha+1} > 2^{\alpha} = |2^{\alpha} e^{i\alpha}| = |z_2|$

D'où les solutions de (E_2) sont: $\boxed{a = 2^{\alpha} e^{i\alpha} \text{ et } b = i 2^{\alpha+1} e^{i\alpha}}$

0,25/2) on a $\frac{b}{a} = \frac{i 2^{\alpha+1} e^{i\alpha}}{2^{\alpha} e^{i\alpha}} = 2i \in i\mathbb{R}^*$ c'est $\frac{b}{a}$ est un imaginaire pur

Partie II: on a $\frac{b}{a} = \lambda i = 2i$ avec $\lambda = 2 = \text{Im}\left(\frac{b}{a}\right)$

0,5/1.a) on a $\frac{b-a}{\frac{b}{a}} = (b-a) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = \frac{b}{a} + 1 - 1 - \frac{a}{b} = \lambda i - \frac{1}{\lambda i}$
 $= -\frac{\lambda^2 - 1}{\lambda i} = -\frac{(\lambda^2 + 1)}{\lambda i}$

donc $\frac{b}{b-a} = -\left(\frac{\lambda}{\lambda^2 + 1}\right) i \in i\mathbb{R}^*$ car $\lambda = \text{Im}\left(\frac{b}{a}\right) \in \mathbb{R}^*$

alors $\frac{b-a}{b-a} \in i\mathbb{R}^*$ donc $(OH) \perp (AB)$

or 1.b) on a $\frac{h-a}{b-a} = \frac{h}{b-a} = \frac{a}{b-a} = \frac{h}{b-a} = \frac{1}{\frac{b}{a}-1}$

7/12

c) ad $\frac{h-a}{b-a} = -\left(\frac{\lambda}{\lambda^2+1}\right)i - \frac{1}{\lambda i-1} = -\left(\frac{\lambda}{\lambda^2+1}\right)i - \frac{(-1-\lambda i)}{1+\lambda^2}$ car $\lambda \in \mathbb{R}^*$
 $= -\frac{1}{\lambda^2+1} \in \mathbb{R}$

Comme $\frac{h-a}{b-a} \in \mathbb{R}$ alors les pts H, A et B sont alignés

or 2 a) on a I(m) milieu de (OH) c'ad $m = \frac{h}{2}$
 et J(n) milieu de (HB) c'ad $n = \frac{h+b}{2}$

on a $\frac{n}{m-a} = \frac{\frac{h+b}{2}}{\frac{h}{2}-a} = \frac{h+b}{h-2a} = \frac{\frac{h+b}{b-a}}{\frac{h-2a}{b-a}} = \frac{\frac{h}{b-a} + \frac{1}{1-\frac{a}{b}}}{\frac{h}{b-a} - \frac{2}{\frac{b}{a}-1}}$

c'ad $\frac{n}{m-a} = \frac{-\frac{\lambda i}{\lambda^2+1} + \frac{1}{1-\frac{1}{\lambda i}}}{-\frac{\lambda i}{\lambda^2+1} - \frac{2}{\lambda i-1}} = \frac{-\frac{\lambda i}{\lambda^2+1} + \frac{\lambda i}{\lambda i-1}}{-\frac{\lambda i}{\lambda^2+1} - \frac{2(-1-\lambda i)}{1+\lambda^2}} = \frac{-\lambda i + \lambda i(-1-\lambda i)}{-\lambda i + 2 + 2\lambda i}$

$\frac{n}{m-a} = \frac{-\lambda i(2+\lambda i)}{2+\lambda i} = -\lambda i$

or b) Comme $\frac{n-a}{m-a} = -\lambda i \in i\mathbb{R}^*$ car $\lambda \in \mathbb{R}^*$ alors (OJ) $\perp$ (AI)

De plus $\left|\frac{n-a}{m-a}\right| = |-\lambda i| = |\lambda|$ c'ad $\frac{OJ}{AI} = |\lambda|$

or c) on a (OH) $\perp$ (AB) et H, A et B alignés

et I $\in$ (OH) et H, J $\in$ (AB) donc (IH) $\perp$ (HJ)

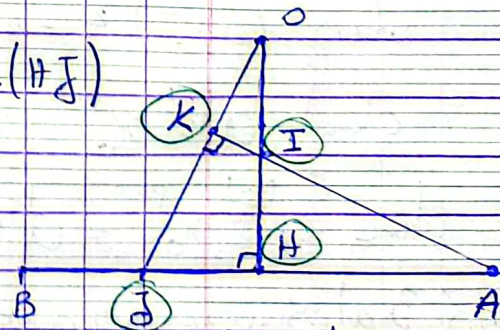
c'ad $\frac{m-h}{n-h} \in i\mathbb{R}^*$

et on a (OJ) $\perp$ (AI) et K $\in$ (OJ) et K $\in$ (AI)

donc (KJ) $\perp$ (KI) c'ad $\frac{m-z_k}{n-z_k} \in i\mathbb{R}^*$

d'où $\frac{m-h}{n-h} \neq \frac{m-z_k}{n-z_k} \in \mathbb{R}$ et par conséquent les points

K, I, H et J sont cocycliques.



0,25 2.d) on a $\frac{n-m}{a-0} = \frac{\frac{h+b}{2} - \frac{h}{2}}{a} = \frac{b}{2a} = \frac{1}{2} i \in i\mathbb{R}^*$ 8/12

donc $(\pm j) \perp (OA)$

Exercice 3 : p premier impair et $a \in \mathbb{Z} / a \wedge p = 1$

0,5 1) on a p est premier positif et $a \wedge p = 1$ alors par th de Fermat on a $a^{p-1} \equiv 1 [p]$ or p impair c'ad $p-1$ est pair

donc on aura : $(a^{\frac{p-1}{2}})^2 - 1 \equiv 0 [p]$ car $\frac{p-1}{2} \in \mathbb{N}^*$

c'ad $(a^{\frac{p-1}{2}} - 1)(a^{\frac{p-1}{2}} + 1) \equiv 0 [p]$; or p est premier

donc $a^{\frac{p-1}{2}} - 1 \equiv 0 [p]$ ou $a^{\frac{p-1}{2}} + 1 \equiv 0 [p]$

D'où $\boxed{a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 [p] \text{ ou } a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 [p]}$

0,5 2.a) x_0 solution de l'équ $ax^2 \equiv 1 [p]$ c'ad $ax_0^2 \equiv 1 [p]$

donc $\exists k \in \mathbb{Z} / ax_0^2 = 1 + kp$ c'ad $(ax_0)x_0 - k \cdot p = 1$

alors par th de Bezout on a $x_0 \wedge p = 1$ de plus p premier donc par th de Fermat : $\boxed{x_0^{p-1} \equiv 1 [p]}$

0,25 b) on a x_0 solution de $ax^2 \equiv 1 [p]$ donc $ax_0^2 \equiv 1 [p]$

alors $(ax_0^2)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 [p]$ car $\frac{p-1}{2} \in \mathbb{N}^*$

c'ad $a^{\frac{p-1}{2}} x_0^{p-1} \equiv 1 [p]$; or $x_0^{p-1} \equiv 1 [p]$ d'après Q 2.a

donc $a^{\frac{p-1}{2}} x_0^{p-1} \equiv a^{\frac{p-1}{2}} [p]$ alors par transitivité $\boxed{a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 [p]}$

0,5 3 a) Supposons que p divise $2^{2n+1} - 1$ c'ad $2^{2n+1} \equiv 1 [p]$

alors $2 \times (2^n)^2 \equiv 1 [p]$ c'ad 2^n solution de $2x^2 \equiv 1 [p]$

de plus 2 est premier et p premier impair donc $2 \wedge p = 1$

alors d'après Q 2.b et pour $a=2$ on aura $\boxed{2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 [p]}$

95 3.b) pour que l'équ(E): $11x + (2^{2n+1} - 1)y = 1$ admet au moins une solution (x, y) dans $\mathbb{Z}^2$ il suffit que :

9/12

$11 \wedge (2^{2n+1} - 1)$ divise 1 c'ad $11 \wedge (2^{2n+1} - 1) = 1$; or 11 premier

supposons que 11 divise $2^{2n+1} - 1$ et donc 11 premier impair alors d'après Q 3.a) on aura $2^{\frac{11-1}{2}} \equiv 1 [11]$ (pour $p=11$)

c'ad $2^5 \equiv 1 [11]$ d'ad $11/31$ ce qui est absurde

donc 11 ne divise pas $2^{2n+1} - 1$ d'où $11 \wedge (2^{2n+1} - 1) = 1$

et par suite (E) admet au moins des sols dans $\mathbb{Z}^2$

95 4.a) on a (F): $x^2 + 5x + 2 \equiv 0 [11]$

$$\text{et on a } 2(2x+5)^2 \equiv 1 [11] \Leftrightarrow 2(4x^2 + 20x + 25) \equiv 1 [11]$$

$$\Leftrightarrow 8x^2 + 40x + 49 \equiv 0 [11]$$

$$\Leftrightarrow 8x^2 + 40x + 16 \equiv 0 [11] \text{ car } 49 \equiv 16 [11]$$

$$\Leftrightarrow 8(x^2 + 5x + 2) \equiv 0 [11]$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 5x + 2 \equiv 0 [11] \text{ car } \left(\begin{array}{l} 11 \wedge 8 = 1 \\ \text{par th de Gauss} \end{array} \right)$$

$$\text{d'où : } \boxed{(F) \Leftrightarrow 2(2x+5)^2 \equiv 1 [11]}$$

95 b) supposons que (F) admet une solution x_1 c'ad $x_0 = 2x_1 + 5$ est une solution de l'équ $ax^2 \equiv 1 [p]$ avec $a=2$ et $p=11$

ce qui donne que $2^{\frac{11-1}{2}} \equiv 1 [11]$ c'ad $11/31$ ce qui est absurde ; d'où (F) n'admet pas des solutions dans $\mathbb{Z}$

Exercice 4 : $E = \{M(x) = I + xA \mid x \in \mathbb{R}\}$ / $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ NO / 12

0,25/1.a) on a $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} = -2A$

0,25/ b) soient x, y de $\mathbb{R}$ on a $M(x) \times M(y) = (I + xA)(I + yA)$
 c'ad $M(x) \times M(y) = I + (y+x)A + xyA^2 = I + (x+y)A - 2xyA$
 $= I + (x+y-2xy)A = M(x+y-2xy)$

0,25/ 2.a) on a $M(\frac{1}{2}) \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$

0,25/ b) Supp que $M(\frac{1}{2})$ est inversible dans $M_3(\mathbb{R})$ alors $\exists A \neq 0$ de $M_3(\mathbb{R})$ telle que : $M(\frac{1}{2}) \times A = A \times M(\frac{1}{2}) = I$

or $A \times M(\frac{1}{2}) = I$ donne $A \times M(\frac{1}{2}) \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c'ad $A \times 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ce qui est absurde

D'où $M(\frac{1}{2})$ n'est pas inversible dans $(M_3(\mathbb{R}), \times)$

0,25/ 3) on a $E = \{M(\frac{1}{2})\} \subset M_3(\mathbb{R})$ et $I = M(0) \in E$ c'ad $E \neq \emptyset$
 et pour $M(x), M(y)$ de $E \setminus \{M(\frac{1}{2})\}$ / $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$

on a $M(x) \times M(y) = M(x+y-2xy)$

Supp que $x+y-2xy = \frac{1}{2}$ c'ad $x+y-2xy-\frac{1}{2} = 0$

donc $-2(x-\frac{1}{2})(y-\frac{1}{2}) = 0$ (d'après l'identité donnée)

d'où $x = \frac{1}{2}$ ou $y = \frac{1}{2}$ ce qui est absurde

donc $x+y-2xy \neq \frac{1}{2}$ d'où $M(x) \times M(y) = M(x+y-2xy) \in E \setminus \{M(\frac{1}{2})\}$

et par suite $E \setminus \{M(\frac{1}{2})\}$ est stable dans $(M_3(\mathbb{R}), \times)$

1 4) d'après Q3 on a $E \setminus \{M(\frac{1}{2})\}$ est stable dans $(M_3(\mathbb{R}), \times)$ et comme $(\times)$ est associative, d'élément neutre $I = M(0)$ dans $M_3(\mathbb{R})$ alors $(\times)$ est associative et d'élément neutre $I = M(0)$ dans $E \setminus \{M(\frac{1}{2})\}$

* de plus $(\forall M(x), M(y) \in E \setminus \{M(\frac{1}{2})\}) : M(x) \times M(y) = M(x+y-2xy)$
 $= M(y+x-2yx)$
 $= M(y) \times M(x)$

Donc $(\times)$ est commutative dans $E \setminus \{M(\frac{1}{2})\}$.

* Soit $M(x)$ de $E \setminus \{M(\frac{1}{2})\}$ cherchons $M(x')$ de $E \setminus \{M(\frac{1}{2})\}$ tel que
 $M(x) \times M(x') = M(0)$ c'ad $M(x+x'-2xx') = M(0)$

donc $I + (x+x'-2xx')A = I$ c'ad $x+x'-2xx' = 0$ car $A \neq 0$

d'où $x' = \frac{x}{2x-1}$ car $x \neq \frac{1}{2}$

et on a $x' = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{2x-1} = \frac{1}{2}$ c'ad $2x = 2x-1$

alors $0 = -1$ ce qui est absurde donc $x' \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$

donc $\forall M(x) \in E \setminus \{M(\frac{1}{2})\}$, $M(x)$ est inversible d'inverse $M(\frac{x}{2x-1})$

et par suite $(E \setminus \{M(\frac{1}{2})\}, \times)$ est un groupe commutatif

5) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $M(x) \times M(y) = M(x+y-\frac{1}{2})$, $\phi : \mathbb{R} \rightarrow E$
 $x \mapsto \phi(x) = M(\frac{1-x}{2})$

0.5 a) Soient x, y de $\mathbb{R}$ on a $\phi(x+y) = M(\frac{1-(x+y)}{2})$

et on a $\phi(x) \times \phi(y) = M(\frac{1-x}{2}) \times M(\frac{1-y}{2}) = M(\frac{1-x+1-y}{2} - \frac{1}{2}) = M(\frac{1-(x+y)}{2})$
 $= \phi(x+y)$

donc ϕ est un homomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ vers $(E, \times)$

de plus $\phi(\mathbb{R}) = \{\phi(x) / x \in \mathbb{R}\} = \{M(\frac{1-x}{2}) / x \in \mathbb{R}\} = \{M(y) / y \in \mathbb{R}\} = E$

ou bien ϕ est surjective de $\mathbb{R}$ vers E c'ad $\phi(\mathbb{R}) = E$

0,5 b) Comme ϕ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ vers $(E, +)$

12/12

et $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe commutatif alors $(\phi(\mathbb{R}), +)$ est aussi un groupe commutatif c'est-à-dire $(E, +)$ est un groupe commutatif.

0,5 b) D'après Q 5 b) on a $(E, +)$ est un groupe commutatif.

S'élément neutre $\phi(0) = M(\frac{1}{2})$ car 0 est l'élément neutre de $(\mathbb{R}, +)$

et on a d'après Q 4 : $(E - \{M(\frac{1}{2})\}, \times)$ est un groupe commutatif.

donc $(E, +, \times)$ est un corps commutatif.

~~E M~~