الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2025
- الموضوع -

LLLLLLLLLLLLLLLLLLLL-LLLLL | NS - 22F

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة
ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵓⵙⴳⵎⵉ ⴰⵏⴰⵎⵓⵔ
ⴷ ⵓⵙⵍⵎⴷ ⴰⵎⵣⵡⴰⵔⵓ ⴷ ⵜⵉⴷⵏⵉⵏ
المركز الوطني للامتحانات المدرسية وتقييم التعلمات

3h	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
7	المعامل	مسلك علوم الحياة والأرض ومسلك العلوم الفيزيائية (خيار فرنسية)	الشعبة المسلك

INSTRUCTIONS GENERALES

- ✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;
- ✓ Le candidat peut traiter les exercices et le problème suivant l'ordre qui lui convient ;
- ✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter.

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de trois exercices et un problème, indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice 1	Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 2	Nombres complexes	3.5 points
Exercice 3	Calcul des probabilités	2.5 points
Problème	Etude de fonctions numériques, suites numériques et calcul intégral	11 points

- ✓ On désigne par $\bar{z}$ le conjugué du nombre complexe z et par $|z|$ son module.
- ✓ ln désigne la fonction logarithme népérien.
- ✓ e est le nombre réel tel que $ln(e)=1$.

Exercice 1 (3 points) :

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère les points $A(0,0,2)$, $B(2,0,0)$ et la sphère (S) de centre O et de rayon $R=2$

0.25 1) a) Déterminer l'équation cartésienne de la sphère (S)

0.5 b) Vérifier que les points A et B appartiennent à la sphère (S)

2) Soit I le milieu du segment $[AB]$.

0.25 a) Déterminer l'intersection du plan (OAB) avec la sphère (S)

0.5 b) Vérifier que $\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{AB}=0$ puis montrer que $d\left(O,(AB)\right)=\sqrt{2}$

3) On considère un point $M(0,m,0)$ de l'espace, où $m\in\mathbb{R}$

0.5 a) Vérifier que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AM}=2m\vec{i}+4\vec{j}+2m\vec{k}$

0.25 b) Déduire que $mx+2y+mz-2m=0$ est une équation cartésienne du plan (ABM)

0.25 c) Montrer que $d\left(O,(ABM)\right)=\dfrac{2|m|}{\sqrt{4+2m^2}}$

4) Le plan (ABM) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ_m) de rayon r

0.5 Montrer que $r=\sqrt{2+\dfrac{4}{2+m^2}}$ et déduire que $\sqrt{2}<r\leq 2$, pour tout $m\in\mathbb{R}$

Exercice 2 (3.5 points) :

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$, on considère les points A, B , C, D et Ω d'affixes respectives $a=1+2\mathrm{i}$, $b=\overline{a}$, $c=\dfrac{3(3+\mathrm{i})}{2}$, $d=\dfrac{3(1+i)}{2}$ et $\omega=\dfrac{5}{2}$

0.5 1) a) Vérifier que $a+b=2$ et déduire que l'affixe du point P, milieu du segment $[AB]$ est $p=1$

0.5 b) Montrer que a et b sont les solutions de l'équation : $z^2-2z+5=0$ dans l'ensemble $\mathbb{C}$

0.5 2) a) Vérifier que $|\omega-a|=|\omega-b|=|\omega-c|$

0.25 b) Déduire que Ω est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC

0.25 3) a) Vérifier que $\dfrac{d-c}{a-b}=\dfrac{3}{4}i$

0.5 b) Montrer que $d-b=(c-a)e^{i\frac{\pi}{2}}$ puis déduire que les droites (DB) et (AC) sont perpendiculaires

4) Soit h l'homothétie de centre C et de rapport $\dfrac{2}{3}$ et qui transforme chaque point M du plan d'affixe z en un point M' d'affixe z' . On pose $h(P)=G$

0.25 a) Vérifier que $z'=\dfrac{2}{3}z+\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}i$

0.25 b) Montrer que l'affixe du point G est $g=\dfrac{13}{6}+\dfrac{1}{2}i$

0.5 5) Montrer que les points Ω, G et D sont alignés.

Exercice 3 (2.5 points) :

Une urne contient six boules indiscernables au toucher :
Quatre boules blanches numérotées : 0 ; 1 ; 1 ; 1 et deux boules noires numérotées : 0 ; 1
On tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne.
On considère les évènements suivants :
A « Les deux boules tirées portent le numéro 1 »
B « Les deux boules tirées sont de même couleur »

0.5 1) a) Montrer que $p(A)=\dfrac{2}{5}$

0.5 b) Montrer que $p(B)=\dfrac{7}{15}$

0.5 c) Les évènements A et B sont – ils indépendants ? justifier.

2) On répète l'expérience précédente trois fois successives. On considère la variable aléatoire X indiquant le nombre de fois que l'on réalise l'événement A.

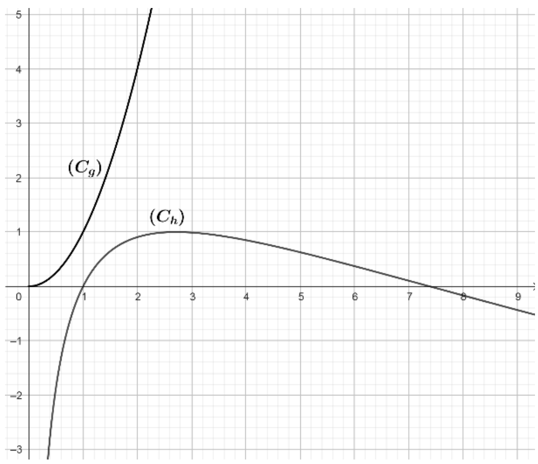
0.75 a) Recopier et compléter le tableau ci-dessous, représentant la loi de probabilités de X

$X=x_i$	0	1	2	3
$p(X=x_i)$	$\dfrac{27}{125}$			

0.25 b) Calculer l'espérance $E(X)$ de la variable aléatoire X

Problème (11 points) :

Partie I : Le graphique ci-contre représente les courbes $(\mathcal{C}_g)$ et $(\mathcal{C}_h)$ des fonctions : $g : x \mapsto x^2$ et $h : x \mapsto 2\ln x-(\ln x)^2$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$ dans un même repère orthonormé.



0.25 1) a) Justifier graphiquement que pour tout x de $]0,+\infty[$:
$$g(x)-h(x)>0$$

0.5 b) Déduire que pour tout x de $]0,+\infty[$: $\dfrac{2\ln x-(\ln x)^2}{x^2}<1$

0.5 2) a) Vérifier que la fonction $H : x \mapsto x\ln x - x$ est une primitive de la fonction $x \mapsto \ln x$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$, puis déduire que $\int_1^{e^2} \ln(x)\,dx = 1+e^2$

0.5 b) En utilisant une intégration par parties, montrer que $\int_1^{e^2} (\ln x)^2 dx = 2e^2-2$

0.5 c) Résoudre sur l'intervalle $]0,+\infty[$, l'équation $h(x)=0$ et déduire les deux points d'intersection de la courbe $(\mathcal{C}_h)$ avec l'axe des abscisses.

0.5 d) Déduire, en unité d'aire, l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe $(\mathcal{C}_h)$, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x=1$ et $x=e^2$.

Partie II :

On considère la fonction numérique f définie sur $\left]0,+\infty\right[$ par $f\left(x\right)=x-\dfrac{\left(\ln x\right)^2}{x}$

Soit $\left(\mathcal{C}_f\right)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

0.5 1) a) Vérifier que $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-\infty$ et donner une interprétation géométrique de ce résultat.

0.5 b) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\ln x\right)^2}{x}=0$ (On peut poser $t=\sqrt{x}$), puis calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

0.5 c) Déduire que la droite d'équation $y=x$ est une asymptote oblique de $\left(\mathcal{C}_f\right)$ au voisinage de $+\infty$

0.75 2) a) Montrer que pour tout x de $\left]0,+\infty\right[$, $f'(x)=1-\dfrac{2\ln x-\left(\ln x\right)^2}{x^2}$

0.5 b) Montrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $\left]0,+\infty\right[$

(On peut utiliser la question Partie I-1-b)

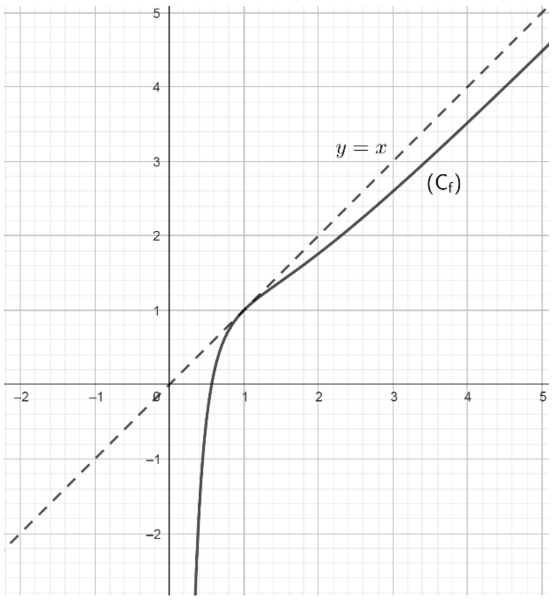
0.5 3) a) Montrer que l'équation $f\left(x\right)=0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $\left]0,+\infty\right[$.

0.75 b) Vérifier que $e^{-1}<\alpha<1$ et montrer que $\ln\alpha=-\alpha$.

0.25 c) Montrer que $f\left(x\right)\le x$, pour tout $x\in\left]0,+\infty\right[$

0.5 d) Montrer que $y=x$ est l'équation de la tangente $\left(T\right)$ à la courbe $\left(\mathcal{C}_f\right)$ au point d'abscisse 1

4) Le graphique ci-contre représente la courbe $\left(\mathcal{C}_f\right)$ dans le repère orthonormé $\left(O,\vec{i};\vec{j}\right)$.



Soit φ la restriction de f sur l'intervalle $\left]0,1\right]$

0.5 a) Montrer que φ admet une fonction réciproque φ^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.

(Il n'est pas demandé de déterminer l'expression $\varphi^{-1}\left(x\right)$)

0.5 b) Montrer que φ^{-1} est dérivable en 0 et que $\left(\varphi^{-1}\right)'(0)=\dfrac{\alpha}{2+2\alpha}$

0.75 c) Recopier la courbe de φ et construire la courbe de φ^{-1} dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

Partie III :

Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0=e$ et $u_{n+1}=f(u_n)$, pour tout n de $\mathbb{N}$

0.5 1) Montrer par récurrence que $1<u_n$, pour tout n de $\mathbb{N}$

0.5 2) a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante. (On peut utiliser la question Partie II-3-c)

0.25 b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

0.5 c) Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Exercice 1 Ain Sbaa

1) a) On a : (S) est la sphère de centre $O(0,0,0)$ et de rayon 2

Donc $(S) : (x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2=2^2$

D'où $(S) : x^2+y^2+z^2=4$ est l'équation cartésienne de la sphère (S)

b) on a : $A\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$ vérifie $0^2+0^2+2^2=4$ donc $A\in(S)$

et $B\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$ vérifie $2^2+0^2+0^2=4$ donc $B\in(S)$

2) a) On a : (S) est la sphère de centre O et de rayon 2 et $O\in(OAB)$, donc (OAB) coupe (S) selon le cercle de centre O et de rayon 2

b) on a : $\overrightarrow{OI}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ comme, $I\left(\frac{0+2}{2},\frac{0+0}{2},\frac{2+0}{2}\right)\Rightarrow I\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2-0\\0-0\\0-2\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}$

Donc $\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}=1\times2+0\times0+1\times(-2)=0$

* on a : $\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{AB}=0 \Rightarrow \overrightarrow{OI}\perp\overrightarrow{AB}$ soit $(OI)\perp(AB)$ en I, comme I est le milieu de [AB]

c.à.d I est le projeté orthogonal de O sur (AB)

Ainsi : $d(O,(AB))=OI=\sqrt{1^2+0^2+1^2}\Rightarrow d(O,(AB))=\sqrt{2}$

3) a) on a : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AM}=\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\m\\-2\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}0 & m\\-2 & -2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}2 & 0\\-2 & -2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}2 & 0\\0 & m\end{vmatrix}\vec{k}$

Donc $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AM}=2m\vec{i}+4\vec{j}+2m\vec{k}$

b) on a $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AM}=2m\vec{i}+4\vec{j}+2m\vec{k}\Rightarrow\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AM}\neq\vec{0}$

Donc, $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AM}$ est un vecteur normal au plan (ABM)

Soit l'équation du plan $(ABM) : 2mx+4y+2mz+d=0$ où $d\in\mathbb{R}$

a $A\in(ABM) : 2m\times0+4\times0+2m\times2+d=0\Rightarrow d=-4m$

Ainsi $(ABC) : mx+2y+mz-2m=0$

c) on sait que $d(O,(ABM)) = \dfrac{|m\times 0 + 2\times 0 + m\times 0 - 2m|}{\sqrt{m^2+2^2+m^2}}$

$= \dfrac{|-2m|}{\sqrt{4+2m^2}}$

d'où $\boxed{d(O,(ABM)) = \dfrac{2|m|}{\sqrt{4+2m^2}}}$

4) on a (ABM) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ_m) de rayon r

on sait que $r = \sqrt{2^2 - (d(O,(ABM)))^2} = \sqrt{4 - \left(\dfrac{2|m|}{\sqrt{4+2m^2}}\right)^2}$

$= \sqrt{\dfrac{16+8m^2-2^2m^2}{4+2m^2}} = \sqrt{\dfrac{8+2m^2}{2+m^2}}$

D'où $\boxed{r = \sqrt{2 + \dfrac{4}{2+m^2}}}$; $\dfrac{8+2m^2}{2+m^2} = \dfrac{4+2m^2}{2+m^2} + \dfrac{4}{2+m^2}$

* on a : $\dfrac{4}{2+m^2} > 0 \Rightarrow \sqrt{2+\dfrac{4}{2+m^2}} > \sqrt{2}$
$\forall m \in \mathbb{R}$ $\qquad \forall m \in \mathbb{R}$

et $2 + \dfrac{4}{2+m^2} - 4 = \dfrac{4-4-2m^2}{2+m^2} = \dfrac{-2m^2}{2+m^2}$; $\dfrac{m^2}{2+m^2} \geq 0$

soit $2 + \dfrac{4}{2+m^2} \leq 4 \Rightarrow \sqrt{2+\dfrac{4}{2+m^2}} \leq 2$

D'où $\sqrt{2} < r \leq 2$, pour tout m de $\mathbb{R}$

Exercice 2

1) a) on a : $a+b = a+\bar{a} = 1+2i+1-2i \Rightarrow \boxed{a+b=2}$

+ On P est le milieu du segment $[AB] \Rightarrow p = \dfrac{a+b}{2}$.

Donc, $\boxed{p=1}$

b) on sait que l'équation $z^2-2z+5=0$ a deux racines complexes conjuguées, comme $\Delta = (-2)^2 - 4\times1\times5 = -16$ est négatif

On a : $a=1+2i$ vérifie : $(1+2i)^2 - 2(1+2i)+5 = 1+4i-4-2-4i+5$
$= 0$

Donc a est solution de cette équation

Ainsi $\bar{a} = b$ est l'autre solution

D'où les solution de l'équation $z^2-2z+5=0$ sont a et b

2) a) on a : $|\omega - a| = \left|\dfrac{5}{2} - (1+2i)\right| = \left|\dfrac{3}{2} - 2i\right| = \sqrt{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 + (-2)^2} = \dfrac{5}{2}$

et $|\omega - b| = |\omega - \bar{a}| = |\overline{\omega - a}| = |\omega - a| = \dfrac{5}{2}$ (comme $\omega \in \mathbb{R}$

et $|w-c| = \left|\frac{5}{2} - \frac{3(3+i)}{2}\right| = \left|\frac{5}{2} - \frac{9}{2} - \frac{3}{2}i\right| = \left|\frac{-4}{2} - \frac{3}{2}i\right|$

$= \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 + \left(\frac{-3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{16+9}{4}}$

Donc $|w-c| = \frac{5}{2}$

D'où $|w-a| = |w-b| = |w-c|$

b) On a: $\Omega A = |w-a|$ et $\Omega B = |w-b|$ et $\Omega C = |w-c|$

soit $\Omega A = \Omega B = \Omega C$

Ainsi Ω est le centre du cercle circonscrit au triangle (ABC)

3) a) On a: $\frac{d-c}{a-b} = \frac{\frac{3(1+i)}{2} - \frac{3(3+i)}{2}}{1+2i-(1-2i)} = \frac{\frac{-6}{2}}{4i} = \frac{-3}{4i}$

Donc, $\boxed{\frac{d-c}{a-b} = \frac{3}{4}i}$

b) On a: $\frac{d-b}{c-a} = \frac{\frac{3(1+i)}{2} - (1-2i)}{\frac{3(3+i)}{2} - (1+2i)} = \frac{\frac{3+3i-2+4i}{2}}{\frac{9+3i-2-4i}{2}} = \frac{1+7i}{7-i}$

Donc $\frac{d-b}{c-a} = i$ et $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ soit $\boxed{d-b = (c-a)e^{i\frac{\pi}{2}}}$

* On a: $\frac{d-b}{c-a} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, donc $(DB) \perp (AC)$

4) a) On a: $h(M) = M' \Leftrightarrow \vec{CM'} = \frac{2}{3}\vec{CM}$

$\Leftrightarrow z' - c = \frac{2}{3}(z - c)$

$\Leftrightarrow z' = \frac{2}{3}z - \frac{3(3+i)}{2}\left(\frac{2}{3} - 1\right)$

$\Leftrightarrow z' = \frac{2}{3}z + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$

b) On a: $h(P) = G \Leftrightarrow g = \frac{2}{3}p + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$

$\Leftrightarrow g = \frac{2}{3} + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$

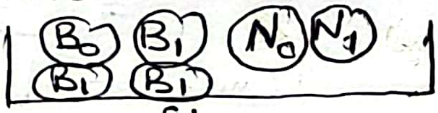
Donc $\boxed{g = \frac{13}{6} + \frac{1}{2}i}$

5) On a: $\frac{d-w}{g-w} = \frac{\frac{3(1+i)}{2} - \frac{5}{2}}{\frac{13}{6} + \frac{1}{2}i - \frac{5}{2}} = \frac{\frac{-2+3i}{2}}{\frac{13-15}{6} + \frac{1}{2}i} = \frac{-1+\frac{3}{2}i}{-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}i}$

Donc $\frac{d-w}{g-w} = \frac{1}{3}$ d'où les points Ω, G et sont alignés

Exercice 3

1) a) L'expérience aléatoire : tirage simultanément au hasard de deux boule de l'urne



L'urne

les boules sont indiscernables au toucher

A « les deux tirées portent le numero 1 » donc A « ① ① »

Donc $p(A) = \dfrac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} = \dfrac{C_4^2}{C_6^2} = \dfrac{6}{15} \Rightarrow \boxed{p(A) = \dfrac{2}{5}}$

b) on a, B « les deux boules tirées sont de même couleur »

B « BB ou NN »

Donc $P(B) = \dfrac{C_4^2 + C_2^2}{C_6^2} = \dfrac{6+1}{15} \Rightarrow \boxed{P(B) = \dfrac{7}{15}}$

c) On a : $A \cap B$ « les deux boules portent le numéro 1 et les deux boules sont de même couleur »

cad $A \cap B$ « B_1 B_1 »

Donc $P(A \cap B) = \dfrac{C_3^2}{C_6^2} = \dfrac{3}{15} \Rightarrow P(A \cap B) = \dfrac{1}{5}$

et $p(A) \times p(B) = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{7}{15} = \dfrac{14}{75}$

Ainsi $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B) \Rightarrow$ A et B ne sont pas indépendants

2) a) L'expérience est répété 3 fois, x est le nombre de réalisation de l'événement A

$P(X=1) = C_3^1 (P(A))^1 (1-P(A))^{3-1} = 3 \times \dfrac{2}{5} \times \left(\dfrac{3}{5}\right)^2 = \dfrac{54}{125}$

$P(X=2) = C_3^2 (P(A))^2 (1-P(A))^{3-2} = 3 \times \left(\dfrac{2}{5}\right)^2 \times \dfrac{3}{5} = \dfrac{36}{125}$

$P(X=3) = C_3^3 (P(A))^3 (1-P(A))^{3-3} = \left(\dfrac{2}{5}\right)^3 = \dfrac{8}{125}$

$X = x_i$	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\dfrac{27}{125}$	$\dfrac{54}{125}$	$\dfrac{36}{125}$	$\dfrac{8}{125}$

b) on sait que : $E(X) = 0 \times \dfrac{27}{125} + 1 \times \dfrac{54}{125} + 2 \times \dfrac{36}{125} + 3 \times \dfrac{8}{125}$

Donc, $\boxed{E(X) = \dfrac{6}{5}}$

Problème

Partie 1 :

1) a) Graphiquement (C_g) est au-dessus de (C_h) sur $]0,+\infty[$ et sans se croisé

Donc, $g(x) > h(x)$, $\forall x \in]0,+\infty[$

Ainsi $g(x) - h(x) > 0$, $\forall x \in]0,+\infty[$

b) soit $x \in]0,+\infty[$

on a: $h(x) < g(x) \Rightarrow 2\ln x - (\ln x)^2 \leq x^2$

Donc, $\dfrac{2\ln x - (\ln x)^2}{x^2} < 1$, puisque $x^2 > 0$

2) a) On a : H est dérivable sur $]0,+\infty[$

et $H'(x) = (x\ln(x) - x)' = (x)'\ln(x) + x\ln'(x) - 1$

Donc $H'(x) = \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1$ soit $H'(x) = \ln(x)$

Ainsi H est une primitive de $x \mapsto \ln x$ sur $]0,+\infty[$

$+$ On a: $\displaystyle\int_1^{e^2} \ln(x)\,dx = [H(x)]_1^{e^2} = [x\ln(x) - x]_1^{e^2}$

$= e^2\ln(e^2) - e^2 - (1\ln(1) - 1)$

Donc $\boxed{\displaystyle\int_1^{e^2} \ln(x)\,dx = 1 + e^2}$; $\ln e^2 = 2\ln e = 2$ et $\ln(1) = 0$

b) on pose $\begin{cases} u'(x) = \ln(x) \\ v(x) = \ln(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(x) = x\ln(x) - x \\ v'(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$

Donc $\displaystyle\int_1^{e^2} (\ln(x))^2\,dx = \left[(x\ln(x) - x)\ln(x)\right]_1^{e^2} - \int_1^{e^2}\left(\frac{x\ln(x) - x}{x}\right)dx$

$= (e^2\ln(e^2) - e^2)\ln e^2 - \displaystyle\int_1^{e^2} \ln x\,dx + \int_1^{e^2} dx$

$= (2e^2 - e^2)\times 2 - (1 + e^2) + e^2 - 1$

D'où $\boxed{\displaystyle\int_1^{e^2} (\ln(x))^2\,dx = 2e^2 - 2}$

c) soit $x \in]0,+\infty[$

$h(x) = 0 \Leftrightarrow 2\ln(x) - (\ln(x))^2 = 0$

$\Leftrightarrow \ln(x)\,(2 - \ln(x)) = 0$

$\Leftrightarrow \ln(x) = 0$ ou $\ln(x) = 2$

Donc $x \in \{1 ; e^2\}$

* Soit $M(x;y) \in (C_h) \cap (Ox) \Leftrightarrow h(x) = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$ ou $x = e^2$

Donc (C_h) coupe l'axe des abscisses en deux points d'abscisse $x=1$ et $x=e^2$

d) Soit A l'aire de la partie délimitée par la courbe (C_h) l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=e^2$

on sait que $A = \int_1^{e^2} |h(x)|\, dx \times u.a$ où u.a est l'unité d'aire

$= \int_1^{e^2} h(x)\, dx\ u.a$, comme C_h est au dessus de l'axe des abscisses

$= \int_1^{e}\left(2\ln(x) - (\ln(x))^2\right) dx\ u.a$

$= \left(2\int_1^{e} \ln(x)\, dx - \int_1^{e}(\ln(x))^2 dx\right) u.a$

$= \left(2(1+e^2) - (2e^2 - 2)\right) u.a$

$\boxed{A = 4 \times u.a}$

Partie II

1) a) on a : $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+}\left(x - \frac{(\ln(x))^2}{x}\right) = \lim_{x \to 0^+}\left(x - (\ln x)^2 \times \frac{1}{x}\right) = -\infty$

puisque $\lim_{x \to 0^+} x = 0$, $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ ($\Rightarrow \lim_{x \to 0^+} (\ln x)^2 = +\infty$) et $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

* On a : $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$, donc (C_f) admet une asymptote verticale d'équation $x=0$

b) * On a : $\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = \lim_{t \to +\infty} \frac{(\ln t^2)^2}{t^2} = \lim_{t \to +\infty} 4\left(\frac{\ln t}{t}\right)^2 = 0$

En faisant le changement de variable $t = \sqrt{x}$ $x \to +\infty \Rightarrow t \to +\infty$

et que $\lim_{t \to +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$ entraîne $\lim_{t \to +\infty}\left(\frac{\ln t}{t}\right)^2 = 0$

* On a : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty}\left(x - \frac{(\ln x)^2}{x}\right) = +\infty$

puisque $\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$

c) on a: $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x-\frac{(\ln x)^2}{x}-x\right) = \lim_{x\to+\infty} -\frac{(\ln x)^2}{x}$

Donc $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x) = 0$, comme $\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x} = 0$

Donc, (C_f) a comme asymptote oblique la droite d'équation $y=x$ au voisinage de $+\infty$

2) a) Soit $x\in]0,+\infty[$, on a: $f'(x) = \left(x-\frac{(\ln x)^2}{x}\right)'$

c.à.d $f'(x) = 1-\dfrac{2\frac{\ln x}{x}\times x-(\ln x)^2}{x^2}$

D'où $f'(x) = 1-\dfrac{2\ln x-(\ln x)^2}{x^2}$, $\forall x\in]0,+\infty[$

b) Soit $x\in]0,+\infty[$ on sait que $\dfrac{2\ln x-(\ln x)^2}{x^2}<1$ d'après I)b)

Donc $1-\dfrac{2\ln x-(\ln x)^2}{x^2}>0$, d'où $f'(x)>0$, $\forall x\in]0,+\infty[$

Ainsi f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$

3) a) on a; f est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$

et $f(]0,+\infty[) =]\lim_{x\to0^+}f(x), \lim_{x\to+\infty}f(x)[=]-\infty,+\infty[$

c.à.d $f(]0,+\infty[) = \mathbb{R}$

or $0\in f(]0,+\infty[)$ donc l'équation $f(x)=x$ admet une solution unique α dans $]0,+\infty[$

b) on a: $f(e^{-1}) = e^{-1}-\dfrac{(\ln e^{-1})^2}{e^{-1}} = \frac{1}{e}-e = \frac{1-e}{e} \Rightarrow f(e^{-1})<0$

et $f(1) = 1-\dfrac{(\ln 1)^2}{1} \Rightarrow f(1)=1$, $f(1)>0$; $\ln e^{-1}=-1$, $e^{-1}=\frac{1}{e}$ et $e>1$

c.à.d $f(e^{-1})\times f(1)<0$ et f est continue et strictement croissante

c.à.d $f(x)=0$ a une solution unique α sur $[e^{-1},1]$

Donc $\alpha\in]e^{-1},1[$

c) on a: $f(\alpha)=0 \Leftrightarrow \alpha-\dfrac{(\ln\alpha)^2}{\alpha}=0$; $\alpha\in]e^{-1},1[$

$\Leftrightarrow \alpha^2-(\ln\alpha)^2=0$

$\Leftrightarrow (\alpha-\ln\alpha)(\alpha+\ln\alpha)=0$

$\Leftrightarrow \ln\alpha=\alpha$ ou $\ln\alpha=-\alpha$

$\ln\alpha=\alpha$ impossible, comme $\alpha\in]e^{-1},1[$ $\ln\alpha<0$

D'où $\ln\alpha=-\alpha$.

c) Soit $x\in]0,+\infty[$ on a; $f(x)-x = -\dfrac{(\ln x)^2}{x}$

or $(\ln x)^2\geq0$, $\forall x\in]0,+\infty[$ donc $f(x)-x\leq0$, $\forall x\in]0,+\infty[$

Ainsi $f(x)\leq x$, pour tout x de $]0,+\infty[$

d) soit (T) la tangente à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 1

on sait que : $(T) : y = f'(1)(x-1) + f(1)$; $f'(1) = 1 - \frac{2\ln 1 - (\ln 1)^2}{1}$

$f'(1) = 1$

et $f(1) = 1$

Donc $(T) : y = x$

4) a) on a : φ est la restriction de f sur l'intervalle $]0,1]$

c.à.d $\varphi(x) = f(x)$, $\forall x \in]0,1]$

or f est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$

Donc f l'est aussi sur $]0,1]$

Ainsi φ admet une fonction réciproque φ^{-1} définie

sur un intervalle J

et on a : $J = \varphi(]0,1]) =]\lim_{x\to 0^+} \varphi(x), \varphi(1)] \Rightarrow J =]-\infty, 1]$

b) on a : $\varphi(\alpha) = 0 \iff \varphi^{-1}(0) = \alpha$ ($\varphi = f$ sur $]0,1]$)

et φ est dérivable en α, comme $\alpha \in]e^{-1}, 1]$ ($]e^{-1},1] \subset]0,+\infty[$)

et $\varphi'(\alpha) = 1 - \frac{2\ln\alpha - (\ln\alpha)^2}{\alpha^2} = 1 - \frac{-2\alpha - \alpha^2}{\alpha^2} = 1 + \frac{2\alpha + \alpha^2}{\alpha^2}$

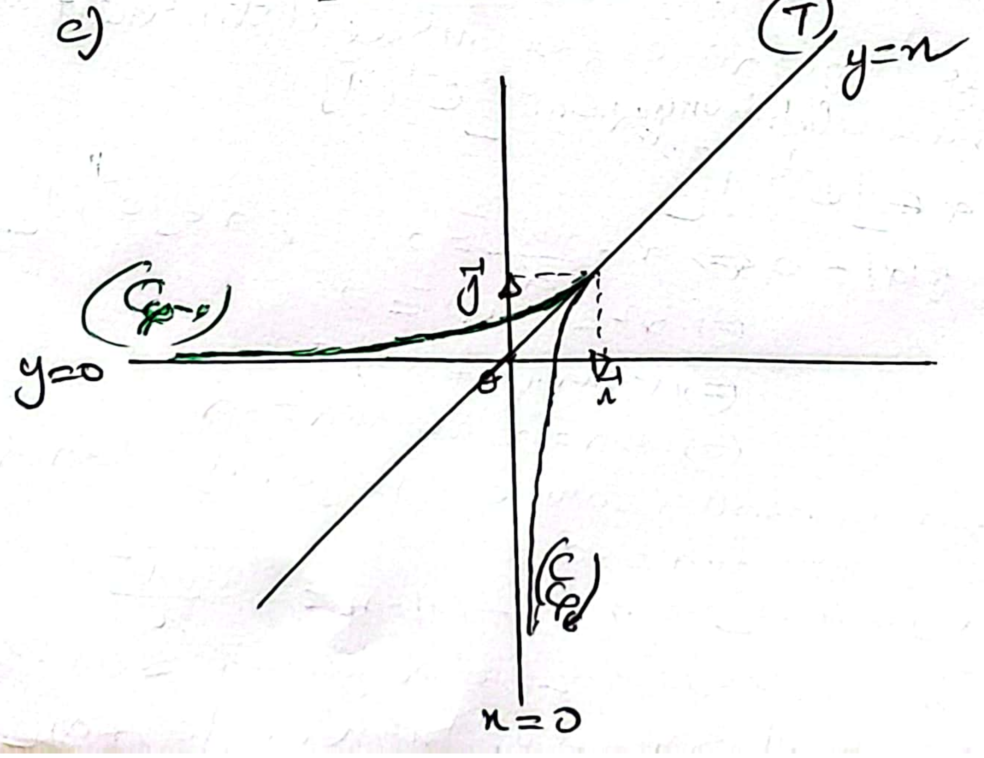
c.à.d $\varphi'(\alpha) = 2 + \frac{2}{\alpha}$ d'où $\varphi'(\alpha) = \frac{2\alpha + 2}{\alpha}$ et $\varphi'(\alpha) \neq 0$

Donc φ^{-1} est dérivable en $\varphi^{-1}(\alpha)$ c.à.d en 0

* On a : $(\varphi^{-1})'(0) = \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(0))} = \frac{1}{\varphi'(\alpha)} = \frac{1}{\frac{2\alpha+2}{\alpha}}$

Donc $\boxed{(\varphi^{-1})'(0) = \frac{\alpha}{2\alpha+2}}$

c)



Partie III

1) Pour $n=0$, $u_0 = e$, $1 < u_0$ proposition vraie

soit $n \geq 0$, on suppose que $1 < u_n$ montrons que $1 < u_{n+1}$

on a : $1 < u_n$ c.à.d $u_n \in]1, +\infty[$ et f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ (c'est aussi sur $]1, +\infty[$)

c.à.d $f(1) < f(u_n) \Rightarrow 1 < u_{n+1}$

D'où d'après le principe de la récurrence $1 < u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

2) a) on a : $u_{n+1} = f(u_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et $1 < u_n$

et on sait que $f(x) \leq x$, $\forall x \in]0, +\infty[$; d'après II)3)c)

c.à.d $f(u_n) < u_n$ soit $u_{n+1} < u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

D'où (u_n) est une suite décroissante

b) on a : (u_n) est décroissante et minorée par 1

Donc (u_n) est convergente

c) on a : $u_{n+1} = f(u_n)$, f est continue sur $]1, +\infty[$ et $u_0 \in]1, +\infty[$

et $f(]1, +\infty[) =]1, +\infty[$ et (u_n) est une suite convergente

soit l la limite de (u_n)

Donc l est solution de l'équation

$f(x) = x \Leftrightarrow x = 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$

Graphiquement, $f(x) = x \Leftrightarrow x = 1$

Algébriquement $f(x) = x \Leftrightarrow x - \frac{(\ln x)^2}{x} = x$

$\Leftrightarrow -(\ln x)^2 = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$

"علم بلا أدب كنار بلا حطب"

الخطيب البغدادي

1002_1071