المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة
ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵓⵙⴳⵎⵉ ⴰⵏⴰⵎⵓⵔ
ⴷ ⵓⵙⵍⵎⴷ ⴰⵎⵣⵡⴰⵔⵓ ⴷ ⵜⵏⵏⵓⵏⵏⵉⵜ
المركز الوطني للامتحانات المدرسية وتقييم التعلمات

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

الدورة الاستدراكية 2025

- الموضوع -

LLLLLLLLLLLLLLLLLLLL-LLLLL | RS - 22F

3h	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
7	المعامل	مسلك علوم الحياة والأرض ومسلك العلوم الفيزيائية (خيار فرنسية)	الشعبة المسلك

INSTRUCTIONS GENERALES

- ✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;
- ✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- ✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter.

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de quatre exercices et un problème, indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice 1	Suites numériques	3 points
Exercice 2	Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 3	Nombres complexes	3.5 points
Exercice 4	Calcul des probabilités	2.5 points
Problème	Etude de fonctions numériques et calcul intégral	8 points

- ✓ On désigne par $\bar{z}$ le conjugué du nombre complexe z et par $|z|$ son module.
- ✓ ln désigne la fonction logarithme népérien.
- ✓ e est le nombre réel tel que $ln(e)=1$.

Exercice 1 (3 points) :

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = \frac{3}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{2 + u_n}$, pour tout entier naturel n

0.25 1) a) Vérifier que $u_{n+1} = 3 - \frac{4}{2 + u_n}$, pour tout entier naturel n

0.5 b) Montrer par récurrence que $0 < u_n < 2$, pour tout entier naturel n

0.25 2) a) Montrer que $u_{n+1} - u_n = \frac{(1+u_n)(2-u_n)}{2+u_n}$, pour tout entier naturel n

0.5 b) Montrer que la suite (u_n) est croissante et en déduire que (u_n) est convergente.

0.5 c) Montrer que $0 < 2 - u_{n+1} \leq \frac{2}{7}(2 - u_n)$, pour tout entier naturel n

0.5 d) Déduire que $0 < 2 - u_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{7}\right)^n$, pour tout entier naturel n

0.5 e) Déterminer la limite de la suite (u_n)

Exercice 2 (3 points) :

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(0,3,3)$, $B(1,2,1)$, $C(2,3,1)$ et le vecteur $\vec{n}(1,-1,1)$. Soit (P) le plan d'équation $x - y + z - 6 = 0$

0.5 1) a) Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{n}$ et déduire que les points A, B et C sont non alignés.

0.25 b) Montrer que les plans (ABC) et (P) sont parallèles.

2) Soit (S) la sphère telle que : le plan (ABC) est tangent à (S) en A et le plan (P) est tangent à (S) en un point H

0.5 a) Calculer la distance du point A au plan (P) et déduire que le rayon de la sphère (S) est $\sqrt{3}$

0.25 b) Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par A et orthogonale au plan (P)

0.5 c) Montrer que les coordonnées du point H sont $(2,1,5)$.

0.5 d) Montrer que $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 8z + 18 = 0$ est une équation cartésienne de la sphère (S)

0.5 3) Déterminer les deux points d'intersection de la droite (BH) et la sphère (S)

Exercice 3 (3.5 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$, on considère les points

A, B, C et D d'affixes respectives : $a=\dfrac{-\sqrt{3}+i}{2}$, $b=\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$, $c=1+a$ et $d=\overline{c}$

0.5 1) Vérifier que $|a|=1$ et que $\arg(a)\equiv\dfrac{5\pi}{6}[2\pi]$

0.75 2) Vérifier que $\dfrac{c-d}{c-a}=i$ et déduire que le triangle ACD est isocèle rectangle en C

0.5 3) a) Montrer que $d-a=1-i$ et que $b-d=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}(1-i)$

0.25 b) Déduire que les points A, D et B sont alignés.

4) Soit R la transformation du plan qui transforme chaque point M d'affixe z en M' d'affixe z' tel que $z'=az$.

0.5 a) Vérifier que R est une rotation dont on déterminera le centre et l'angle.

0.5 b) Vérifier que $ad=c$ et déduire que $R(D)=C$

0.5 c) Montrer que $\arg(c)\equiv\dfrac{5\pi}{12}[2\pi]$

Exercice 4 (2.5points)

Un sac contient 4 boules blanches et 3 boules noires. (Les boules sont indiscernables au toucher).
Un jeu consiste à tirer successivement et sans remise deux boules du sac.

Les règles du jeu sont comme suit :

- Si les deux boules tirées sont blanches, on note : $+5$.
- Si les deux boules tirées sont noires, on note : -5.
- Si les deux boules tirées sont de couleurs différentes, on note : 0.

On considère les évènements : G « noter +5 » ; Z « noter 0 »

N_1 « La première boule tirée est noire » ; B_2 « la deuxième boule tirée est blanche »

0.5 1) a) Calculer $p(G)$, la probabilité de l'évènement G

0.5 b) Montrer que la probabilité de l'évènement Z est $p(Z)=\dfrac{4}{7}$

0.5 2) a) Calculer la probabilité $p(N_1\cap B_2)$

0.5 b) Montrer que $p(B_2)=\dfrac{4}{7}$

0.5 c) Déduire la probabilité de « noter 0 » sachant que la deuxième boule tirée est blanche.

Problème (8 points) :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x-1+\dfrac{4}{e^x+2}$

Soit $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

0.5 1) Calculer $f(0)$ et $f(\ln 2)$

0.5 2) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

0.5 b) Vérifier que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(x-1)\right)=0$ puis interpréter géométriquement ce résultat.

0.25 3) a) Vérifier que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=x+1-\dfrac{2e^x}{e^x+2}$

0.5 b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{e^x+2}$ puis déduire que la droite d'équation $y=x+1$ est une asymptote oblique à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $-\infty$

0.5 c) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $-1<f(x)-x<1$

0.5 4) a) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=\dfrac{e^{2x}+4}{(e^x+2)^2}$

0.25 b) Déduire que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

0.5 5) a) Montrer que pour tout $m\in\mathbb{R}$, l'équation $f(x)=m$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$

0.5 b) Soit α l'unique solution de l'équation $f(x)=0$

Vérifier que $-1<\alpha<0$ et montrer que $e^{\alpha}=\dfrac{2(1+\alpha)}{1-\alpha}$

0.5 6) a) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$: $f''(x)=\dfrac{4e^x(e^x-2)}{(e^x+2)^3}$

0.25 b) Etudier le signe de e^x-2 sur $\mathbb{R}$.

0.5 c) Déduire que la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet un point d'inflexion que l'on déterminera.

0.5 d) Montrer que $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\ln 2}{2}$ est l'équation de la tangente à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse $\ln 2$

0.75 7) Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

0.5 8) a) Montrer que $\displaystyle\int_0^{\ln 2}\frac{1}{e^x+2}\,dx=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right)$

0.5 b) Calculer, en unité d'aire, l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe $(\mathcal{C}_f)$, la droite d'équation $y=x-1$, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x=\ln 2$

Exercice 1

1) a) soit $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = \frac{3u_n+2}{2+u_n} = \frac{3u_n+6-4}{2+u_n} = \frac{3(u_n+2)}{2+u_n} - \frac{4}{2+u_n}$$

Ainsi $\boxed{u_{n+1} = 3 - \frac{4}{2+u_n}}$

b) Pour $n=0$, $u_0 = \frac{3}{2}$: $0 < u_0 < 2$, vraie

soit $n \geq 0$, supposons que $0 < u_n < 2$

Montrons que $0 < u_{n+1} < 2$

on a : $0 < u_n < 2 \Rightarrow 2 < 2+u_n < 4$

$$\Rightarrow 1 < 3 - \frac{4}{2+u_n} < 2$$

$$\Rightarrow 0 < u_{n+1} < 2 \text{, comme } 0 < 1$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 2$, d'après l'axiome de la récurrence

2) a) On a, $u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n+2}{2+u_n} - u_n$

$$= \frac{3u_n+2-2u_n-u_n^2}{2+u_n}$$

$$= \frac{-u_n^2+u_n+2}{2+u_n}$$

$$= \frac{-(u_n+1)(u_n-2)}{2+u_n}$$

D'où $u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n+1)(2-u_n)}{2+u_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

b) On a : $0 < u_n < 2$ et $u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n+1)(2-u_n)}{2+u_n}$, $\forall n \geq 0$

Donc $2-u_n > 0$, $u_n+1 > 0$ et $2+u_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

soit $u_{n+1} - u_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Ainsi (u_n) est une suite croissante

* on a : (u_n) est croissante et majorée par 2

Donc (u_n) est convergente

c) on a : $0 \leq u_n < 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$ donc $2 - u_{n+1} > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\text{et } 2 - u_{n+1} - \frac{2}{7}(2 - u_n) = 2 - \left(3 - \frac{4}{2+u_n}\right) - \frac{2}{7}(2-u_n)$$

$$= -1 + \frac{4}{2+u_n} - \frac{2}{7}(2 - u_n)$$

$$= \frac{2 - u_n}{2+u_n} - \frac{2}{7}(2-u_n)$$

$$= (2 - u_n)\left(\frac{1}{2+u_n} - \frac{2}{7}\right)$$

$$= (2 - u_n)\left(\frac{3 - 2u_n}{7(2+u_n)}\right)$$

Comme (u_n) est croissante donc $u_n \geq u_0$ et $u_0 = \frac{3}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

soit $3 - 2u_n \leq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

D'où $0 < 2 - u_{n+1} \leq \frac{2}{7}(2 - u_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$

d) soit $n \in \mathbb{N}$ on a : $0 < 2 - u_n \leq \frac{2}{7}(2 - u_{n-1})$

$$0 < 2 - u_{n-1} \leq \frac{2}{7}(2 - u_{n-2})$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$0 < 2 - u_1 \leq \frac{2}{7}(2 - u_0)$$

En multipliant membre à membre et après simplification

on obtient : $0 < 2 - u_n \leq \left(\frac{2}{7}\right)^n (2 - u_0)$ et $u_0 = \frac{3}{2}$

d'où $0 < 2 - u_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{7}\right)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

e) on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < 2 - u_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{7}\right)^n$

et $\left|\frac{2}{7}\right| < 1 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{7}\right)^n = 0$

D'où $\lim_{n \to +\infty} (2 - u_n) = 0$ soit $\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 2}$

Exercice 2

1) a) on a $\vec{AB}\begin{pmatrix}1-0\\2-3\\1-3\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{AB}\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{AC}\begin{pmatrix}2-0\\3-3\\1-3\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{AC}\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}$

et $\vec{AB}\wedge\vec{AC} = \begin{vmatrix}-1 & 0\\-2 & -2\end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix}1 & 2\\-2 & -2\end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix}1 & 2\\-1 & 0\end{vmatrix}\vec{k}$

$= 2\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$ et $\vec{n}(1,-1,1) \Rightarrow \vec{n} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$

Donc $\boxed{\vec{AB}\wedge\vec{AC} = 2\vec{n}}$

* on a $\vec{AB}\wedge\vec{AC} \neq \vec{0}$ donc A, B et C ne sont pas alignés

b) on a : $\vec{AB}\wedge\vec{AC}$ est un vecteur normal au plan (ABC)

et $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (P)

comme $\vec{AB}\wedge\vec{AC}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires ($\vec{AB}\wedge\vec{AC} = 2\vec{n}$)

on en déduit que $(ABC) \parallel (P)$

2) a) on a : $d(A,(P)) = \dfrac{|0-3+3-6|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1}} = \dfrac{6}{\sqrt{3}} \Rightarrow \boxed{d(A,(P)) = 2\sqrt{3}}$

* On a (ABC) est tangent à (S) en A et (P) est tangent à (S) en H

et $(ABC) \parallel (P)$

Donc [AH] est un diamètre et $d(A,(P)) = AH$ $\left(\begin{array}{l}(AH)\perp(ABC)\\ \text{et } (AH)\perp(P)\end{array}\right)$

Ainsi le rayon de (S) est $\dfrac{d(A,(P))}{2}$ soit $\sqrt{3}$

b) on a (Δ) est la droite passant par et orthogonal au plan (P)

c.à.d $\vec{n}(1,-1,1)$ est un vecteur directeur de la droite (Δ)

Ainsi $(\Delta) : \begin{cases} x = t \\ y = 3-t \\ z = 3+t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

c) on a H est le point ou (S) est tangente à (P)

c.à.d $H \in (\Delta) \cap (P)$, comme $(AH)\perp(P)$

c.à.d $\begin{cases} x_H = t \\ y_H = 3-t \\ z_H = 3+t \end{cases}$ et $x_H - y_H + z_H + 6 = 0 \Rightarrow t-3+t+3+t-6=0$

$\Rightarrow t = 2$

soit $H(2,1,5)$

d) on a $[AH]$ est un diamètre de (S), comme A et H sont respectivement les points de contact de (ABC) et (P) avec (S) et $(ABC) \parallel (P)$

Donc le centre de (S) est le milieu du segment $[AH]$

soit $\left(\frac{0+2}{2}, \frac{3+1}{2}, \frac{3+5}{2}\right)$, d'où $(1,2,4)$ est le centre de (S)

Ainsi $(S) : (x-1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2 = \sqrt{3}^2$

Au final, $x^2+y^2+z^2-2x-4y-8z+18=0$ est une équation de (S)

3) on a $(BH)(B, \overrightarrow{BH})$ est la droite passant par B et de vecteur directeur $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix}$ soit $(BH) : \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-t \\ z = 1+4t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

Soit $M(x,y,z)$ un point de l'espace

$M \in (BH)\cap(S) \iff \begin{cases} x = 1+t & (1) \\ y = 2-t & (2) \\ z = 1+4t & (3) \\ (x-1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2 = \sqrt{3}^2 & (4) \end{cases}$

Soit $t^2+t^2+(-3+4t)^2 = 3 \Rightarrow 18t^2-24t+6=0$

$\Rightarrow 3t^2-4t+1=0 \; (*)$

Donc $t \in \left\{1 ; \frac{1}{3}\right\}$ les solutions de $(*)$ sont 1 et $\frac{1}{3}$

En remplaçant t dans (1), (2) et (3) on obtient

$M_1\begin{pmatrix}2\\1\\5\end{pmatrix}$ et $M_2\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right)$ les deux points d'intersection de (BH) et (S)

Exercice 3

1) on a: $a = \frac{-\sqrt{3}+i}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2} \Rightarrow |a| = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1$

et $a = -\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)$

$= \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

Ainsi $\arg(a) = \frac{5\pi}{6} \; [2\pi]$

2) * On a : $\frac{c-d}{c-a} = \frac{1+a-\overline{1+a}}{1+a-a} = \frac{1+a-1-\bar{a}}{1} = -\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)$

Donc $\frac{c-d}{c-a} = i$

* $\frac{CD}{CA} = \frac{|c-d|}{|c-a|} = \left|\frac{c-d}{c-a}\right| = |i| = 1 \Rightarrow \boxed{CD = CA}$

et $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DC}) \equiv \arg\left(\frac{c-d}{c-a}\right) [2\pi] \equiv \arg(i) [2\pi] = \frac{\pi}{2}$

c.à.d $\widehat{ACD} = \frac{\pi}{2}$

Ainsi ACD est isocèle rectangle en C

3) a) * $d-a = \bar{c} - a = \overline{1+a} - a = 1+\bar{a} - a = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)$

Donc $d-a = 1-i$

* $b-d = \frac{1-i\sqrt{3}}{2} - \bar{c} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 - \bar{a} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$

Donc $b-d = \frac{\sqrt{3}-1}{2} - i\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2}(1-i)$

b) On a : $d-a = 1-i$ et $b-d = \frac{\sqrt{3}-1}{2}(1-i)$

c.à.d $\frac{b-d}{d-a} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ et $\frac{\sqrt{3}-1}{2} \in \mathbb{R}$

Donc A, B et D sont alignés

4) a) On a : $z' = az \Leftrightarrow z' = \left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)z$

$\Leftrightarrow z' - 0 = e^{i\frac{5\pi}{6}}(z-0)$

Donc R est la rotation de centre O et d'angle $\frac{5\pi}{6}$

b) *) $ad = a\bar{c} = a(\overline{1+a}) = a(1+\bar{a}) = a + a\bar{a} = a + |a|^2 = a+1$

Donc $\boxed{ad = c}$

*) comme $c = ad$ et $C(c)$ et $D(d)$ alors $R(D) = C$

c) On a : $\arg(c) \equiv \arg(ad) [2\pi] \Rightarrow \arg(c) \equiv \arg(a) + \arg(d) [2\pi]$

$\Rightarrow \arg(c) \equiv \frac{5\pi}{6} + \arg(\bar{c}) [2\pi]$

comme $\arg(\bar{c}) \equiv -\arg(c) [2\pi]$

$\Rightarrow 2\arg(c) \equiv \frac{5\pi}{6} [2\pi]$

et $\arg(a) \equiv \frac{5\pi}{6} [2\pi]$

$\Rightarrow \boxed{\arg(c) \equiv \frac{5\pi}{12} [2\pi]}$

Exercice 4

le sac : | (B) (B) (B) (B) (N) (N) (N) |

1) a) L'expérience : tirage successive et sans remise de deux boules du sac qui contient 7 boules

le nombre de tirage possible est : $A_7^2 = 7 \times 6 = 42$

les boules sont indiscernables au toucher, il s'agit d'une équiprobabilité

On a : G « noter +5 » ≡ « les deux boules tirées sont blanches » |B|B|

Donc $P(G) = \frac{A_4^2}{A_7^2} = \frac{4\times3}{7\times6} \Rightarrow \boxed{P(G) = \frac{2}{7}}$

b) On a : Z « noter 0 » ≡ " les deux boules tirées sont de couleurs différentes "

|B|N| ou |N|B|

/!\ l'ordre compte

Donc $P(Z) = \frac{A_4^1 \times A_3^1}{A_7^2} \times 2 = \frac{4\times3\times2}{7\times6}$

Ainsi $\boxed{P(Z) = \frac{4}{7}}$

2) a) " $N_1 \cap B_2$ " ≡ " N_1 et B_2 " ≡ |N|B|

Donc $P(N_1 \cap B_2) = \frac{A_3^1 \times A_4^1}{A_7^2} = \frac{3\times4}{7\times6} \Rightarrow P(N_1 \cap B_2) = \frac{2}{7}$

b) B_2 " la deuxième boule tirée est blanche " ≡ |B|B| ou |N|B|

Donc $P(B_2) = \frac{A_4^2 + A_3^1 \times A_4^1}{A_7^2} = \frac{4\times3+3\times4}{7\times6} \Rightarrow \boxed{P(B_2) = \frac{4}{7}}$

c) On sait que $P(Z/B_2) = \frac{P(Z\cap B_2)}{P(B_2)} = \frac{A_3^1 \times A_4^1}{A_7^2} \times \frac{1}{\frac{4}{7}}$

D'où $\boxed{P(Z/B_2) = \frac{1}{2}}$; avec $Z \cap B_2 \equiv$ |N|B| (1ère, 2ème)

Problème

1) $f(0) = 0 - 1 + \frac{4}{e^0+2} \Rightarrow \boxed{f(0) = \frac{1}{3}}$

$f(\ln 2) = \ln(2) - 1 + \frac{4}{e^{\ln 2}+2} \Rightarrow \boxed{f(\ln 2) = \ln 2}$

2) a) * $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(x - 1 + \frac{4}{e^x+2}\right) = +\infty$

puisque $\lim_{x\to+\infty} x-1 = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(x - 1 + \frac{4}{e^x+2}\right) = -\infty$

comme $\lim_{x\to-\infty} (x-1) = -\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$

b) * On a : $\lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - (x-1)\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{4}{e^x+2}\right) = 0$

puisque $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

* On a : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - (x-1)\right) = 0$

Donc (C_f) admet comme asymptote oblique la droite d'équation $y = x - 1$ au voisinage de $+\infty$

3 a) Soit $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x - 1 + \frac{4}{e^x+2} = x + 1 - 2 + \frac{4}{e^x+2}$

$= x + 1 - \frac{2e^x + 4 - 4}{e^x+2}$

Donc $\boxed{f(x) = x + 1 - \frac{2e^x}{e^x+2}}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

b) * $\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{e^x+2} = 0$; puisque $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$

* On a : $\lim_{x\to-\infty} \left(f(x) - (x+1)\right) = \lim_{x\to-\infty} -\frac{2e^x}{e^x+2} = 0$

et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Donc (C_f) admet une asymptote oblique d'équation $y = x + 1$ au voisinage de $+\infty$

c) soit $x \in \mathbb{R}$

On a: $f(x)-(x-1) = \frac{4}{e^x+2}$, comme $e^x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Donc $f(x)-x+1 > 0$ d'où $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)-x > -1}$

On a: $f(x)-(x+1) = -\frac{2e^x}{e^x+2}$, comme $e^x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Donc $f(x)-x-1 \quad 0 \Rightarrow \boxed{\forall x \in \mathbb{R}\ f(x)-x < 1}$

Conclusion: $\quad -1 < f(x)-x < 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$

4) a) soit $x \in \mathbb{R}$,

On a: $f'(x) = \left(x-1+\frac{4}{e^x+2}\right)' = 1 - \frac{4(e^x+2)'}{(e^x+2)^2} = \frac{e^{2x}+4e^x+4-4e^x}{(e^x+2)^2}$

D'où $f'(x) = \frac{e^x+4}{(e^x+2)^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

b) On sait que $e^x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ donc $f'(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Ainsi f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

5) a) On a: f est une fonction continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$

et $f(\mathbb{R}) = \left]\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[= \mathbb{R}$

Donc pour tout $m \in \mathbb{R} = f(\mathbb{R})$, l'équation $f(x) = m$

admet une solution unique dans $\mathbb{R}$

b) On a f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$

en particulier sur $[-1,0]$ et $f(-1) \times f(0) < 0$

comme $f(-1) = -1-1+\frac{4}{e^{-1}+2} = -2+\frac{4}{e^{-1}+2}$ et $\frac{4}{e^{-1}+2} < 2 \Rightarrow f(-1) < 0$

et $f(0) = \frac{1}{3} \Rightarrow f(0) > 0$

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation

$f(x)=0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]-1,0[$.

* On a: $f(\alpha)=0 \Leftrightarrow \alpha-1+\frac{4}{e^\alpha+2} = 0 \Leftrightarrow e^\alpha+2 = \frac{-4}{\alpha-1}$

$\Leftrightarrow e^\alpha = \frac{-2+2\alpha+4}{1-\alpha}$ d'où $\boxed{e^\alpha = \frac{2(\alpha+1)}{1-\alpha}}$

5) a) Soit $x \in \mathbb{R}$

On a : $f''(x) = \left(\dfrac{e^{2x}+4}{(e^x+2)^2}\right)' = \dfrac{2e^{2x}(e^x+2)^2 - 2(e^{2x}+4)(e^x+2)e^x}{(e^x+2)^4}$

$= \dfrac{(e^x+2)\left[2e^{2x}(e^x+2) - 2e^x(e^{2x}+4)\right]}{(e^x+2)^4}$

d'où $\boxed{f''(x) = \dfrac{4e^x(e^x-2)}{(e^x+2)^3}}$; $\forall x \in \mathbb{R}$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$, $e^x - 2 = 0 \iff e^x = 2 \iff \boxed{x = \ln 2}$

Tableau de signe de $e^x - 2$

x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
e^x-2	$-$	0	$+$

c) On a : $f''(\ln(2)) = \dfrac{4e^{\ln 2}(e^{\ln 2}-2)}{(e^x+2)^3} \Rightarrow f''(\ln 2) = 0$

et comme f'' change de signe autour de $\ln(2)$

puisque le signe de $f''(x)$ est celui de $e^x - 2$

car, $e^x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Ainsi (C_f) admet un point d'inflexion de coordonnée

$(\ln(2); f(\ln 2))$ soit $(\ln 2; \ln 2)$

d) Soit (T) la tangente à (C_f) au point d'abscisse $\ln 2$

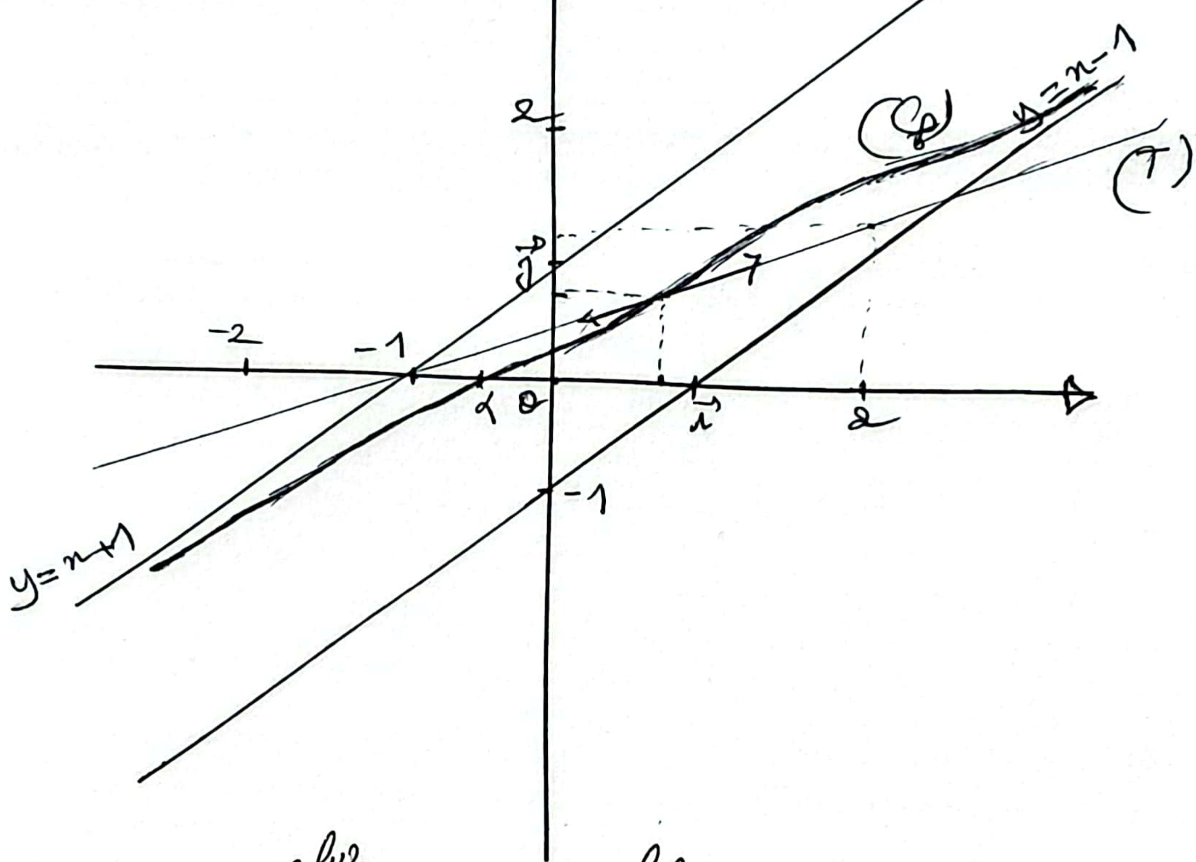
on sait que : $(T) : y = f'(\ln(2))(x - \ln 2) + f(\ln(2))$

et $f'(\ln 2) = \dfrac{e^{2\ln 2}+4}{(e^{\ln 2}+2)^2} = \dfrac{(e^{\ln 2})^2+4}{(2+2)^2} = \dfrac{8}{16} \Rightarrow f'(\ln 2) = \dfrac{1}{2}$

et $f(\ln 2) = \ln 2$

D'où $(T) : y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{\ln 2}{2}$

7) Construction de $(\mathcal{C}_f)$:



8) a) On a : $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{1}{e^x+2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\ln 2} \frac{2+e^x-e^x}{e^x+2}\,dx$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\ln}\left(1-\frac{e^x}{e^x+2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\Big[x - \ln(e^x+2)\Big]_0^{\ln 2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln 2 - \ln(4) + \ln(3)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln 3 - \ln 2\right)$$

d'où $\boxed{\displaystyle\int_0^{\ln(2)} \frac{1}{e^x+2}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right)}$

b) soit $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan délimité par la courbe (C_f), la droite d'equation $y = x - 1$ l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \ln 2$

Donc $\mathcal{A} = \int_0^{\ln 2} |f(x) - (x-1)| \, dx \times u.a$ où $u.a = \|\vec{i}\|^2$

$= \int_0^{\ln 2} \left(f(x) - (x-1) \right) dx \times u.a$; comme (C_f) est au-dessus de $y = x - 1$

$= \int_0^{\ln 2} \frac{4}{e^x + 2} \, dx \times u.a$

$= 4 \int_0^{\ln 2} \frac{1}{e^x + 2} \, dx \times u.a$

d'où $\boxed{\mathcal{A} = 2 \ln\left(\frac{3}{2}\right) \times u.a}$

Have a nice time

05/07/2025, Prof. FARSANE