ROYAUME DU MAROC

Correction

Baccalauréat Sciences & Technologie

Session : Normal 2025

MATHÉMATIQUES

Exercice 1 : (pts)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(0,0,2)$, $B(2,0,0)$ et la sphère (S) de centre O et de rayon $R = 2$

0.25 pt

1 - a) Déterminons l'équation cartésienne de la sphère (S)

On a la sphère de centre O et de rayon $R = 2$

Donc l'équation de la sphère (S) est de la forme $(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 = 2^2$

$\boxed{(S) : x^2 + y^2 + z^2 = 4}$

0.5 pt

b) Vérifions que les points A et B appartiennent à la sphère (S)

On a $x_A^2 + y_A^2 + z_A^2 = 0^2 + 0^2 + (-2)^2 = 4$,donc $\boxed{A \in (S)}$

Et $x_B^2 + y_B^2 + z_B^2 = 2^2 + 0^2 + 0^2 = 4$, donc $\boxed{B \in (S)}$

2 - Soit I le milieu du segment $[AB]$

0.25 pt

a) Déterminons l'intersection du plan (OAB) avec la sphère (S)

On $A, B \in (S)$, et O n'est pas le mileu de $[AB]$, donc $[AB]$ n'est pas un diamètre dans (S), d'où A, B et O ne sont pas alignés, et par suit ils déterminent un plan (OAB).

Et puisque ce plan passe par le centre O de la sphère (S)

Alors ce plan coupe (S) selon **un grand cercle** $(\mathscr{C})$ de $\boxed{\text{centre } O\text{, et de rayon } r = 2}$.

0.5 pt

b) Vérifions que $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, puis montrons que $d(O, (AB)) = \sqrt{2}$

Le point I est le milieu de $[AB]$, donc $I\left(\frac{0+2}{2}, \frac{0+0}{2}, \frac{2+0}{2}\right)$ c'est à dire $I(1,0,1)$

D'où $\overrightarrow{OI}\ (1,0,1)$, et comme $\overrightarrow{AB}\ (2,0,-2)$

$$\begin{aligned} \text{Alors} \quad \overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{AB} &= 1 \times 2 + 0 \times 0 + 1 \times (2) \\ &= 2 + 0 - 2 \end{aligned}$$

D'où $\boxed{\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{AB} = 0}$

Alors $(OI) \perp (AB)$, et puisque I est le milieu de $[AB]$ alors $I \in [AB]$

Et par conséquent I est la projection orthogonale de O sur (AB)

Alors $d(O,(AB)) = OI$

$$= \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}$$

D'où $\boxed{d(O,(AB)) = \sqrt{2}}$

3 - On considère un point $M(0, m, 0)$ de l'espace, où $m \in \mathbb{R}$

0.5 pt **a) Vérifions que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM} = 2m\vec{i} + 4\vec{j} - 2m\vec{k}$**

On a $\overrightarrow{AB}(2, 0, -2)$ et $\overrightarrow{AM}(O, m, -2)$

Donc $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM} = \begin{vmatrix} 0 & m \\ -2 & -2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & m \end{vmatrix} \vec{k}$

$$= (0 - (-2m))\vec{i} - ((-4) - 0)\vec{j} + (2m - 0)\vec{k}$$

D'où $\boxed{\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM} = 2m\vec{i} + 4\vec{j} + 2m\vec{k}}$

0.25 pt **b) Déduisons que $mx + 2y + mz - 2m = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABM)**

On a $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM}$ et un vecteur normal au plan (ABM), donc une équation cartésienne du plan (ABM) est de la forme $2mx + 4y + 2mz + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$

Or $A \in (ABM)$ donc $2mx_A + 4y_A + 2mz_A + d = 0$

Donc $2m \times 0 + 4 \times 0 + 2m \times 2 + d = 0$, alors $d = -4m$

D'où $(ABM) : 2mx + 4y + 2mz - 4m = 0$

C-à-d $(ABM) : 2\,(mx + 2y + mz - 2m) = 0$

Et par suit $\boxed{(ABM) : mx + 2y + mz - 2m = 0}$

0.25 pt **c) Montrons que $d(O,(ABM)) = \dfrac{2|m|}{\sqrt{4 + 2m^2}}$**

On a $d(O,(ABM)) = \dfrac{|mx_0 + 2y_0 + mz_0 - 2m|}{\sqrt{m^2 + 2^2 + m^2}}$

$$= \frac{|m \times 0 + 2 \times 0 + m \times 0 - 2m|}{\sqrt{2m^2 + 4}}$$

$$= \frac{|-2m|}{\sqrt{4 + 2m^2}}$$

$$= \frac{|-2||m|}{\sqrt{4 + 2m^2}}$$

Donc $\boxed{d(O,(ABM)) = \dfrac{2|m|}{\sqrt{4 + 2m^2}}}$

4 - Le plan (ABM) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ_m), de rayon r

0.5 pt **Montrons que $r = \sqrt{2 + \dfrac{4}{2 + m^2}}$ et Déduisons que $\sqrt{2} < r \leq 2$, pour tout $m \in \mathbb{R}$**

✍ On a $d = d(O,(ABM)) = \dfrac{2|m|}{\sqrt{4 + 2m^2}}$

Et le plan (ABM) coupe la sphère de centre O suivant un cercle (Γ_m) de rayon r

D'après Pythagore $R^2 = r^2 + d^2$, donc $r^2 = R^2 - d^2$

$$\begin{aligned} &= 4 - \frac{4m^2}{4+2m^2} \\ &= 2 + 2 - \frac{2m^2}{2+m^2} \\ &= 2 + \frac{4+2m^2-2m^2}{2+m^2} \\ r^2 &= 2 + \frac{4}{2+m^2} \end{aligned}$$

Et puisque $r > 0$, alors $\boxed{r = \sqrt{2 + \frac{4}{2+m^2}}}$

✍ On a d'une part $r \leq R$ donc $r \leq 2$ (1)

Et on a d'autre part $\frac{4}{2+m^2} > 0$ pour tout réel m

Donc $2 + \frac{4}{2+m^2} > 2$

Donc $r > \sqrt{2}$ (1)

De (1) et (2), on a finalement $\boxed{\sqrt{2} < r \leq 2}$

Exercice 2 : (pts)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, C, D et Ω d'affixes respectives $a = 1 + 2i$, $b = \bar{a}$, $c = \frac{3(3+i)}{2}$, $d = \frac{3(1+i)}{2}$ et $\omega = \frac{5}{2}$

0.5 pt **1 - a) Vérifions que $a + b = 2$ et déduisons que $p = 1$, où P est le milieu de $[AB]$**

On a $a + b = a + \overline{a}$, donc $a + b = 2Re(a)$, d'où $\boxed{a + b = 2}$

L'affixe du point P milieu de $[AB]$ est $p = \frac{a+b}{2}$, donc $\boxed{p = 1}$.

0.5 pt **b) Montrons que a et b sont les solutions de l'équation $z^2 - 2z + 5 = 0$ dans $\mathbb{C}$**

Soit (E) l'équation $z^2 - 2z + 5 = 0$

On a $a^2 - 2a + 5 = (1 + 2i)^2 - 2(1 + 2i) + 5$

$$\begin{aligned} &= 1 + 4i - 4 - 2 - 4i + 5 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc, a est solution de (E), et puisque (E) est une équation de second degré à coefficients réels, alors $\overline{a}$ est aussi solution de (E)

D'où $\boxed{a \text{ et } b \text{ sont les solutions de l'équation } (E)}$

0.5 pt **2 - a) Vérifions que $|\omega - a| = |\omega - b| = |\omega - c|$**

✍ $|\omega - a| = \left|\frac{5}{2} - (1+2i)\right| = \left|\frac{5}{2} - 1 - 2i\right| = \left|\frac{3}{2} - 2i\right| = \sqrt{\frac{9}{4}+4} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$

✍ $|\omega - b| = |\omega - \overline{a}| = |\overline{\omega} - \overline{a}| = |\overline{\omega - a}| = |\omega - a| = \frac{5}{2}$

✍ Et $|\omega - c| = \left|\frac{5}{2} - \frac{3(3+i)}{2}\right| = \left|\frac{5-9-3i}{2}\right| = \left|\frac{-4}{2} - \frac{3i}{2}\right| = \sqrt{\frac{16}{4}+\frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$

Ainsi $\boxed{|\omega - a| = |\omega - b| = |\omega - c|}$

0.25 pt **b) Déduisons que Ω est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC**

On a $|\omega - a| = |\omega - b| = |\omega - c|$

Donc $A\Omega = B\Omega = C\Omega$, alors Ω est équidistant des trois sommets du triangle ABC

Alors $\boxed{\Omega \text{ est le centre du cercle circonscrit au triangle } ABC}$

0.25 pt **3 - a) Vérifions que $\dfrac{d-c}{a-b} = \dfrac{3}{4}i$**

On a
$$\frac{d-c}{a-b} = \frac{\frac{3(1+i)}{2} - \frac{3(3+i)}{2}}{1+2i-(1-2i)} = \frac{\frac{3+3i-9-3i}{2}}{1+2i-1+2i} = \frac{\frac{-6}{2}}{4i} = \frac{-3}{4i} = \frac{-3i}{4i^2} = \frac{-3i}{-4}$$

D'où $\boxed{\dfrac{d-c}{a-b} = \dfrac{3}{4}i}$

0.5 pt **b) Montrons que $d-b = (c-a)e^{i\frac{\pi}{2}}$ puis déduisons que les droites (DB) et (AC) sont perpendiculaires**

✍ On a $d - b = \frac{3(1+i)}{2} - (1-2i) = \frac{3+3i-2+4i}{2} = \frac{1+7i}{2}$

✍ Et $(c-a)e^{i\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{3(3+i)}{2} - (1+2i)\right) \times i = \frac{9+3i-2-4i}{2} \times i = \frac{7-i}{2} \times i = \frac{7i+1}{2}$

Donc $\boxed{d - b = (c-a)e^{i\frac{\pi}{2}}}$

Et puisque $c \neq a$ alors $\dfrac{d-b}{c-a} = e^{i\frac{\pi}{2}}$

Donc $\arg\left(\dfrac{d-b}{c-a}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$, c'est à dire $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$

D'où $\boxed{(DB) \perp (AC)}$

4 - Soit H l'homothétie de centre C et de rapport $\dfrac{2}{3}$ et qui transforme chaque point M du plan d'affixe z en un point M' d'affixe z'. On pose $h(P) = G$

0.25 pt **a) Vérifions que $z' = \dfrac{2}{3}z + \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}i$**

On a $h(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{CM'} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{CM}$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow z' - c = \frac{2}{3} \times (z - c)\\
&\Leftrightarrow z' = \frac{3(3+i)}{2} + \frac{2}{3}\left(z - \frac{3(3+i)}{2}\right)\\
&\Leftrightarrow z' = \frac{9+3i}{2} + \frac{2}{3}z - \frac{2}{3} \times \frac{3(3+i)}{2}\\
&\Leftrightarrow z' = \frac{2}{3}z + \frac{9+3i}{2} - \frac{2(3+i)}{2}\\
&\Leftrightarrow z' = \frac{2}{3}z + \frac{9+3i-6-2i}{2}\\
&\Leftrightarrow z' = \frac{2}{3}z + \frac{3+i}{2}
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{z' = \dfrac{2}{3}z + \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}i}$

0.25 pt **b) Montrons que l'affixe du point G est $g = \dfrac{13}{6} + \dfrac{1}{2}i$**

On a $G = h(P)$, donc $g = \dfrac{2}{3}p + \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}i$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{3} \times 1 + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i\\
&= \frac{4}{6} + \frac{9}{6} + \frac{1}{2}i
\end{aligned}$$

Doù $\boxed{g = \dfrac{13}{6} + \dfrac{1}{2}i}$

0.5 pt **c) Montrons que les points Ω, G et D sont alignés**

On a
$$\begin{aligned}
g - \omega &= \frac{13}{6} + \frac{1}{2}i - \frac{5}{2}\\
&= \frac{13}{6} - \frac{15}{6} + \frac{3}{6}i\\
g - \omega &= \frac{-2+3i}{6}
\end{aligned}$$

Et
$$\begin{aligned}
d - \omega &= \frac{3(1+i)}{2} - \frac{5}{2}\\
&= \frac{3+3i-5}{2}\\
d - \omega &= \frac{-2+3i}{2}
\end{aligned}$$

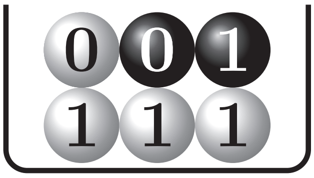
On remarque que $3(g-\omega) = d - \omega$ donc $3\overrightarrow{\Omega G} = \Omega D$

D'où $\boxed{\text{les points } \Omega,\ G \text{ et } D \text{ sont alignés}}$.

Exercice 3 : (2.5 pts)

Une urne contient six boules indiscernables au toucher :

Quatre boules blanches numérotées **0; 1; 1; 1** et deux boules noires numérotées **0; 1**



L'urne $\boldsymbol{U}$

On tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne

On considère les événements suivants :

$\boldsymbol{A}$: « Les deux boules tirées portent le numéro **1** »

$\boldsymbol{B}$: « Les deux boules tirées sont de même couleur »

Soit $\boldsymbol{\Omega}$ l'univers des éventualités

On tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne

Donc $card(\Omega) = C_6^2 = \dfrac{6!}{2!4!} = \dfrac{6 \times 5}{2} = 15$.

0.5 pt **1 - a) Montrons que $p(A) = \dfrac{2}{5}$**

Les boules sont indiscernable au toucher alors on a une situation équiprobable

On tire deux boules parmi quatre boules portant le numéro **1**

Donc $card(A) = C_4^2 = \dfrac{4!}{2!2!} = 6$, d'où $P(A) = \dfrac{card(A)}{card(\Omega)} = \dfrac{6}{15} = \dfrac{2}{5}$

Finalement : $\boxed{P(A) = \dfrac{2}{5}}$

0.5 pt **b) Montrons que $p(B) = \dfrac{7}{15}$**

On tire deux boules parmi quatre boules blanches où bien deux boules noires

Donc $card(B) = C_4^2 + C_2^2 = \dfrac{4!}{2!2!} + \dfrac{2!}{2!0!} = 7$, d'où $P(B) = \dfrac{card(B)}{card(\Omega)} = \dfrac{7}{15}$

Finalement : $\boxed{P(B) = \dfrac{7}{15}}$

0.5 pt **c) Étudions l'indépendance des événements A et B**

Comme $A \cap B$ correspond à l'événement : "les deux boules tirées portent le numéro 1 et sont de même couleur". Cela signifie que les deux boules tirées sont blanches et portent le numéro 1

Donc : $\boldsymbol{card(A\cap B) = C_3^2 = \frac{3!}{2!1!} = 3}$

D'où $\boldsymbol{P(A\cap B) = \frac{card(A\cap B)}{card(\Omega)} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}}$

On a d'autre part $\boldsymbol{P(A)\times P(B) = \frac{2}{5}\times\frac{7}{15} = \frac{14}{75}}$

Comme $\boldsymbol{P(A\cap B) \neq P(A)\times P(B)}$

Alors les événements $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ ne sont pas indépendants.

0.75 pt **2 - a) Recopions et complétons le tableau ci-dessous, représentant la loi de probabilités de $\boldsymbol{X}$**

L'expérience consiste en **3** répétitions indépendantes de l'expérience précédente.

On considère la variable aléatoire $\boldsymbol{X}$ indiquant le nombre de fois que l'on réalise l'événement $\boldsymbol{A}$ avec $\boldsymbol{P(A) = \frac{2}{5}}$.

Donc $\boldsymbol{X}$ suit une loi binomiale avec $\boldsymbol{n = 3}$ et $\boldsymbol{p = \frac{2}{5}}$

Alors $\boldsymbol{P(X = k) = C_3^k\left(\frac{2}{5}\right)^k\left(1-\frac{2}{5}\right)^{3-k} = C_3^k\left(\frac{2}{5}\right)^k\left(\frac{3}{5}\right)^{3-k}}$ pour $\boldsymbol{k\in\{0,1,2,3\}}$

$\boldsymbol{P(X=0) = \frac{27}{125}}$

$\boldsymbol{P(X=1) = C_3^1\left(\frac{2}{5}\right)^1\left(\frac{3}{5}\right)^2 = 3\times\frac{2}{5}\times\frac{9}{25} = \frac{54}{125}}$

$\boldsymbol{P(X=2) = C_3^2\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^1 = 3\times\frac{4}{25}\times\frac{3}{5} = \frac{36}{125}}$

$\boldsymbol{P(X=3) = C_3^3\left(\frac{2}{5}\right)^3\left(\frac{3}{5}\right)^0 = 1\times\frac{8}{125}\times 1 = \frac{8}{125}}$

$\boldsymbol{X = n}$	0	1	2	3
$\boldsymbol{P(X = n)}$	$\boldsymbol{\frac{27}{125}}$	$\boldsymbol{\frac{54}{125}}$	$\boldsymbol{\frac{36}{125}}$	$\boldsymbol{\frac{8}{125}}$

Vérification : $\boldsymbol{\frac{27}{125}+\frac{54}{125}+\frac{36}{125}+\frac{8}{125} = \frac{125}{125} = 1}$

0.25 pt **b) Calculons l'espérance $\boldsymbol{E(X)}$ de la variable aléatoire $\boldsymbol{X}$**

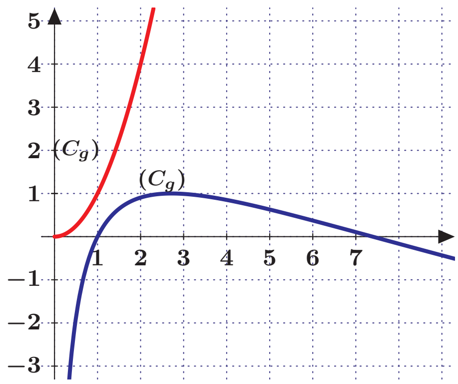
Pour une loi binomiale, $\boldsymbol{E(X) = n\times p = 3\times\frac{2}{5} = \frac{6}{5}}$

Ou par définition $\boldsymbol{E(X) = \sum x_i\times P(X = x_i)}$

$$\boldsymbol{\begin{aligned} &= 0\times\frac{27}{125}+1\times\frac{54}{125}+2\times\frac{36}{125}+3\times\frac{8}{125}\\ &= \frac{54+72+24}{125}\\ &= \frac{150}{125}\\ &= \frac{6}{5}\end{aligned}}$$

Problème : (11 pts)

Partie I : Le graphique ci-contre représente les courbes (C_g) et (C_h) des fonctions : $g : x \mapsto x^2$ et $h : x \mapsto 2\ln(x) - (\ln x)^2$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$ dan un même repère orthonormé.



1 - a) Justifions que pour tout x de $]0;+\infty[$:

0.25 pt $g(x) - h(x) > 0$

D'après la graphique on a la courbe (C_g) est au dessus de la courbe (C_h) sur l'intervalle $]0;+\infty[$

Donc $(\forall x \in]0;+\infty[) \quad ; \quad g(x) > h(x)$

$$\boxed{\text{Donc : pour tout } x \text{ de }]0;+\infty[\text{ : } g(x) - h(x) > 0}$$

0.5 pt **b)** Déduisons que pour tout x de $]0;+\infty[$: $\dfrac{2\ln x - (\ln x)^2}{x^2} < 1$

D'après question **1-a)** on a pour tout $x \in]0;+\infty[$:

$$\begin{aligned} g(x) - h(x) > 0 &\Leftrightarrow h(x) < g(x) \\ &\Leftrightarrow 2\ln x - (\ln x)^2 < x^2 \\ &\Leftrightarrow \frac{2\ln x - (\ln x)^2}{x^2} < \frac{x^2}{x^2} \quad \text{, Car } x^2 > 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{2\ln x - (\ln x)^2}{x^2} < 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc : pour tout } x \text{ de }]0;+\infty[\text{ : } \frac{2\ln x - (\ln x)^2}{x^2} < 1}$$

0.5 pt **2 - a)** Vérifions que la fonction $H : x \mapsto x\ln x - x$ est une fonction primitive de la fonction $x \mapsto \ln x$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$, puis déduisons que : $\displaystyle\int_1^{e^2} \ln(x)\mathrm{d}x = 1 + e^2$

0.5 pt
- Vérifions que : $H : x \mapsto x\ln x - x$ est une fonction primitive de la fonction $x \mapsto \ln x$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$

  On a : la fonction $x \mapsto x$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ (restriction d'une fonction polynôme) et aussi la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est dérivable sur $]0;+\infty[$

  Alors la fonction H est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme le produit et la somme des fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$

Soit $x \in]0;+\infty[$ $\quad H'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \dfrac{1}{x} - 1$

$$= \ln(x) + 1 - 1$$

$$H'(x) = \ln(x)$$

Donc : la fonction H est une fonction primitive de la fonction $x \mapsto \ln x$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$

- Déduisons que : $\displaystyle\int_1^{e^2} \ln(x)\mathrm{d}x = 1 + e^2$

On a :
$$\int_1^{e^2} \ln(x)\mathrm{d}x = [x\ln x - x]_1^{e^2}$$
$$= e^2 \ln\left(e^2\right) - e^2 - (1 \times \ln 1 - 1)$$
$$= 2e^2 \ln(e) - e^2 - (1 \times 0 - 1)$$
$$= 2e^2 \times 1 - e^2 + 1$$
$$\int_1^{e^2} \ln(x)\mathrm{d}x = 1 + e^2$$

Donc : $\displaystyle\int_1^{e^2} \ln(x)\mathrm{d}x = 1 + e^2$

0.5 pt b) À l'aide d'une intégration par parties, montrons que $\displaystyle\int_1^{e^2} (\ln(x))^2\mathrm{d}x = 2e^2 - 2$

Soient u et v deux fonctions dérivables sur $\left[1;e^2\right]$ telles que :

$$\begin{cases} u(x) = (\ln(x))^2 \\ v'(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = \dfrac{2\ln(x)}{x} \\ v(x) = x \end{cases}$$

Donc :
$$\int_1^{e^2} (\ln(x))^2\mathrm{d}x = \int_1^{e^2} u(x) \times v'(x)\mathrm{d}x$$
$$= [u(x)v(x)]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} u'(x) \times v(x)\mathrm{d}x$$
$$= \left[x(\ln(x))^2\right]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} \frac{2\ln(x)}{x} \times x\mathrm{d}x$$
$$= \left(e^2\left(\ln(e^2)\right)^2\right) - \left(1 \times (\ln(1))^2\right) - 2\int_1^{e^2} \ln(x)\mathrm{d}x$$
$$= \left(e^2(2\ln(e))^2\right) - \left(1 \times 0^2\right) - 2\left(1 + e^2\right)$$
$$= 4e^2 - 2 - 2e^2$$
$$\int_1^{e^2} (\ln(x))^2\mathrm{d}x = 2e^2 - 2$$

Donc : $\int_1^{e^2} (\ln(x))^2 \mathrm{d}x = 2e^2 - 2$

0.5 pt

c) • Résolvons sur $]0;+\infty[$ l'équation : $h(x) = 0$

Le domaine de validité de l'équation $h(x) = 0$ est $]0;+\infty[$

$$\begin{aligned} h(x) = 0 &\Leftrightarrow 2\ln(x) - (\ln(x))^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \ln(x)\,(2 - \ln(x)) = 0 \\ &\Leftrightarrow \ln(x) = 0 \text{ où bien } 2 - \ln(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \ln(x) = \ln(1) \text{ où bien } \ln(x) = 2 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \text{ où bien } x = e^2 \end{aligned}$$

Puisque $(1, e^2) \in]0;+\infty[\times]0;+\infty[$

Alors l'ensemble des solutions de l'équation $h(x) = 0$ est $S\{1, e^2\}$

• Déduisons les points d'intersection de la courbe (C_h) avec l'axe des abscisses

Les abscisses des points d'intersection de la courbe (C_h) avec l'axe des abscisses sont les solutions de l'équation $h(x) = 0$

Donc $A(1,0)$ et $B(e^2, 0)$ sont points d'intersection de (C_h) avec l'axe des abscisses

0.5 pt

d) Déduisons en unité d'aire, $\mathscr{A}$ l'aire de la partie délimitée par la courbe (C_h), l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e^2$

On sait que $\mathscr{A} = \int_1^{e^2} |h(x)| \mathrm{d}x \times u.a$

Puisque la courbe (C_h) est au dessus de l'axe des abscisses sur l'intervalle sur $[1, e^2]$

Alors $\left(\forall x \in [1, e^2]\right) \quad ; \quad h(x) \geq 0$

Donc :
$$\begin{aligned} \mathscr{A} &= \int_1^{e^2} |h(x)| \mathrm{d}x \times u.a \\ &= \int_1^{e^2} h(x) \mathrm{d}x \times u.a \\ &= \int_1^{e^2} 2\ln(x) - (\ln x)^2 \mathrm{d}x \times u.a \\ &= \left(2\int_1^{e^2} \ln(x)\mathrm{d}x - \int_1^{e^2} (\ln x)^2 \mathrm{d}x\right) \times u.a \\ &= \left(2\left(1 + e^2\right) - \left(2e^2 - 2\right)\right) \times u.a \\ &= \left(2 + 2e^2 - 2e^2 + 2\right) \times u.a \end{aligned}$$

Donc : $\mathscr{A} = 4 \times u.a$

Partie II :

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x - \dfrac{(\ln x)^2}{x}$

Soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormée $(O, \vec{i}, \vec{j})$

0.5 pt **1 - a)** • Vérifions que : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$

On a $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} (\ln x)^2 = +\infty$

Et puisque $\lim\limits_{x\to 0^+} -\dfrac{1}{x} = -\infty$

Donc $\lim\limits_{x\to 0^+} -\dfrac{(\ln x)^2}{x} = -\infty$

Or $\lim\limits_{x\to 0^+} x = 0^+$

D'où : $\lim\limits_{x\to 0^+} x - \dfrac{(\ln x)^2}{x} = -\infty$

$\boxed{\text{Finalement } \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty}$

• Donnons une interprétation géométrique de ce résultat

Comme $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$

$\boxed{\text{Alors } (C_f) \text{ admet une asymptote verticale d'équation } x = 0}$

0.5 pt **b)** • Montrons que $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{(\ln x)^2}{x} = 0$

On pose $t = \sqrt{x}$ donc si $x \to +\infty$ on a $t \to +\infty$

Alors :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} &= \lim_{x\to +\infty} \frac{\left(\ln\left(\sqrt{x}^2\right)\right)^2}{\left(\sqrt{x}\right)^2} \\
&= \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{2\ln\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\right)^2 \\
&= \lim_{t\to +\infty} \left(\frac{2\ln t}{t}\right)^2
\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0\,; \text{ Car : } \left(\lim_{t\to +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0\right)$$

• Calculons $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

Comme $\lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{(\ln x)^2}{x} = 0$

Alors $\dfrac{(\ln x)^2}{x} x - \dfrac{(\ln x)^2}{x} = +\infty$

$\boxed{\text{Donc : } \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty}$

0.5 pt **c)** Déduisons que la droite d'équation $y = x$ est une asymptote oblique de (C_f) au voisinage de $+\infty$

Comme $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

Et $\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} x - \dfrac{(\ln x)^2}{x} - x$

$= \lim_{x\to+\infty} -\dfrac{(\ln x)^2}{x}$

$= 0$

$\boxed{\text{la droite d'équation } y = x \text{ est une asymptote oblique de } (C_f) \text{ au voisinage de } +\infty}$

0.75 pt **2 - a)** Montrons que : pour tout x de $]0;+\infty[$, $f'(x) = 1 - \dfrac{2\ln(x) - (\ln x)^2}{x^2}$

On a les fonctions $x \mapsto x$, $x \mapsto \ln(x)$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sont des fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$

Alors f est une fonction dérivable sur $]0;+\infty[$ comme la somme et le produit des fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$

Soit $x \in]0;+\infty[$ on a : $f'(x) = 1 - \dfrac{2\dfrac{\ln x}{x} \times x - 1 \times (lnx)^2}{x^2}$

Donc : $f'(x) = 1 - \dfrac{2\ln x - (lnx)^2}{x^2}$

$\boxed{\text{Finalement : pour tout } x \text{ de }]0;+\infty[,\ f'(x) = 1 - \dfrac{2\ln(x) - (\ln x)^2}{x^2}}$

0.5 pt **b)** Montrons que la fonction f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

D'après la question (**Partie I**-1-b)) on a $(\forall x \in]0;+\infty[)$, $\dfrac{2\ln x - (\ln x)^2}{x^2} < 1$

Donc : $(\forall x \in]0;+\infty[)$, $1 - \dfrac{2\ln x - (\ln x)^2}{x^2} > 0$

D'où $(\forall x \in]0;+\infty[)$, $f'(x) > 0$

$\boxed{\text{Finalement : la fonction } f \text{ est strictement croissante sur }]0;+\infty[}$

0.5 pt **3 - a)** Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]0;+\infty[$

On a

- La fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$

  Donc f est continue sur $]0;+\infty[$
- La fonction f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$
- $f(]0;+\infty[) = \left]\lim_{x\to0^+} f(x); \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[$; (car f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$)

  D'où $f(]0;+\infty[) =]-\infty;+\infty[$

  Alors $0 \in f(]0;+\infty[)$

$\boxed{\text{Donc : l'équation } f(x) = 0 \text{ admet une solution unique } \alpha \text{ dans l'intervalle }]0;+\infty[}$

0.75 pt

b) • Vérifions que : $e^{-1} < \alpha < 1$

On a : $f(e^{-1}) = e^{-1} - \dfrac{(\ln(e^{-1}))^2}{e^{-1}}$

$$= \frac{1}{e} - e(-\ln(e))^2$$
$$= \frac{1}{e} - e$$
$$= \frac{1-e^2}{e}$$

Donc $f(e^{-1}) < 0$

Et on a : $f(1) = 1 - \dfrac{(\ln(1))^2}{1} = 1$

Alors $f(a) > 0$

D'où $f(e^{-1}) < 0 < f(1)$

Or $f(\alpha) = 0$, donc $f(e^{-1}) < f(\alpha) < f(1)$

Puisque la fonction f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$

$\boxed{\text{Alors : } e^{-1} < \alpha < 1}$

• Montrons que : $\ln(\alpha) = -\alpha$

On sait que $f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha - \dfrac{(\ln(\alpha))^2}{\alpha} = 0$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{(\ln(\alpha))^2}{\alpha}$$
$$\Leftrightarrow \alpha^2 = (\ln(\alpha))^2 \text{ ; (car } \alpha > 0)$$
$$\Leftrightarrow \ln(\alpha) = |\alpha|$$
$$\Leftrightarrow \ln(\alpha) = \alpha \text{ où bien } \ln(\alpha) = -\alpha$$

Puisque $e^{-1} < \alpha < 1$, donc $\ln(\alpha) < 0$

$\boxed{\text{Alors : } \ln(\alpha) = -\alpha}$

0.25 pt

c) Montrons que $f(x) \leq x$, pour tout $x \in]0; +\infty[$

Soit $x \in]0; +\infty[$, on a $f(x) - x = x - \dfrac{(\ln(x))^2}{x} - x$

$$f(x) - x = -\frac{(\ln(x))^2}{x}$$

Puisque $(\forall x \in]0; +\infty[)$; $\begin{cases} (\ln(x))^2 \geq 0 \\ x > 0 \end{cases}$

Alors $(\forall x \in]0; +\infty[)$; $-\dfrac{(\ln(x))^2}{x} \leq 0$

Donc $(\forall x \in]0; +\infty[)$; $f(x) - x \leq 0$

$\boxed{\text{pour tout } x \in]0; +\infty[\text{ ; } f(x) \leq x}$

0.5 pt **d)** Montrons que $y = x$ est l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 1

On sait que f est dérivable en 1

Alors l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 1 est

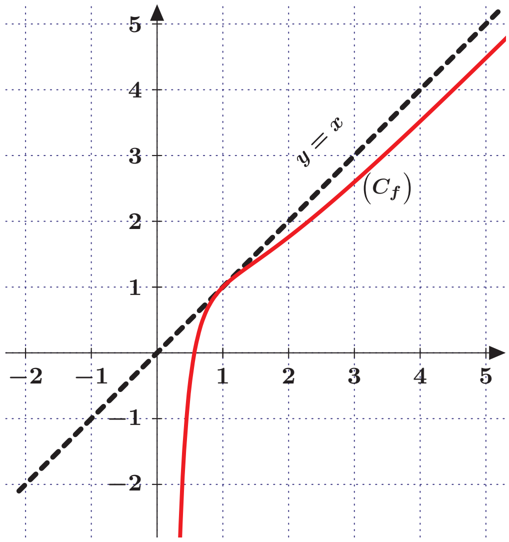
$(T) : y = f'(1)(x-1) + f(1)$

Puisque $f'(1) = 1 - \dfrac{2\ln(1) - (\ln 1)^2}{1^2} = 1$, $(\ln(1) = 0)$ et $f(1) = 1$

Donc $(T) : y = 1(x-1) + 1$

Alors : $(T) : y = x - 1 + 1$

$y = x$ est l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 1



4 - Le graphique ci-contre représente la courbe (C_f) dan un même repère orthonormé.

Soit φ la restriction de f sur l'intervalle $]0;1]$

0.5 pt **a)** Montrons que φ admet une fonction réciproque φ^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminerons

On a la fonction f est continue sur $]0;+\infty[$, donc φ est continue sur $]0;1]$

Et aussi f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$, donc φ est strictement croissante sur $]0;1]$

Alors φ admet une fonction réciproque φ^{-1} définie sur un intervalle $J = f\left(]0;1]\right) = \left]\lim\limits_{x\to 0^+} f(x); f(0)\right] =]-\infty;1]$

Finalement φ admet une fonction réciproque φ^{-1} définie sur un intervalle $J =]-\infty;1]$

0.5 pt **b)** Montrons que φ^{-1} est dérivable en 0 et que $\left(\varphi^{-1}\right)'(0) = \dfrac{\alpha}{2+2\alpha}$

On a $\varphi(\alpha) = 0 \Rightarrow \varphi^{-1}(0) = \alpha$; $(\alpha \in]0,1])$

Puisque φ est dérivable en $(\alpha \in]0,1])$

$$\begin{aligned}
\text{Et que : } (\varphi)'(\alpha) &= 1 - \frac{2\ln(\alpha) - (\ln\alpha)^2}{\alpha} \\
&= 1 - \frac{-2\alpha - \alpha^2}{\alpha^2} \text{ ; (car : } \ln(\alpha) = \alpha) \\
&= 1 + \frac{\alpha(2+\alpha)}{\alpha^2}
\end{aligned}$$

$$= 1 + \frac{2+\alpha}{\alpha}\,;\ (\alpha \neq 0)$$
$$= \frac{\alpha + 2 + \alpha}{\alpha}$$
$$(\varphi)'(\alpha) = \frac{2+2\alpha}{\alpha}$$

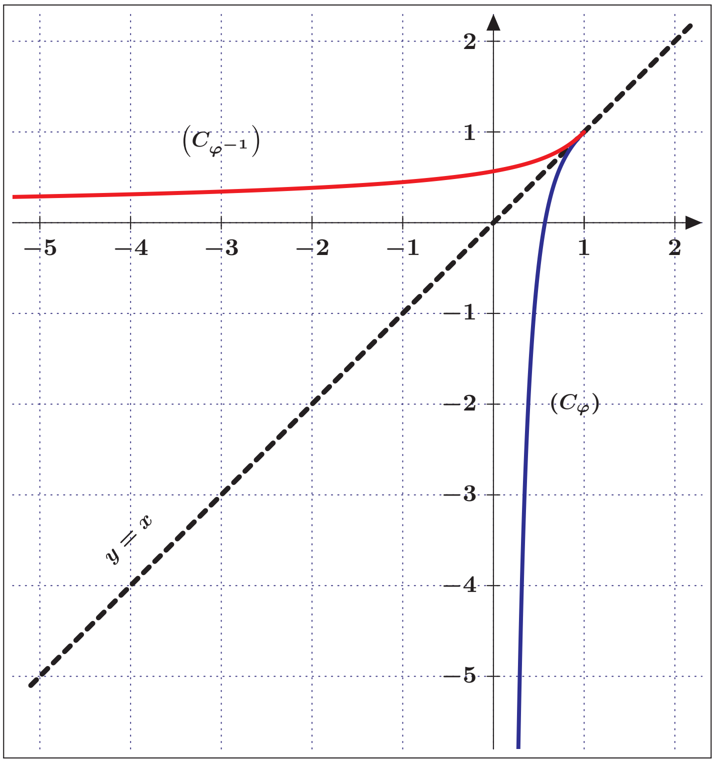
Comme $(\varphi)'(\alpha) \neq 0$; $(\alpha > 0)$

Donc : φ^{-1} est dérivable en $\mathbf{0}$

Et que : $\left(\varphi^{-1}\right)'(0) = \dfrac{1}{lr\varphi'(\varphi^{-1}(0))}$
$$= \frac{1}{lr\varphi'(\alpha)}$$
$$= \frac{1}{\frac{2+2\alpha}{\alpha}}$$
$$\left(\varphi^{-1}\right)'(0) = \frac{\alpha}{2+2\alpha}$$

Finalement : φ^{-1} est dérivable en $\mathbf{0}$ et que $\left(\varphi^{-1}\right)'(0) = \dfrac{\alpha}{2+2\alpha}$

0.75 pt **c)** Recopiions la courbe de φ et construirons la courbe de φ^{-1} dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$



<u>Partie III :</u>

Soit (u_n) une suite définie par : $u_0 = e$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

0.5 pt **1 -** Montrons par récurrence que $1 < u_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

Pour $n = 0$ on a $u_0 = e$ et $1 < e$ d'où $1 < u_0$

Donc la proposition est vraie pour $n = 0$

Supposons que $1 < u_n$ pour n fixé de $\mathbb{N}$ et montrons que $1 < u_{n+1}$

D'après l'hypothèse de récurrence on a : $1 < u_n$

Donc $f(1) < f(u_n)$; (Car f est strictement croissante)

D'où $1 < u_n$; ($f(1) = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$)

D'après le raisonnement par récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 < u_n$

0.5 pt **2 - a)** Montrons que la suite (u_n) est décroissante

On a d'après la question **Partie II -3-c)** $(\forall x > 0)$; $f(x) \leq x$

Et puisque $u_n > 1 > 0$, alors $(\forall n \in \mathbb{N})$; $f(u_n) \leq u_n$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} \leq u_n$

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} - u_n \leq 0$

Finalement : la suite (u_n) est décroissante

0.25 pt **b)** Déduisons que la suite (u_n) est convergente

On a (u_n) est décroissante et minorée par 1 ($u_n > 1$)

Alors la suite (u_n) est convergente

0.5 pt **c)** Déterminons la limite de la suite (u_n)

- On a la suite (u_n) est minorée par 1

Donc $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n > 1$

D'où $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n \in]1; +\infty[$

- La fonction f est continue sur $]0; +\infty[$ et donc sur $]1; +\infty[$
- $f(]1; +\infty[) = \left] \lim\limits_{x \to 1^+} f(x); \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \right[=]1; +\infty[$

D'où : $f(]0; +\infty[) \subset]0; +\infty[$

- la suite (u_n) est convergente vers $l \in \mathbb{R}$, où l est solution de l'équation $f(x) = x$

Géométriquement : les solutions de l'équation $f(x) = x$ sont les abscisses des points d'intersection de (C_f) et la droite d'équation $y = x$

Donc $l = 1$, d'où $\lim u_n = l$

Algébriquement : $f(x) = x \Leftrightarrow x - \dfrac{(\ln x)^2}{x} = x$

$$\Leftrightarrow -\frac{(\ln x)^2}{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\ln x)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

Donc $l = 1$, $\boxed{\text{Finalement } \lim u_n = 1}$

$\boxed{\text{FIN}}$