ROYAUME DU MAROC

Correction

Baccalauréat Sciences & Technologie

Session : Normal 2021

MATHÉMATIQUES

Exercice 1 : (2 pts)

0.5 pt **1 - a) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation** $e^{2x} - 4e^x + 3 = 0$

On a $e^{2x} - 4e^x + 3 = 0 \Leftrightarrow (e^x)^2 - 4 \times e^x + 3 = 0$

On effectue le changement d'inconnue $t = e^x$

Il vient $e^{2x} - 4e^x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = e^x \\ t^2 - 4t + 3 = 0 \end{cases}$

On s'est ainsi ramené à la résolution de l'équation du deuxième degré $t^2 - 4t + 3 = 0$

Le discriminant de l'équation est $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 16 - 12 = 4 > 0$

L'équation a deux racines réelles distinctes $t_1 = \dfrac{4 - \sqrt{4}}{2 \times 1} = 1$ et $t_2 = \dfrac{4 + \sqrt{4}}{2 \times 1} = 3$

Finalement $e^{2x} - 4e^x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = e^x \\ t = 1 \text{ ou } t = 3 \end{cases} \Leftrightarrow e^x = 1 \text{ ou } e^x = 3$

Comme $1 > 0$ et $3 > 0$, alors l'équation proposée admet deux racines : $\boxed{\mathcal{S} = \{0, \ln 3\}}$.

0.5 pt **b) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation** $e^{2x} - 4e^x + 3 \leq 0$

On a $e^{2x} - 4e^x + 3 \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = e^x \\ t^2 - 4t + 3 \leq 0 \end{cases}$

Étudions le signe du trinôme $t^2 - 4t + 3$, les racines de ce trinôme sont : 1 et 3

Par conséquent, nous obtenons le tableau de signe suivant :

t	$-\infty$		1		3		$+\infty$
t^2-4t+3		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $e^{2x} - 4e^x + 3 \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = e^x \\ t^2 - 4t + 3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = e^x \\ 1 \leq t \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq e^x \leq 3 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \ln 3$

En conclusion, $\boxed{\mathcal{S} = [0, \ln 3]}$.

0.5 pt

2 - Calculons $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-4e^{x}+3}{e^{2x}-1}$

Posons $t=e^{x}$, on a $t=e^{x}\xrightarrow{x\to 0}1$, donc $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-4e^{x}+3}{e^{2x}-1}=\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{t^{2}-4t+3}{t^{2}-1}$

Les racines du trinôme $t^{2}-4t+3$ sont : 1 et 3, donc $t^{2}-4t+3=(t-1)(t-3)$

Donc $\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{t^{2}-4t+3}{t^{2}-1}=\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{(t-1)(t-3)}{(t-1)(t+1)}=\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{t-3}{t+1}=\dfrac{-2}{2}=-1$

D'où $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-4e^{x}+3}{e^{2x}-1}=-1}$

0.5 pt

3 - Montrons que l'équation $e^{2x}+e^{x}+4x=0$ admet une solution dans $[-1,0]$.

Soit $f:x\mapsto e^{2x}+e^{x}+4x$ définie sur $\mathbb{R}$.

Montrons que l'équation $f(x)=0$ admet une solution dans l'intervalle $[-1,0]$.

Les trois fonctions $x\mapsto e^{x}$, $x\mapsto e^{2x}$ et $x\mapsto 4x$ sont continues sur $\mathbb{R}$

Donc f est continue sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions usuelles continues sur $\mathbb{R}$.

Et on a $f(0)=2>0$ et $f(-1)=\dfrac{1}{e^{2}}+\dfrac{1}{e}-4<1+1-4=-2<0$ $\left(\text{car } \dfrac{1}{e^{2}}<1 \text{ et } \dfrac{1}{e}<1\right)$

Donc f est continue sur $[-1,0]$ (car elle est continue sur $\mathbb{R}$) et on a $f(0)\times f(-1)<0$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[-1,0]$

D'où $\boxed{\text{l'équation } e^{2x}+e^{x}+4x=0 \text{ admet une solution dans } [-1,0]}$

Exercice 2 : (4 pts)

Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0=\dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{3-2u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0.25 pt

1 - Calculons u_1

On utilise la relation $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{3-2u_n}$ pour $n=0$ et on obtient $u_{0+1}=\dfrac{u_0}{3-2u_0}$

C'est à dire $u_1=\dfrac{\frac{1}{2}}{3-2\times\frac{1}{2}}\Rightarrow u_1=\dfrac{1}{2(3-1)}$, d'où $\boxed{u_1=\dfrac{1}{4}}$

0.5 pt

2 - Montrons par récurrence que $0<u_n\leq\dfrac{1}{2}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

- **Initialisation :** On a $u_0=\dfrac{1}{2}$ et $0<\dfrac{1}{2}\leq\dfrac{1}{2}$ donc $0<u_0\leq\dfrac{1}{2}$
- **Hérédité :** Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $0<u_n\leq\dfrac{1}{2}$, montrons que $0<u_{n+1}\leq\dfrac{1}{2}$

  On a $0<u_n\leq\dfrac{1}{2}\Rightarrow -2\times\dfrac{1}{2}\leq -2u_n<-2\times 0$

  $$\Rightarrow 3-1\leq 3-2u_n<3-0$$
  $$\Rightarrow \dfrac{1}{3}<\dfrac{1}{3-2u_n}\leq\dfrac{1}{2}$$

  On multiplie membre à membre les deux inégalités $0<u_n\leq\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{1}{3}<\dfrac{1}{3-2u_n}\leq\dfrac{1}{2}$

  Donc $0\times\dfrac{1}{3}<u_n\times\dfrac{1}{3-2u_n}\leq\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}$ c'est à dire $0<u_{n+1}\leq\dfrac{1}{4}$ d'où $0<u_{n+1}\leq\dfrac{1}{2}$
- **Conclusion :** D'après le principe de récurrence $\boxed{0<u_n\leq\dfrac{1}{2} \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}}$

0.5 pt

3 - a) Montrons que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{1}{2}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

Pour tout n de $\mathbb{N}$ on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\cancel{u_n}}{3-2u_n} \times \dfrac{1}{\cancel{u_n}}$ donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{3-2u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

Et d'après la question précédente, nous avons $0 < u_n \leq \dfrac{1}{2}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

Alors $\dfrac{1}{3} < \dfrac{1}{3-2u_n} \leq \dfrac{1}{2}$, par conséquent $\dfrac{1}{3} < \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{1}{2}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

D'où $\boxed{\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{1}{2} \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}}$

0.5 pt

b) Déduisons la monotonie de la suite (u_n)

D'après la question précédente, on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{1}{2}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

Donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$

Puisque $u_n > 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$, alors $u_n \times \dfrac{u_{n+1}}{u_n} < u_n \times 1$

Donc $u_{n+1} < u_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$, d'où $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est décroissante}}$

0.75 pt

4 - a) Montrons que $0 < u_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$, puis calculons $\lim u_n$

✓ **Montrons que $0 < u_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$**

➠ Première méthode (*On utilise un raisonnement par récurrence*)

- **Initialisation :** On a $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $0 < \dfrac{1}{2} \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{0+1}$ donc $0 < u_0 \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{0+1}$
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $0 < u_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$, montrons que $0 < u_{n+1} \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+2}$

  D'après la question **3-b)** on a $0 < \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{1}{2}$

  On multiplie membre à membre les inégalités $0 < u_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$ et $0 < \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{1}{2}$

  Donc $0 \times 0 < \cancel{u_n} \times \dfrac{u_{n+1}}{\cancel{u_n}} \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} \times \dfrac{1}{2}$ d'où $0 < u_{n+1} \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+2}$
- **Conclusion :** D'après le principe de récurrence $\boxed{0 < u_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}}$

➠ Deuxième méthode

On a $0 < \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{1}{2}$ pour tout n de $\mathbb{N}$, alors :

$$\left.\begin{array}{l} 0 < \dfrac{u_1}{u_0} \leqslant \dfrac{1}{2} \\ 0 < \dfrac{u_2}{u_1} \leqslant \dfrac{1}{2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 < \dfrac{u_n}{u_{n-1}} \leqslant \dfrac{1}{2} \\ 0 < \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \text{On multiplie donc : } 0 < \dfrac{\cancel{u_1}}{u_0} \times \dfrac{\cancel{u_2}}{\cancel{u_1}} \times \ldots \times \dfrac{\cancel{u_n}}{\cancel{u_{n-1}}} \times \dfrac{u_{n+1}}{\cancel{u_n}} \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$$

Donc $0 < \dfrac{u_{n+1}}{u_0} \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$ c'est à dire $0 < u_{n+1} \leq u_0 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Alors $(\forall n \in \mathbb{N})\ 0 < u_{n+1} \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+2}$, par conséquent $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ 0 < u_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$

Et puisque $0 < u_0 = \frac{1}{2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{0+1}$ alors $\boxed{0 < u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}}$

✓ **Calculons** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Puisque $-1 < \frac{1}{2} < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$

Et comme $0 < u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

Alors d'apès le théorème des gendarmes $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$

0.5 pt **b) Calculons $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ où $v_n = \ln(3 - 2u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$**

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} 3 - 2u_n = 3$

Et la fonction $x \mapsto \ln x$ est continue sur $]0, +\infty[$ alors elle est continue en 3

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \ln(3 - 2u_n) = \ln\left(\lim\limits_{n\to+\infty} 3 - 2u_n\right)$ d'où $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ln 3}$

0.5 pt **5 - a) Vérifions que $\frac{1}{u_{n+1}} - 1 = 3\left(\frac{1}{u_n} - 1\right)$ pour tout n de $\mathbb{N}$**

Pour tout n de $\mathbb{N}$ on a :
$$\begin{aligned} \frac{1}{u_{n+1}} - 1 &= \frac{3 - 2u_n}{u_n} - 1 \\ &= \frac{3}{u_n} - 2 - 1 \\ &= 3\left(\frac{1}{u_n} - 1\right) \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\frac{1}{u_{n+1}} - 1 = 3\left(\frac{1}{u_n} - 1\right) \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}}$

0.5 pt **b) Déduisons u_n en fonction de n pour tout n de $\mathbb{N}$**

➠ Première méthode

Soit (α_n) la suite définie par $\alpha_n = \frac{1}{u_n} - 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$

On a $\alpha_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} - 1$ alors $\alpha_{n+1} = 3\left(\frac{1}{u_n} - 1\right)$, par conséquent $\alpha_{n+1} = 3\alpha_n$

Cela signifie que (α_n) est une suite géométrique de raison $q = 3$

Et de premier terme $\alpha_0 = \frac{1}{u_0} - 1 = 2 - 1 = 1$

Donc $\alpha_n = 3^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$, et puisque $\alpha_n = \frac{1}{u_n} - 1$ alors $\frac{1}{u_n} - 1 = 3^n$

Par conséquent $\frac{1}{u_n} = 3^n + 1$, d'où $\boxed{u_n = \frac{1}{3^n + 1} \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}}$

➠ Deuxième méthode

On a $\frac{1}{u_{n+1}} - 1 = 3\left(\frac{1}{u_n} - 1\right)$ pour tout n de $\mathbb{N}$, donc :

$$\left.\begin{array}{l} \cancel{\frac{1}{u_1} - 1} = 3\left(\frac{1}{u_0} - 1\right) \\ \cancel{\frac{1}{u_2} - 1} = 3\cancel{\left(\frac{1}{u_1} - 1\right)} \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cancel{\frac{1}{u_n} - 1} = 3\cancel{\left(\frac{1}{u_{n-1}} - 1\right)} \\ \frac{1}{u_{n+1}} - 1 = 3\cancel{\left(\frac{1}{u_n} - 1\right)} \end{array}\right\} \text{On multiplie membre à membre, alors : } \frac{1}{u_{n+1}} - 1 = 3^{n+1}\left(\frac{1}{u_0} - 1\right)$$

Donc $\dfrac{1}{u_{n+1}} = 3^{n+1}(2-1)+1$ c'est à dire $u_{n+1} = \dfrac{1}{3^{n+1}+1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

Donc $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ u_n = \dfrac{1}{3^n+1}$ et $u_0 = \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3^0+1}$ d'où $\boxed{u_n = \dfrac{1}{3^n+1} \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}}$

Exercice 3 : (5 pts)

0.75 pt **1 - Résolvons l'équation $z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$ dans l'ensemble $\mathbb{C}$**

Le discriminant de l'équation est : $\Delta = \left(-\sqrt{3}\right)^2 - 4\times 1\times 1 = 3-4 = -1 < 0$

Donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées sont :

$$z_1 = \frac{\sqrt{3}-i}{2} \text{ et } z_2 = \overline{z_1} = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$$

D'où l'ensemble des solutions de l'équation est : $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i, \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right\}}$

2 - Soient les nombres complexes $a = e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $b = \dfrac{3}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

0.25 pt **a) Écrivons a sous forme algébrique**

On a : $a = e^{i\frac{\pi}{6}} = \cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ et $\begin{cases} \cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Donc $\boxed{a = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i}$

0.5 pt **b) Vérifions que $\overline{a}b = \sqrt{3}$**

On a $\overline{a}b = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i\right)\left(\dfrac{3}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= \dfrac{3\sqrt{3}}{4} + \cancel{\dfrac{3}{4}i} - \cancel{\dfrac{3}{4}i} - \dfrac{\sqrt{3}}{4}i^2$

$= \dfrac{4\sqrt{3}}{4}$

Donc $\boxed{\overline{a}b = \sqrt{3}}$

0.5 pt **3 - Montrons que le point $B(b)$ est l'image du point $A(a)$ par une homothétie h de centre O dont on déterminera le rapport**

On a $a = e^{i\frac{\pi}{6}}$ donc $|a| = 1$ d'où $a\overline{a} = 1$ (car $z\overline{z} = |z|^2$ pour tout nombre complexe z)

D'après la question précédente, on a : $\overline{a}b = \sqrt{3} \Leftrightarrow \underbrace{a\overline{a}}_{1}b = a\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow b = a\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OB} = \sqrt{3}\,\overrightarrow{OA}$

Donc $\boxed{B \text{ est l'image de } A \text{ par l'homothétie } h \text{ de cenre } O \text{ et de rapport } k = \sqrt{3}}$

4 - $M'(z')$ l'image de $M(z)$ par la rotation R de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$

0.5 pt **a) Ecrivons z' en fonction de z et a**

On a : $R(M) = M' \Leftrightarrow z' - a = e^{i\frac{\pi}{2}}(z-a)$

$$\Leftrightarrow z' = i(z-a) + a$$

$$\Leftrightarrow z' = iz - ia + a$$

Donc $\boxed{z' = iz - ia + a}$

0.25 pt **b) Soit $D(d)$ l'image de $C(\overline{a})$ par la rotation R, montrons que $d = a+1$**

On a : $R(C) = D \Leftrightarrow d = i\overline{a} - ia + a$

$$\Leftrightarrow d = i(\overline{a} - a) + a$$

$$\Leftrightarrow d = i\left(\cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}} - \frac{1}{2}i - \cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}} - \frac{1}{2}i\right) + a$$

$$\Leftrightarrow d = i \times (-i) + a$$

$$\Leftrightarrow d = 1 + a$$

Donc $\boxed{d = a+1}$

0.5 pt **c) Soit I le point d'affixe le nombre 1, montrons que $ADIO$ est un losange**

D'après la question précédente on a : $d = a+1$ alors $d - a = 1 - 0$

Par conséquent $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OI}$, cela signifie que $ADIO$ est un parallélogramme $(\star)$

D'autre part $AD = |d-a| = |1| = 1$ et $OA = |a| = \left|e^{i\frac{\pi}{6}}\right| = 1$ donc $AD = OA$ $(\star\star)$

De $(\star)$ et $(\star\star)$ on a $ADIO$ est un parallélogramme qui a deux côtés consécutifs égaux

D'où $\boxed{ADIO \text{ est un losange}}$

0.75 pt **5 - a) Vérifions que $d - b = \frac{\sqrt{3}-1}{2}(1-i)$, et déduisons un argument du nombre $d-b$**

✓ **Vérifions que $d - b = \frac{\sqrt{3}-1}{2}(1-i)$**

On a : $d - b = a + 1 - b$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i + 1 - \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2}{2} - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{1}{2}i$$
$$= \frac{\sqrt{3}-1}{2} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)i$$
$$= \frac{\sqrt{3}-1}{2} - \frac{\sqrt{3}-1}{2}i$$

Donc $\boxed{d - b = \frac{\sqrt{3}-1}{2}(1-i)}$

✓ **Déduisons un argument du nombre $d - b$**

On a $|1-i| = \sqrt{2}$ donc : $1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$

$$= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

Donc $\arg(1-i) \equiv -\frac{\pi}{4}\,[2\pi]$ et on a $\frac{\sqrt{3}-1}{2} \in \mathbb{R}_*^+ \Rightarrow \arg\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) \equiv 0\,[2\pi]$

Par conséquent $\arg(d-b) \equiv \arg\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) + (1-i)\,[2\pi]$

D'où $\boxed{\arg(d-b) \equiv -\frac{\pi}{4}\,[2\pi]}$

0.5 pt **b) Écrivons le nombre $1-b$ sous forme trigonométrique**

On a $b = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ donc :
$$\begin{aligned} 1-b &= 1 - \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ &= -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ &= -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &= \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) \\ &= \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

D'où $\boxed{1-b = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)}$

0.5 pt **c) Déduisons une mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{BI},\overrightarrow{BD}}\right)$**

On a
$$\begin{aligned} \left(\widehat{\overrightarrow{BI},\overrightarrow{BD}}\right) &\equiv \arg\left(\frac{d-b}{1-b}\right)\,[2\pi] \\ &\equiv \arg(d-b) - \arg(1-b)\,[2\pi] \\ &= -\frac{\pi}{4} - \frac{4\pi}{3}\,[2\pi] \\ &= -\frac{19\pi}{12}\,[2\pi] \\ &= -\frac{19\pi}{12} + 2\pi\,[2\pi] \\ &= \frac{5\pi}{12}\,[2\pi] \end{aligned}$$

D'où $\boxed{\frac{5\pi}{12} \text{ est une mesure de l'angle } \left(\widehat{\overrightarrow{BI},\overrightarrow{BD}}\right)}$

Exercice 4 : (8 pts)

Soit la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $\begin{cases} f(x) = 2x\ln x - 2x \;;\; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

0.5 pt **1 - Montrons que f est continue à droite au point 0**

On a $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 2x\ln x - 2x = 0$ (car $\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$)

Donc $\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$ cela signifie que $\boxed{f \text{ est continue à droite au point } 0}$

0.5 pt **2 - a) Calculons $\lim_{x\to +\infty} f(x)$**

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x\ln x - 2x$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} 2x(\ln x - 1)$

$= +\infty$ (car $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$)

D'où $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

0.5 pt **b) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, puis interprétons géométriquement le résultat**

✓ **Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$**

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x\ln x - 2x}{x}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2\cancel{x}\ln x}{\cancel{x}} - \dfrac{2\cancel{x}}{\cancel{x}}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} 2\ln x - 2$

$= +\infty$ (car $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$)

D'où $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty}$

✓ **Interprétons géométriquement le résultat**

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$

Alors $\boxed{(\mathcal{C}_f) \text{ admet une branche parabolique de direction l'axe } (\mathcal{O}y) \text{ au voisinage de } +\infty}$

0.75 pt **3 - a) Calculons $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)}{x}$ et interprétons géométriquement le résultat**

✓ **Calculons $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)}{x}$**

On a $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2x\ln x - 2x}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2\cancel{x}\ln x}{\cancel{x}} - \dfrac{2\cancel{x}}{\cancel{x}}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} 2\ln x - 2$

$= -\infty$ (car $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$)

D'où $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty}$

✓ **Interprétons géométriquement le résultat**

Puisque $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\infty$

Par conséquent f n'est pas dérivable à droite au point 0

Et $\boxed{(\mathcal{C}_f) \text{ admet une demi-tangente verticale au point } \mathcal{O}(0,0) \text{ à droite dirigée vers le bas}}$

0.5 pt **b) Calculons $f'(x)$ pour tout x de $]0,+\infty[$**

La fonction polynôme $x \mapsto 2x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc elle est dérivable sur $]0,+\infty[$

Et $x \mapsto \ln x$ est une fonction logarithme népérien donc dérivable sur $]0,+\infty[$

Donc f est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme différence et produit de deux fonctions dérivables

Et pour tout x de $]0,+\infty[$ on a : $f'(x) = (2x\ln x - 2x)'$

$$= 2\times \ln x + 2\cancel{x}\times\frac{1}{\cancel{x}} - 2$$

$$= 2\ln x + \cancel{2} - \cancel{2}$$

D'où $\boxed{f'(x) = 2\ln x \text{ pour tout } x \text{ de }]0,+\infty[}$

0.5 pt **c) Dressons le tableau de variations de la fonction f sur $]0,+\infty[$**

Le signe de $f'(x)$ est celui de $\ln x$

Et on sait que $\ln x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$, $\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$ et $\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	-2	↗	$+\infty$

0.5 pt **4 - a) Résolvons dans l'intervalle $]0,+\infty[$ les équations $f(x) = 0$ et $f(x) = x$**

✓ **Résolvons $f(x) = 0$ dans $]0,+\infty[$**

On a $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x\ln x - 2x = 0$

$$\Leftrightarrow 2x(\ln x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x = 0 \text{ ou } \ln x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x = 0 \text{ ou } e^{\ln x} = e^{1}$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = e$$

Puisque $0 \notin]0,+\infty[$ et $e \in]0,+\infty[$

Alors l'ensemble des solutions de $f(x) = 0$ dans $]0,+\infty[$ est $\boxed{\mathcal{S}_1 = \{e\}}$

✓ **Résolvons $f(x) = x$ dans $]0,+\infty[$**

On a $f(x) = x \Leftrightarrow 2x\ln x - 2x = x$

$$\Leftrightarrow 2x\ln x - 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(2\ln x - 3) = 0$$

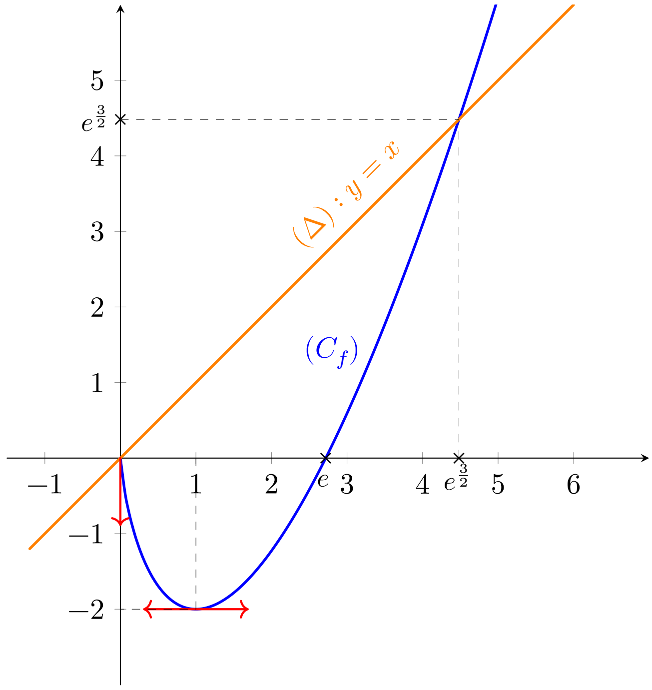
$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } \ln x = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = e^{\frac{3}{2}}$$

Puisque $0 \notin]0,+\infty[$ et $e^{\frac{3}{2}} \in]0,+\infty[$

Alors l'ensemble des solutions de $f(x) = x$ dans $]0,+\infty[$ est $\boxed{\mathcal{S}_2 = \left\{e^{\frac{3}{2}}\right\}}$

1 pt **b) Construisons la courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(\mathcal{O},\vec{i},\vec{j})$**



0.5 pt

5 - a) Montrons que $\int_1^e x\ln x\ dx = \frac{1+e^2}{4}$, à l'aide d'une intégration par parties

Soient : $u(x) = \ln x \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{x}$

$v'(x) = x \Rightarrow v(x) = \frac{x^2}{2}$

Donc on a :
$$\begin{aligned}\int_1^e x\ln x\ dx &= \left[\frac{x^2}{2}\times\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2}\times\frac{1}{x}\ dx\\ &= \frac{e^2}{2}\times\ln e - \frac{1^2}{2}\times\ln 1 - \frac{1}{2}\int_1^e x\ dx\\ &= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e\\ &= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{2} - \frac{1^2}{2}\right)\\ &= \frac{2e^2}{4} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}\end{aligned}$$

D'où $\boxed{\int_1^e x\ln x\ dx = \frac{1+e^2}{4}}$

0.5 pt

b) Déduisons $\int_1^e f(x)\,dx$

On a :
$$\begin{aligned}\int_1^e f(x)\,dx &= \int_1^e (2x\ln x - 2x)\,dx\\ &= 2\int_1^e x\ln x\ dx - \int_1^e 2x\ dx\\ &= 2\times\frac{1+e^2}{4} - \left[x^2\right]_1^e\\ &= \frac{1+e^2}{2} - e^2 + 1\\ &= \frac{1+e^2-2e^2+2}{2}\end{aligned}$$

D'où $\boxed{\displaystyle\int_1^e f(x)\,dx = \frac{3-e^2}{2}}$

0.25 pt **6 - a) Déterminons le minimum de f sur $]0,+\infty[$**

La fonction f est décroissante sur $]0,1]$ et croissante sur $[1,+\infty[$

Donc f admet un minimum au point 1 est $f(1) = -2$

D'où $\boxed{\text{le minimum de } f \text{ sur }]0,+\infty[\text{ est } -2}$

0,5 pt **b) Déduisons que $\ln x \geqslant \dfrac{x-1}{x}$ pour tout x de $]0,+\infty[$**

D'après la question précédente -2 est le minimum de la fonction f sur $]0,+\infty[$

Donc pour tout x de $]0,+\infty[$, on a : $f(x) \geq -2 \Leftrightarrow 2x\ln x - 2x \geq -2$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow x\ln x - x \geq -1 \\ &\Leftrightarrow x\ln x \geq x-1 \\ &\Leftrightarrow \ln x \geq \frac{x-1}{x} \end{aligned}$$

D'où $\boxed{\ln x \geq \dfrac{x-1}{x} \text{ pour tout } x \text{ de }]0,+\infty[}$

7 - Soit g la restriction de la fonction f à l'intervalle $[1,+\infty[$

0.5 pt **a) Montrons que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle $\mathcal{J}$ qu'on déterminera**

✓ **Montrons que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1}**

D'aprés la question **3-** f est dérivable sur $]0,+\infty[$ donc elle est continue sur $]0,+\infty[$

D'où g est continue sur $]1,+\infty[$ $(\star)$

Et puisque f est strictement croissante sur $[1,+\infty[$

Alors g est strictement monotone $(\star\star)$

De $(\star)$ et $(\star\star)$ on déduit que $\boxed{g \text{ admet une fonction réciproque } g^{-1}}$

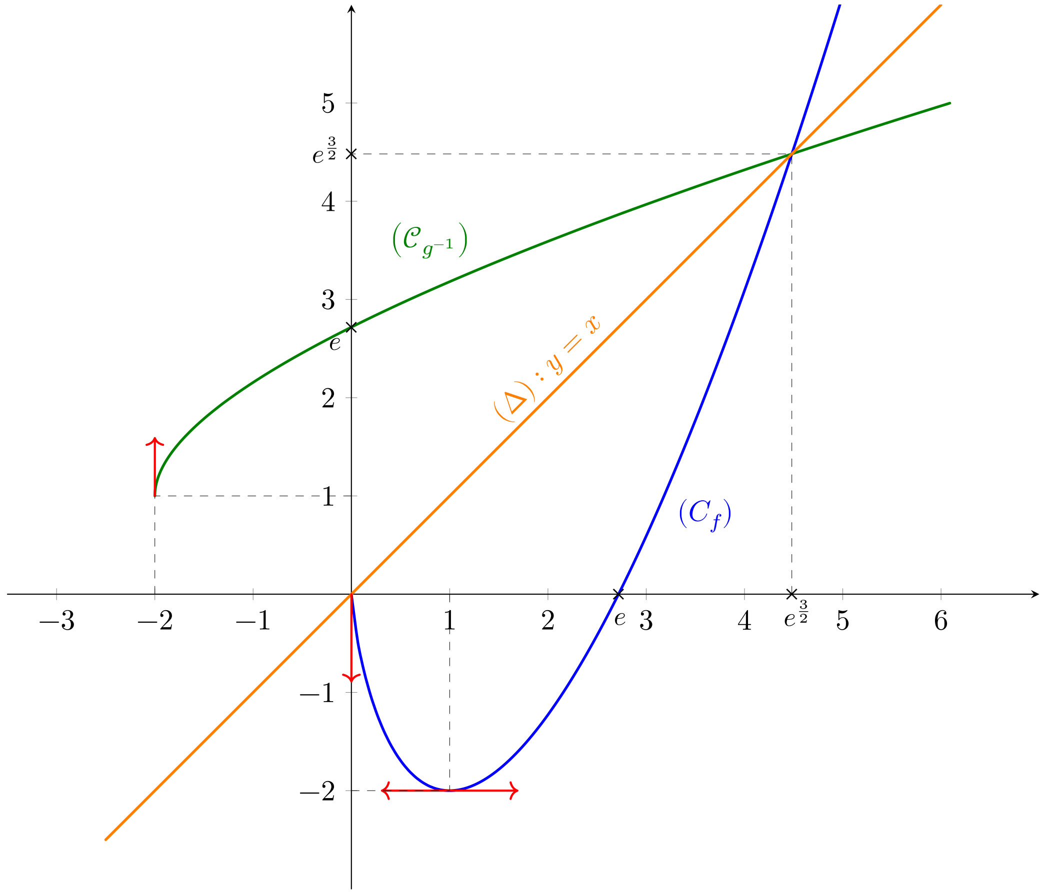
✓ **Déterminons le domaine de définition $\mathcal{J}$ de la fonction réciproque g^{-1}**

La fonction réciproque g^{-1} est définie sur $\mathcal{J} = g([1,+\infty[)$

$$\begin{aligned} &= \left[g(1), \lim_{x\to+\infty} g(x)\right[\\ &= [-2,+\infty[\end{aligned}$$

D'où $\boxed{g^{-1} \text{ est définie sur } \mathcal{J} = [-2,+\infty[}$

0.75 pt **b) Construisons la courbe représentative de la fonction g^{-1} dans le même repère**



8 - On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} h(x) = x^3 + 3x \ ; & x \leqslant 0 \\ h(x) = 2x\ln x - 2x \ ; & x > 0 \end{cases}$

0.5 pt **a) Étudions la continuité de la fonction h au point 0**

On a $h(0) = 0^3 + 3 \times 0 = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} h(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} x^3 + 3x = 0$

D'aprés la question **1-** on a $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$

Donc $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} h(x) = h(0)$

D'où $\boxed{h \text{ est continue au point } 0}$

0.5 pt **b) Étudions la dérivabilité de la fonction h à gauche au point 0 puis interprétons le résultat géométriquement**

✓ **Étudions la dérivabilité de la fonction h à gauche au point 0**

On a : $$\lim_{x \to 0^-} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^3 + 3x}{x} = \lim_{x \to 0^-} x^2 + 3 = 3$$

Donc $\boxed{h \text{ est dérivable à gauche au point } 0 \text{ et } h'_g(0) = 3}$

✓ **Interprétons le résultat géométriquement**

Puisque h est dérivable au point 0 à gauche et $h'_g(0) = 3$

Alors $\boxed{(\mathcal{C}_h) \text{ admet une demi-tangente au point } \mathcal{O}(0,0) \text{ à gauche de coefficient directeur } 3}$

0.25 pt **c) Étudions la dérivabilité de la fonction h au point 0**

D'aprés la question **3-a)** la fonction f n'est pas dérivable en 0 à droite

Et puisque $h(x) = f(x)$ pour tout $x > 0$, alors h aussi n'est pas dérivable en 0 à droite

D'où $\boxed{h \text{ n'est pas dérivable au point } 0}$.