ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Expérimentales

Session : Rattrapage juillet 2019

MATHÉMATIQUES

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **3 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 4 exercices :

— Exercice 1 : **Géométrie dans l'espace** .... **3 points**
— Exercice 2 : **Nombres complexes** .... **3 points**
— Exercice 3 : **Probabilités** .... **3 points**
— Exercice 4 : **Problème d'analyse** .... **11 points**

♠ On désigne par $|z|$ le module du nombre complexe z et par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe z
♠ ln désigne la fonction logarithme népérien.

Exercice 1 : (3 pts)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère les points $A(1,2,2)$, $B(3,-1,6)$, et $C(1,1,3)$.

0,75 pt **1 - a)** Vérifions que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$.

On a : $\overrightarrow{AB}(3-1; -1-2; 6-2)$, donc $\overrightarrow{AB}(2;-3;4)$

Et on a : $\overrightarrow{AC}(1-1; 1-2; 3-2)$, donc $\overrightarrow{AC}(0;-1;1)$

Alors : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} \vec{k}$

$= ((-3) \times 1 - (-1) \times 4)\vec{i} - (2 \times 1 - 0 \times 4)\vec{j} + (2 \times (-1) - 0 \times (-3))\vec{k}$

Finalement $\boxed{\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}}$

0,5 pt **b)** Déduisons que $x - 2y - 2z + 7 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

On a $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(1;-2;-2)$ est un vecteur normale au plan (ABC)

Donc l'équation cartésienne du plan (ABC) s'écrit : $x - 2y - 2z + d = 0$

Puisque $A \in (ABC)$, alors $x_A - 2y_A - 2z_A + d = 0$

Donc $(1 - 2 \times 2 - 2 \times 2 + d = 0)$ donc $d = 7$

D'où $\boxed{(ABC) : x - 2y - 2z + 7 = 0}$

2 - Soient les points $E(5,1,4)$ et $F(-1,1,12)$ et (S) l'ensemble des points M vérifiant $\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{MF} = 0$

0,75 pt Montrons que (S) est la sphère de centre $\Omega(2,1,8)$ et de rayon $R = 5$

On a :$M(x;y;z) \in S \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 5-x \\ 1-y \\ 4-z \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1-x \\ 1-y \\ 12-z \end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow (5-x)(-1-x) + (1-y)(1-y) + (4-z)(12-z) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + (1-y)^2 + z^2 - 16z + 43 = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - 4x + 4) + (y-1)^2 + (z^2 - 16z + 64) + 43 - 4 - 64 = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-8) = 25$

Alors $\boxed{(S) \text{ est la sphère de centre } \Omega(2;1;8) \text{ et de rayon : } R = \sqrt{25} = 5}$

0,5 pt **3 - a)** Calculons $d(\Omega, (ABC))$ distance du point Ω au plan (ABC).

0,5 pt On a : $d(\Omega; (ABC)) = \dfrac{|ax_\Omega + by_\Omega + cz_\Omega + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \dfrac{1 \times 2 - 2 \times 1 - 2 \times 8 + 7}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-2)^2}} = \boxed{3}$

b) Déduisons que le plan (ABC) coupe la sphère (S) selon un cercle (Γ) de rayon $r = 4$.

On a : $d(\Omega; (ABC)) = 3$ et $R = 5$ donc $d(\Omega; (ABC)) < R$

Donc $\boxed{\text{le plan coupe la sphère selon un cercle } (\Gamma)}$ de rayon r

D'où : $r = \sqrt{R^2 - d(\Omega; (ABC))^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = \boxed{4}$

Exercice 2 : (3 pts)

0,75 pt **1 - a)** Résolvons dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation : $z^2 - 3z + 3 = 0$

Le discriminant Δ de l'équation est :$\Delta = 3^2 - 4 \times 3 = -3 = (\sqrt{3}i)^2$.

Donc l'équation admet deux solution sont :

$z_1 = \dfrac{3+\sqrt{3}i}{2}$ et $z_2 = \dfrac{3-\sqrt{3}i}{2}$

b) On pose $a = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

0,5 pt Écrivons a sous forme trigonométrique

On a : $a = \dfrac{3}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i = \sqrt{3}(cos(\dfrac{\pi}{6}) + isin(\dfrac{\pi}{6}))$

0,5 pt **2 -** On considère le nombre complexe $b = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, vérifier que $b^2 = i$

On a : $b = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$,alors :

$b^2 = (\dfrac{\sqrt{2}}{2})^2(1+i)^2 = \dfrac{2}{4}(1+2i-1) = \dfrac{1}{2}(2i) = i$

0,5 pt **3 -** On pose $h = \cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}$, montrer que $h^4 + 1 = a$

On a :$h = cos(\dfrac{\pi}{12}) + isin(\dfrac{\pi}{12})$ alors :

$h^4 + 1 = cos(\dfrac{4\pi}{12}) + isin(\dfrac{4\pi}{12}) + 1 = cos(\dfrac{\pi}{3}) + isin(\dfrac{\pi}{12}) + 1 = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} + 1 = \dfrac{3}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = a$

4 - Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, on considère le point B d'affixe b et R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

0,5 pt **a)** Soit c l'affixe du point C image du point B par la rotation R. Montrer que $c = ib$.

Puisque le point $C(c)$est l'image du point $B(b)$ par la rotation R alors :

$z_c - z_o = e^{i\dfrac{\pi}{2}}(z_B - z_O)$

$\Leftrightarrow c = (cos(\frac{\pi}{2}) + isin(\frac{\pi}{2}))b$

$\Leftrightarrow c = (0+i)b$

$\Leftrightarrow c = ib$

0,25 pt **b)** En déduire la nature du triangle OBC.

On a :$c = ib$,donc $\dfrac{c}{b} = i$

alors $\dfrac{z_c - z_o}{z_b - z_o} = [1; \frac{\pi}{2}]$,donc $|\dfrac{z_c - z_o}{z_b - z_o}| = 1 et arg(\dfrac{z_c - z_o}{z_b - z_o}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$

donc $OB = OC et \overline{(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC})} = \frac{\pi}{2}[2\pi]$

alors le triangle OBC est un triangle rectangle et isocèle en O

Exercice 3 : (3 pts)

Une urne contient une boule rouge, deux boules blanches et trois boules noires indiscernables au toucher. On tire au hasard successivement et avec remise trois boules de l'urne.

Soient les événements suivants :

A : "les trois boules tirées sont de même couleur "

B : "il n'y a aucune boule blanche parmi les boules tirées "

C : "il y a exactement deux boules blanches parmi les boules tirées "

2 pts **1 -** Monter que $p(A) = \dfrac{1}{6}$ et $p(B) = \dfrac{8}{27}$

On a : $card(\Omega) = 6^3 = 216; card(A) = 1^3 + 2^3 + 3^3 = 36$

et $cad(B) = 4^3 = 64$

Donc $p(A) = \dfrac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{36}{216} = \frac{1}{6}; p(A) = \dfrac{card(B)}{card(\Omega)} = \frac{64}{216} = \frac{8}{27}$

1 pt **2 -** Calculer $p(C)$.

On a : $card(C) = 3 \times (2^2 \times 4^1) = 48$, donc : $p(C) = \dfrac{card(C)}{card(\Omega)} = \frac{48}{216} = \frac{2}{9}$

Problème : (11 pts)

Première partie :

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = 2 + 8\left(\dfrac{x-2}{x}\right)^2 e^{x-4}$

et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$(unité : 1 cm)

0.5 pt **1 - a)** Vérifier que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$ et interpréter le résultat géométriquement.

On a : $lim_{x\longrightarrow-\infty}\dfrac{x-2}{x} = 1$ et $lim_{x\longrightarrow-\infty}e^{x-4} = 0$ donc

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2 + 8 \times 1^2 \times 0 = 2$

Donc la droite $y = 2$ est une asymptote horizontale à la courbe (C) au voisinage $-\infty$

0.5 pt **b)** Vérifier que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$ et interpréter le résultat géométriquement.

On a $\lim_{x\to 0}(\dfrac{x-2}{x})^2 = +\infty$,

$lim_{x\to 0}e^{x-4} = e^{-4}$, donc :

$\lim_{x\to 0} f(x) = 2 + 8 \times (+\infty) \times e^{-4} = +\infty$

donc la droite $x = 0$ est une asymptote verticale à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$

0.5 pt **2 - a)** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

On a : $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x-2}{x} = 1$ et $\lim_{x\to+\infty} e^{x-4} = +\infty$,$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2+8\times 1^2 \times (+\infty) = +\infty$

b) Montrer que la courbe (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordon-

0.5 pt nées au voisinage de $+\infty$.

On a : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, et on a :

$\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{2+8(\dfrac{x-2}{x})^2 e^{x-4}}{x}$

$= \lim_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x} + 8(\dfrac{x-2}{x})^2 \dfrac{e^{x-4}}{x}$

$0+8\times 1\times(+\infty) = +\infty$ Donc la courbe (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

0.75 pt **3 - a)** Montrer que $f'(x) = \dfrac{8(x-2)(x^2-2x+4)e^{x-4}}{x^3}$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$.

la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, alors pour tout x de $\mathbb{R}^*$, on a :

$f' = 0 + 8\times 2(\dfrac{x-(x-2)}{x^2})(\dfrac{x-2}{x})e^{x-4} + 8(\dfrac{x-2}{x})^2 e^{x-4}$

$= 8\times 2\times(\dfrac{2}{x^2})(\dfrac{x-2}{x}e^{x-4} + 8\dfrac{(x-2)^2}{x^2}e^{x-4}$

$= \dfrac{8(x-2)(2\times 2 + x(x-2))e^{x-4})}{x^3}$

$= \dfrac{8(x-2)(x^2-2x+4)e^{x-4})}{x^3}$

0.25 pt **b)** Vérifier que pour tout x de $\mathbb{R}$, $x^2-2x+4>0$.

Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a :$x^2-2x+4 = (x-1)^2+3, or(x-1)^2 \geq 0$

alors $(x-1)^2+3>0$, d'où : $x^2-2x+4>0, \forall x\in\mathbb{R}$.

c) Monter que la fonction f est strictement décroissante sur $]0,2]$ et strictement croissante

0.75 pt sur chacun des intervalles $]-\infty,0[$ et $[2,+\infty[$.

On a pour tout x de $\mathbb{R}, x^2-2x+4>0$ et $e^{x-4}>0, alors 8(x^2-2x+4)e^{x-4}>0$, donc le signe de f' est le même que celui de $\dfrac{x-2}{x^3}$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
x^3		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{x-2}{x^3}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

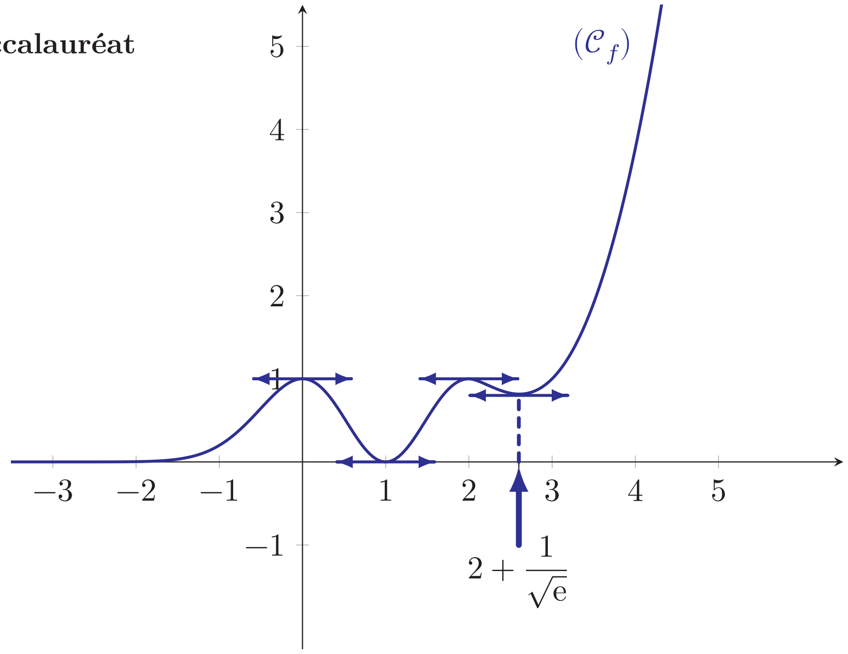
Danc f est strictement décroissante sur $]0;2]$, et strictement croissante sur chacun des intervalles $]-\infty;0[et[2;+\infty$.

0.5 pt **d)** Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}^*$.

Tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}^*$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	2	$\nearrow$	$+\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

1 pt **4 -** Construire la courbe (C) dans le repère $\left(O,\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.



0.5 pt **5 - a)** Vérifier que la fonction $H : x \mapsto \frac{1}{x}e^{x-4}$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \mapsto \dfrac{x-1}{x^2}e^{x-4}$ sur $[2,4]$.

On a H est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, alors H est dérivable sur $[2;4]$,alors :

$H^{'}(x) = \dfrac{-1}{x^2}e^{x-4} + \dfrac{1}{x}e^{x-4} = (\frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x})e^{x-4}$

$\dfrac{x-1}{x^2}e^{x-4} = h(x)$

Donc la fonction H est une primitive de la fonction f sur $[2;4]$

0.25 pt **b)** Vérifier que $f(x) = 2 + 8e^{x-4} - 32\dfrac{(x-1)}{x^2}e^{x-4}$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$.

Pour tout x de $\mathbb{R}^*$, on a :

$f(x) = 2 + 8(\dfrac{x-2}{x})^2 e^{x-4} = 2 + 8(\dfrac{x^2-4x+4}{x^2})e^{x-4}$

$2 + 8(1 - 4(\dfrac{x-1}{x^2}))e^{x-4} = 2 + 8e^{x-4} - 32(\dfrac{x-1}{x^2})e^{x-4}$

0.5 pt **c)** Calculer l'intégrale $\int_2^4 e^{x-4}dx$.

On a :$\int\limits_2^4 e^{x-4}dx = [e^{x-4}]_2^4 = e^0 - e^{-2} = 1 - \dfrac{1}{e^2} = \dfrac{e^2-1}{e^2}$

0.75 pt **d)** Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 4$.

L'aire du domaine plan limité par (C) et l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 2$ et $x = 4$ est :

$A = \int_2^4 |f(x)|dx = \int\limits_2^4 f(x)dx$; car $\forall x \in \mathbb{R} f(x) \geqslant 0$.

$A = \int_2^4 2 + 8e^{x-4} - 32(\dfrac{x-1}{x^2})e^{x-4}dx = 2\int\limits_2^4 dx + 8\int\limits_2^4 e^{x-4}dx - 32\int\limits_2^4 h(x)dx$

$A = 2[x]_2^4 + 8(\dfrac{e^2-1}{e^2}) - 32[H(x)]_2^4$

$A = 2(4-2) + 8(\dfrac{e^2-1}{e^2}) - 32(\frac{1}{4}e^{4-4} - \frac{1}{2}e^{2-4})$

$A = 4 + 8(\dfrac{e^2-1}{e^2}) - 32(\frac{1}{4} - \frac{1}{2e^2})$

$A = 4 + 8(\dfrac{e^2-1}{e^2}) - 32(\frac{e^2-2}{4e^2})$

$A = 4 + 8(\frac{e^2-1}{e^2}) - 8(\frac{e^2-2}{e^2})$

$A = 4 + 8(\frac{e^2-1-e^2+2}{e^2})$

$A = 4 + \frac{8}{e^2}$

Deuxième partie :

1 - On considère la fonction numérique g définie sur $[2,4]$ par $g(x) = 8(x-2)e^{x-4} - x^2$

0.25 pt **a)** Calculer $g(4)$

On a : $g(4) = 8(4-2)e^{4-4} - 4^2 = 16 - 16 = 0$

0.5 pt **b)** Vérifier que pour tout x de l'intervalle $[2,4]$, $g(x) = -(x-4)^2e^{x-4} + x^2(e^{x-4}-1)$

Pour tout x de $[2;4]$, on a :

$g(x) = 8(x-2)e^{x-4} - x^2 = -(x^2-8x-16)e^{x-4} - x^2 + x^2e^{x-4}$

$= -(x-4)^2e^{x-4} + x^2(e^{x-4}-1)$

c) Vérifier que pour tout x de l'intervalle $[2,4]$: $e^{x-4} - 1 \leq 0$ puis en déduire que pour tout

0.5 pt x de l'intervalle $[2,4]$: $g(x) \leq 0$

Si $2 \leqslant x \leqslant 4$, alors $2-4 \leqslant x-4 \leqslant 4-4$, alors $-2 \leqslant x-4 \leqslant 0$ alors $e^{-2} \leqslant e^{x-4} \leqslant e^0$, donc $e^{x-4} \leqslant 1$, d'où $e^{x-4} - 1 \leqslant 0, \forall x \in [2;4]$

Pour tout x de $[2;4]$, on a : $e^{x-4} - 1 > 0$ et $e^{x-4} > 0$ donc $-(x-1)^2e^{x-4} \leqslant 0$ et $x^2(e^{x-4}-1) \leqslant 0$, donc $-(x-1)^2e^{x-4} + x^2(e^{x-4}-1) \leqslant 0$, d'où $g(x) \geqslant 0, \forall x \in [2;4]$

0.5 pt **2 - a)** Vérifier que pour tout x de l'intervalle $[2,4]$, $f(x) - x = \left(\frac{x-2}{x^2}\right)g(x)$

Pour tout x de $[2;4]$, on a :

$f(x) - x = 2 + 8(\frac{x-2}{x})^2e^{x-4} - x$

$= (\frac{x-2}{x^2})(\frac{2x^2}{x-2} + 8(x-2)e^{x-4} - \frac{x^3}{x-2})$

$= (\frac{x-2}{x^2})(8(x-2)e^{x-4} - \frac{x^3-2x^2}{x-2})$

$= (\frac{x-2}{x^2})(8(x-2)e^{x-4} - \frac{x^2(x-2)}{x-2})$

$= (\frac{x-2}{x^2})(8(x-2)e^{x-4} - x^2)$

$= (\frac{x-2}{x^2})g(x)$

0.25 pt **b)** En déduire que pour tout x de l'intervalle $[2,4]$, $f(x) \leq x$.

Pour x de $[2;4]$, on a $x-2 \geqslant 0$; donc $\frac{x-2}{x^2} \geqslant 0$, or $g(x) \leqslant 0$, alors $\frac{x-2}{x^2}g(x) \leqslant 0$ donc $f(x) - x \leqslant 0$, d'où :$f(x) \leqslant x; \forall x \in [2;4]$

3 - Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0.5 pt **a)** Monter par récurrence que $2 \leq u_n \leq 4$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

Pour $n = 0$, on a :$U_0 = 3$, donc $2 \leqslant U_0 \leqslant 4$

Supposons que : $2 \leqslant U_n \leqslant 4$, et en montrons que :$2 \leqslant U_{n+1} \leqslant 4$.

On a : $2 \leqslant U_n \leqslant 4$, donc $2 \leqslant f(U_n) \leqslant 4$ car f et continue et croissante sur $[2;4]$. donc $2 \leqslant U_{n+1} \leqslant 4$, car $f(2) = 2$ et $f(4) = 4$.

D'après le principe du raisonnement par récurrence :

$2 \leqslant U_n \leqslant 4 \; \forall n \in [2;4]$

0.5 pt **b)** Déterminer la monotonie de la suite (u_n) et en déduire qu'elle est convergente.

d'après la question 2)b), on a :$\forall x \in [2;4] : f(x) = -x = 0$, et puisque : $U_n \in [2;4]$, alors pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :

$(f(U_n) - U_n \leqslant 0 \Leftrightarrow U_{n+1} - U_n \Leftrightarrow U_{n+1} \leqslant U_n$

donc la suite (U_n) est décroissante. et puisque la suite (U_n) est décroissante et minoré par 2 alors (U_n) est convergente

0.75 pt **c)** Calculer la limite de la suite (u_n).

La fonction f est continue et croissante sur $[2;4]$, donc $f([2;4]) = [f(2); f(4)] = [2;4]$ alors $f([2;4]) \subset [2;4]$, or $U_0 \in [2;4]$, et puisque la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, donc la limite de suite (U_n) est le nombre réel l la solution $f(l) = l$.

$f(l) = l \Leftrightarrow f(l) - l = 0$
$\Leftrightarrow (\dfrac{l-2}{l^2})g(l) = 0$
$\Leftrightarrow l - 2 = 0$ ou $g(l) = 0$
$\Leftrightarrow l = 2$ ou $l = 4$

puisque la suite (U_n) est décroissante, donc pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $U_n < U_0$ donc $U_n < 3$
Donc $\lim_{n\to+\infty} U_n = 2$