ROYAUME DU MAROC

Correction

Baccalauréat Sciences & Technologie

Session : Normal 2023

MATHÉMATIQUES

Exercice 1 : (3 pts)

L'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, soient les points $A(0,1,4)$, $B(2,1,2)$, $C(2,5,0)$ et $\Omega(3,4,4)$

0.25 **1 - a) Montrons que :** $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 4(2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k})$

On a : $\overrightarrow{AB}(2;0;-2)$ et $\overrightarrow{AC}(2;4;-4)$

$$\begin{aligned} \text{D'où : } \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -2 & -4 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}\vec{k} \\ &= 8\vec{i} - (-8+4)\vec{j} + 8\vec{k} \\ &= 8\vec{i} + 4\vec{j} + 8\vec{k} \end{aligned}$$

par conséquence : $\boxed{\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 4(2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k})}$

0.5 **b)** Déduisons la surface du triangle ABC et la distance $d(B,(AC))$

✓ **La surface S_{ABC} du triangle ABC**

On a $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(8;4;8)$

Donc $S_{ABC} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\| = \frac{1}{2}\sqrt{8^2+4^2+8^2} = \frac{1}{2}\sqrt{144} = \frac{1}{2} \times 12 = \frac{12}{2} = 6(ua)$

$\boxed{S_{ABC} = 6(ua)}$

✓ **La distance $d(B,(AC))$**

(AC) est la droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{AC}$

Donc $d(B,(AC)) = \frac{\left\|\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|}{\left\|\overrightarrow{AC}\right\|} = \frac{\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|}{\left\|\overrightarrow{AC}\right\|} = \frac{12}{\sqrt{2^2+4^2+(-4)^2}} = \frac{12}{\sqrt{36}} = \frac{12}{6} =$
2

$\boxed{d(B,(AC)) = 2}$

2 - Soit D le milieu du segment $[AC]$

0.25 **a) Vérifions que** $\overrightarrow{D\Omega} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right)$

On a $x_D = \dfrac{x_A + x_C}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$ et $y_D = \dfrac{y_A + y_C}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$ et $z_D = \dfrac{z_A + z_C}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$

Donc $D(1;3;2)$ et on a $\Omega\,(3,4,4)$ donc $\overrightarrow{D\Omega}\,(2;1;2)$

D'autre part $\dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right)$ a pour coordonnées le triplet $(2;1;2)$

Par conséquence $\boxed{\overrightarrow{D\Omega} = \dfrac{1}{4}(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})}$

0.5 **b) Déduisons que $d(\Omega,(ABC)) = 3$**

On a $\overrightarrow{D\Omega} = \dfrac{1}{4}(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})$ donc $\overrightarrow{D\Omega}$ et $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ sont colinéaires

Or $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est le vecteur normal au plan (ABC) donc $\overrightarrow{D\Omega}$ est aussi normal au plan (ABC)

D'autre part, on a D est le milieu de $[AC]$, c.à.d. $D \in (AC)$ donc $D \in (ABC)$

Donc $d(\Omega,(ABC)) = D\Omega = \left\|\overrightarrow{D\Omega}\right\| = \dfrac{1}{4}\left\|(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})\right\| = \dfrac{1}{4} \times 12 = 3$

Par conséquence $\boxed{d(\Omega,(ABC)) = 3}$

Remarque *On peut aussi déterminer une équation du plan (ABC) puis montrer la distance $d(\Omega,(ABC)) = D\Omega = \left\|\overrightarrow{D\Omega}\right\| = 3$*

3 - Soit (S) la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 8y - 8z + 32 = 0$

0.5 **a) Déterminons le centre et le rayon de la sphère** (S) On a : $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 8y - 8z + 32 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + y^2 - 8y + z^2 - 8z + 32 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 - 9 + y^2 - 8y + 16 - 16 + z^2 - 8z + 16 - 16 + 32 = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - 6x + 9) + (y^2 - 8y + 16) + (z^2 - 8z + 16) - 9 - 16 - 16 + 32 = 0$

$\Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-4)^2 = 9 = 3^2$

Donc, $\boxed{(S) \text{ est la sphère de centre } \Omega(3;4;4) \text{ et de rayon } R = 3}$

0.5 **b) Montrons que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S) en un point que l'on déterminera**

On a $d(\Omega,(ABC)) = 3 = R$ donc le plan (ABC) est tangent à la sphère (S)

et puisque $D \in (ABC)$ et $D\Omega = R = 3$ donc $D \in (S)$

Et par conséquence $\boxed{\text{le plan } (ABC) \text{ est tangent à la sphère } (S) \text{ au point } D}$

0.5 **4 - Déterminons une équation cartésienne pour chacun des plans (Q_1) et (Q_2) parallèles à (ABC) tels que chacun d'eux coupe (S) suivant un cercle de rayon $\sqrt{5}$**

Soit (Q) un plan parallèle à (ABC)

On a $\overrightarrow{D\Omega} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal au plan (ABC), donc $\overrightarrow{D\Omega}\,(2;1;2)$ est un vecteur normal à (Q)

D'où une équation cartésienne de (Q) s'écrit comme suit : $(Q) : 2x + y + 2z + d = 0$

D'autre part on a : $d(\Omega;(Q)) = \sqrt{3^2 - \sqrt{5}^2} = \sqrt{9-5} = \sqrt{4} = 2$

Et on a $d(\Omega;(Q)) = \dfrac{|2x_\Omega + y_\Omega + 2z_\Omega + d|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \dfrac{|2 \times 3 + 4 + 2 \times 4 + d|}{\sqrt{9}} = \dfrac{|18 + d|}{3} = 2$

D'où $|18 + d| = 6$ c.à.d. $18 + d = 6$ ou $18 + d = -6$ D'où $d = -12$ ou $d = -24$

Donc $(Q_1) : 2x + y + 2z - 12 = 0$ et $(Q_2) : 2x + y + 2z - 24 = 0$ Et par conséquence :

$\boxed{(Q_1) : 2x + y + 2z - 12 = 0}$ et $\boxed{(Q_2) : 2x + y + 2z - 24 = 0}$

Exercice 2 : (3 pts)

Le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, soient les points $A(a = \sqrt{2} + i\sqrt{2})$, $B(b = 1 + \sqrt{2} + i)$, $C(c = \bar{b})$ et $D(d = 2i)$

0.25 **1 - Écrivons le nombre complexe a sous forme trigonométrique**

On a $|a| = \sqrt{\sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2} = \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2$, donc $a = \sqrt{2} + i\sqrt{2} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Par conséquence $\boxed{a = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)}$

0.25 **2 - a) Vérifions que $b - d = c$**

On a $b - d = 1 + \sqrt{2} + i - 2i = (1 + \sqrt{2}) - i = \bar{b} = c$, donc $\boxed{b - d = c}$

0.5 **b)** Montrons que $(\sqrt{2} + 1)(b - a) = b - d$ et déduisons que les points A, B et D sont alignés

✓ **Montrons que $(\sqrt{2} + 1)(b - a) = b - d$**

On a $(\sqrt{2} + 1)(b - a) = (\sqrt{2} + 1)(1 + \sqrt{2} + i - \sqrt{2} - i\sqrt{2}) = (\sqrt{2} + 1)(1 + i - i\sqrt{2})$

Donc $(\sqrt{2} + 1)(b - a) = \sqrt{2} + i\sqrt{2} - 2i + 1 + i - i\sqrt{2} = 1 + \sqrt{2} - i = \bar{b} = c = b - d$

Ainsi $\boxed{(\sqrt{2} + 1)(b - a) = b - d}$

✓ **Déduisons que les points A, B et D sont alignés**

On a $(\sqrt{2} + 1)(b - a) = b - d$ donc $\dfrac{b - d}{b - a} = \sqrt{2} + 1$

Puisque $\dfrac{b - d}{b - a} \in \mathbb{R}$, alors $\boxed{\text{les points } A,\ B \text{ et } D \text{ sont alignés}}$

0.25 **3 - a) Vérifions que $ac = 2b$**

On a $ac = (\sqrt{2} + i\sqrt{2})(1 + \sqrt{2} - i) = \sqrt{2} + 2 - i\sqrt{2} + i\sqrt{2} + 2i + \sqrt{2}$

$ac = 2 + 2\sqrt{2} + 2i = 2(1 + \sqrt{2} + i) = 2b$

Donc $\boxed{ac = 2b}$

0.5 **b) Déduisons que $2arg(b) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$**

On a $2b = ac$ donc $2b = a\bar{b}$, donc $arg(2b) \equiv arg(a\bar{b})[2\pi]$

Donc $arg(2) + arg(b) \equiv arg(a) + arg(\bar{b})[2\pi]$ donc $0 + arg(b) \equiv arg(a) - arg(b)[2\pi]$

Donc $2arg(b) \equiv arg(a)[2\pi]$

Ainsi $\boxed{2arg(b) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]}$

4 - Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$ et qui transforme chaque point M du plan d'affixe z en un point M' d'affixe z'

0.25 **a) Montrons que** $z' = \frac{1}{2}az$

On a $R(M) = M' \Leftrightarrow z' - 0 = \mathbf{e}^{i\frac{\pi}{4}}(z-0) \Leftrightarrow z' = \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)z$

$\Leftrightarrow z' = \frac{1}{2} \times 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)z = \frac{1}{2}az$

Par conséquence $\boxed{z' = \frac{1}{2}az}$

0.5 **b) Déduisons que** $R(C) = B$ **et que** $R(A) = D$

✓ On a $z' = \frac{1}{2}az$

$\frac{1}{2}az_C = \frac{1}{2}ac = \frac{1}{2} \times 2b = b = z_B$ (car $ac = 2b$)

Donc $\boxed{R(C) = B}$

✓ On a $z' = \frac{1}{2}az$

$\frac{1}{2}az_A = \frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{2}+i\sqrt{2})^2 = \frac{1}{2}(2+2\sqrt{2}\times i\sqrt{2}-2) = \frac{1}{2}(4i) = 2i = d = z_D$

Donc $\boxed{R(A) = D}$

0.5 **c)** Montrons que $\frac{b-a}{c-a} = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)a$, puis déduisons une mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}}\right)$

✓ **Montrons que** $\frac{b-a}{c-a} = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)a$

On a $\frac{b-a}{c-a} = \frac{b-a}{\bar{b}-a} = \frac{1+\sqrt{2}+i-\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}-i-\sqrt{2}-i\sqrt{2}} = \frac{1+i(1-\sqrt{2})}{1-i(1+\sqrt{2})}$

$\frac{b-a}{c-a} = \frac{(1+i(1-\sqrt{2}))(1+i(1+\sqrt{2}))}{(1-i(1+\sqrt{2}))(1+i(1+\sqrt{2}))} = \frac{1+i(1+\sqrt{2})+i(1-\sqrt{2})-(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})}{1+(1+\sqrt{2})^2}$

$\frac{b-a}{c-a} = \frac{1+2i-(1-2)}{1+1+2\sqrt{2}+2} = \frac{2+2i}{4+2\sqrt{2}} = \frac{1+i}{2+\sqrt{2}} = \frac{(2-\sqrt{2})(1+i)}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})} = \frac{(2-\sqrt{2})(1+i)}{4-2}$

$\frac{b-a}{c-a} = \frac{(2-\sqrt{2})}{2}(1+i) = \frac{(2-\sqrt{2})}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2}+i\sqrt{2}) = \frac{2\sqrt{2}-2}{4}a = \frac{\sqrt{2}-1}{2}a$

D'où $\boxed{\frac{b-a}{c-a} = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)a}$

✔ *Autre méthode*

On a $(\sqrt{2}+1)(b-a) = b-d = \frac{1}{2}ac - \frac{1}{2}a^2$ car $ac = 2b$ et $R(A) = D$ c.à.d. $d = \frac{1}{2}a \times a$

Donc $(\sqrt{2}+1)(b-a) = \frac{1}{2} \times a(c-a)$, d'où $\frac{b-a}{c-a} = \frac{1}{2} \times a \times \frac{1}{\sqrt{2}+1} = a \times \frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)$

Finalement $\boxed{\frac{b-a}{c-a} = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)a}$

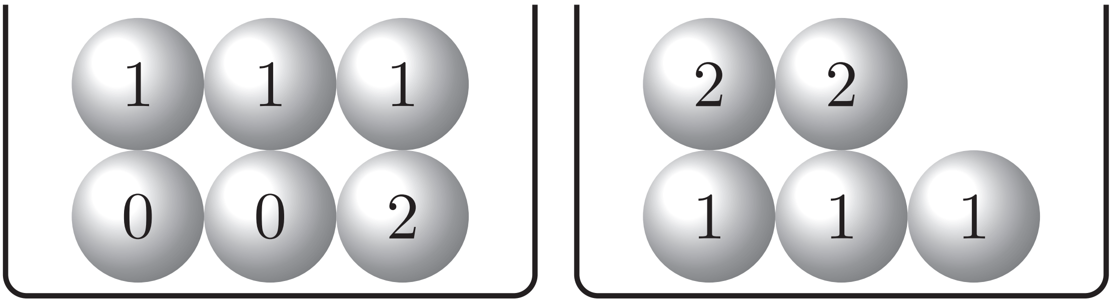
✓ **Déduisons une mesure de l'angle** $\left(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}}\right)$

On a $\left(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}}\right) \equiv arg\left(\frac{b-a}{c-a}\right)[2\pi] \equiv arg\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}a\right)[2\pi] \equiv \left(arg\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right) + agr\,(a)\right)[2\pi]$

$\left(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}}\right) \equiv \left(0+\frac{\pi}{4}\right)[2\pi] \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$ $\left(\text{car } \frac{\sqrt{2}-1}{2} \in \mathbb{R}_+^*\right)$

Alors $\boxed{\left(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}}\right) = \frac{\pi}{4}}$

Exercice 3 : (3 pts)



L'urne U_1 L'urne U_2

On considère l'expérience aléatoire suivante :

" On tire une boule de l'urne U_1, et on note le nombre a qu'elle porte, puis on la met dans l'urne U_2, ensuite on tire une boule de l'urne U_2 et on note le nombre b qu'elle porte "

On considère les événements suivants :

A : " La boule tirée de l'urne U_1 porte le nombre 1 "

B : " Le produit ab est égal à 2 "

Dans cette exercice, on va utiliser les combinaisons C_n^p

0.5 **1 - a) Calculons** $p(A)$

On a $card(\Omega) = C_6^1 \times C_6^1 = 36$

Et l'événement A est réalisé lorsqu'on tire une boule portant le nombre 1 de l'urne U_1

Donc $card(A) = C_3^1 \times C_6^1 = 18$

Donc $p(A) = \dfrac{card(A)}{card(\Omega)} = \dfrac{18}{36}$

Alors $\boxed{p(A) = \frac{1}{2}}$

0.5 **b) Montrons que** $p(B) = \dfrac{1}{4}$ **(*On peut utiliser l'arbre des possibilités*)**

➠ *Première méthode*

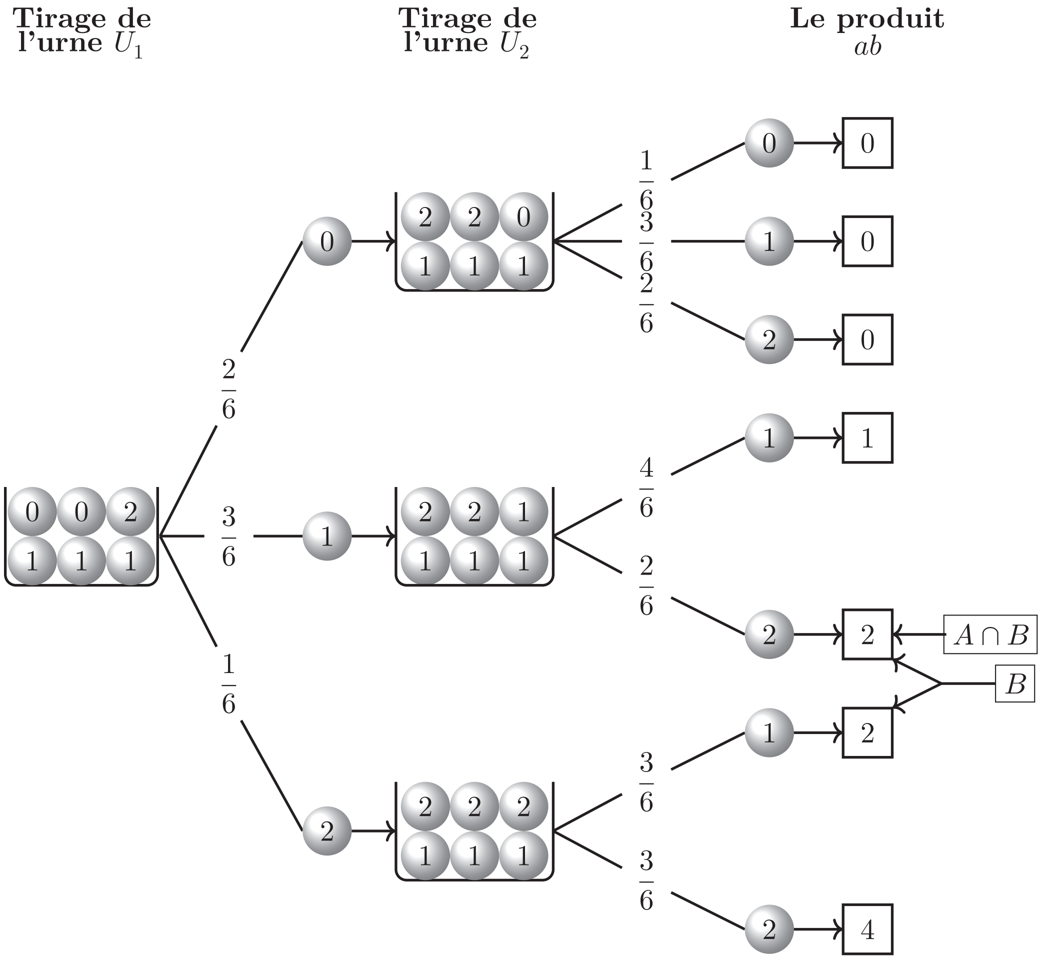
L'événement B est réalisé lorsqu'on tire une boule portant le nombre 1 de l'urne U_1 et une boule portant le nombre 2 de l'urne U_2 ***ou*** lorsqu'on tire une boule portant le nombre 2 de l'urne U_1 et une boule portant le nombre 1 de l'urne U_2

Donc $card(B) = C_3^1 \times C_2^1 + C_1^1 \times C_3^1 = 3 \times 2 + 1 \times 3 = 6 + 3 = 9$

Donc $p(B) = \dfrac{carg(B)}{card(\Omega)} = \dfrac{9}{36}$

Alors $\boxed{p(B) = \dfrac{1}{4}}$

➠ *Deuxième méthode* (arbre des possibilités)



D'après l'arbre des possibilités ci-dessus, on trouve que

$p(B) = \dfrac{3}{6} \times \dfrac{2}{6} + \dfrac{1}{6} \times \dfrac{3}{6}$ $p(B) = \dfrac{6}{36} + \dfrac{3}{36} = \dfrac{9}{36}$

Alors $\boxed{p(B) = \dfrac{1}{4}}$

0.75 **2 - Calculons** $p(A/B)$

➠ *Première méthode*

On a $p(A/B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$

L'événement $A \cap B$ est réalisé lorsque les deux événements A et B sont réalisé à la fois

c.à.d. lorsqu'on tire une boule portant le nombre 1 de l'urne U_1 et une boule portant le nombre 2 de l'urne U_2

Donc $card(A \cap B) = C_3^1 \times C_2^1 = 3 \times 2 = 6$, donc $p(A \cap B) = \dfrac{card(A \cap B)}{card(\Omega)} = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$

Or $p(B) = \dfrac{1}{4}$ donc $p(A/B) = \dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}} = \dfrac{1}{6} \times 4 = \dfrac{4}{6}$

Alors $\boxed{p(A/B) = \dfrac{2}{3}}$

➠ *Deuxième méthode* (arbre des possibilités)

On a $p(A/B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$

D'après l'arbre des possibilités, on a $p(A \cap B) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6}$

Donc $p(A/B) = \dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}} = \dfrac{1}{6} \times 4 = \dfrac{4}{6}$

Alors $\boxed{p(A/B) = \dfrac{2}{3}}$

3 - Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque résultat de l'expérience, le produit ab

0.25 **a) Montrons que** $p(X = 0) = \dfrac{1}{3}$

L'événement $X = 0$ correspond à tirer une boule portant le nombre 0 de l'urne U_1 et une boule quelconque de l'urne U_2

Donc $card(X = 0) = C_2^1 \times C_6^1 = 2 \times 6 = 12$, par suite $p(X = 0) = \dfrac{12}{36}$

Remarque : *On peut avoir le même résultat en utilisant l'arbre des possibilités*

Alors $\boxed{p(X = 0) = \dfrac{1}{3}}$

0.5 **b) Donnons la loi de probabilité de** X

On a $X(\Omega) = \{0; 1; 2; 4\}$

$p(X = 0) = \dfrac{1}{3}$

$p(X = 1) = \dfrac{card(X = 1)}{card(\Omega)} = \dfrac{C_3^1 \times C_4^1}{36} = \dfrac{12}{36} = \dfrac{1}{3}$

$p(X = 2) = p(B) = \dfrac{1}{4}$

$p(X = 4) = \dfrac{card(X = 4)}{card(\Omega)} = \dfrac{C_1^1 \times C_3^1}{36} = \dfrac{3}{36} = \dfrac{1}{12}$

D'où la loi de probabilité de la variable aléatoire X

x_i	0	1	2	4
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

c) On considère les événements

M : "Le produit ab est pair non nul" et N : "le produit ab est égal à 1"

0.5 **Montrons que les événements M et N sont équiprobables**

Montrer que ces deux événements sont équiprobables revient a montrer que $p(M) = p(N)$

L'événement M est équivalent à trouver que $ab = 2$, ou $ab = 4$ c.à.d. au événements $X = 2$ ou $X = 4$, donc $M = (X = 2) \cup (X = 4)$

Et comme $(X = 2) \cap (X = 4) = \emptyset$, alors $p(M) = p(X = 2) + p(X = 4) = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

Et l'événement N est équivalent à trouver $ab = 1$, c.à.d. au événement $X = 1$

Donc $p(N) = p(X = 1) = \frac{1}{3}$

Donc $p(M) = p(N)$, et par suite $\boxed{\text{les événements } M \text{ et } N \text{ sont équiprobables}}$

Remarque : *On peut avoir les mêmes résultats en utilisant l'arbre des possibilités*

Exercice 4 : (11 pts)

Soit f la fonction numérique définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = 2 - \frac{2}{x} + (1 - \ln x)^2$

Et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$(unité : 1 cm)

0.25 **1 - a) Vérifions que** : $\forall x \in]0; +\infty[: f(x) = \frac{3x - 2 - 2x\ln x + x(\ln x)^2}{x}$

Pour tout x de $]0, +\infty[$ on a :
$$f(x) = 2 - \frac{2}{x} + (1 - \ln x)^2$$
$$= \frac{2x - 2 + x(1 - \ln x)^2}{x}$$
$$= \frac{2x - 2 + x\left(1 - 2\ln x + (\ln x)^2\right)}{x}$$
$$= \frac{2x - 2 + x - 2x\ln x + x(\ln x)^2}{x}$$

Alors $\boxed{f(x) = \frac{3x - 2 - 2x\ln x + x(\ln x)^2}{x}}$

0.5 **b)** Montrons que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} x(\ln x)^2 = 0$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$ (On peut poser : $t = \sqrt{x}$)

➠**Montrons que** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} x(\ln x)^2 = 0$

On a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} x(\ln x)^2 = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \left(\sqrt{x}\ln\left(\sqrt{x}^2\right)\right)^2 = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \left(2\sqrt{x}\ln(\sqrt{x})\right)^2$

Soit $t = \sqrt{x}$, on a $x \to 0^+ \Rightarrow t \to 0^+$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} x(\ln x)^2 = \lim\limits_{t\to 0} (2t\ln t)^2 = 0$

Car $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\t>0}} t\ln t = 0$

Finalement $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} x(\ln x)^2 = 0}$

➠**Montrons que** $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln\left(\sqrt{x}^2\right)}{\sqrt{x}}\right)^2 = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{2\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\right)^2$

Soit $t=\sqrt{x}$, on a $x\to+\infty \Rightarrow t\to+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\frac{2\ln t}{t}\right)^2=0$

Car $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t}=0$

En fin $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=0}$

0.5 **c)** Déduisons que $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}f(x)=-\infty$, puis donner une interprétation géométrique du résultat

Déduisons que $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}f(x)=-\infty$

On a $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}3x-2=-2$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}x(\ln x)^2=0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}x\ln x=0$

Donc $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}3x-2-2x\ln x+x(\ln x)^2=-2$ et puisque $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{-2}{x}=-\infty$

Alors $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{3x-2-2x\ln x+x(\ln x)^2}{x}=-\infty$

$\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}f(x)=-\infty}$

Interprétons géométriquement le résultat

Puisque $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}f(x)=-\infty$

Alors $\boxed{\text{la droite d'équation } x=0 \text{ (\textit{l'axe des ordonnées}) est une asymptote verticale à } (\mathcal{C}_f)}$

0.75 **d)** Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$, puis trouvons la branche parabolique de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$

Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}1-\ln x=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-\ln x)^2=+\infty$

Et puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}2-\frac{2}{x}+(1-\ln x)^2=+\infty$

Montrons que la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$

$$\begin{aligned}\text{On a : }\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}&=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-2-2x\ln x+x(\ln x)^2}{x^2}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{\ln x}{x}+\frac{(\ln x)^2}{x}\\&=0\end{aligned}$$

Car $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=0$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$

D'où $\boxed{(\mathcal{C}_f) \text{ admet une branche parabolique de direction l'axe } (Ox) \text{ au voisinage de } +\infty}$

0.5 **2 - Montrons que pour tout $x\in]0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{2(1-x+x\ln x)}{x^2}$**

La fonction $x\mapsto 2-\frac{2}{x}$ est une fonction rationnelle dérivable sur $\mathbb{R}^*$ donc dérivable sur $]0,+\infty[$

$x\mapsto\ln x$ fonction logarithme népérien dérivable sur $]0,+\infty[$ donc $x\mapsto 1-\ln x$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ d'où $x\mapsto(1-\ln x)^2$ est dérivable sur $]0,+\infty[$

Et alors f est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme somme de deux fonctions dérivables

Et, pour tout x de $]0,+\infty[$ on a : $f'(x) = 0 - 2\times\dfrac{-1}{x^2} + 2\left(1-\ln x\right)'\left(1-\ln x\right)$

$$= \frac{2}{x^2} + 2\times\frac{-1}{x}\times\left(1-\ln x\right)$$
$$= \frac{2}{x^2} + \frac{2\left(\ln x - 1\right)}{x}$$
$$= \frac{2\left[1 + x\left(\ln x - 1\right)\right]}{x^2}$$

Finalement $\boxed{f'(x) = \dfrac{2(1-x+x\ln x)}{x^2}}$

3 - En exploitant le tableau de variations de la fonction dérivé f' de f sur $]0;+\infty[$

0.5 **a)** Prouvons que f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ puis dressons le tableau de variations de f

Prouvons que f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

D'après le tableau de variations de f'

0 est la valeur minimale absolue de la fonction f' sur l'intervalle $]0,+\infty[$

Donc $f'(x) \geq 0$ pour tout x de $]0,+\infty[$ (avec l'égalité ssi $x=1$)

D'où $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur }]0,+\infty[}$

Dressons le tableau de variations de f

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+	0	+	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗		↗	$+\infty$

0.5 **b) Donnons le tableau de signe de la dérivée seconde f'' de la fonction f sur $]0;+\infty[$**

D'après le tableau de variations de f'

La fonction f' est strictement décroissante sur les deux intervalles $]0,1[$ et $[\beta,+\infty[$

Donc f'' est strictement négative sur chacun des deux intervalles $]0,1[$ et $]\beta,+\infty[$

Et f' est strictement croissante sur $[1,\beta]$, alors f'' est strictement positive sur $]1,\beta[$

Et puisque f' est est dérivable en 1 et β (car elle est dérivable sur $]0,+\infty[$), et change sa monotonie en 1 et β alors f'' s'annule en 1 et β

x	0		1		β		$+\infty$
$f"(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

c) Déduisons la concavité de la courbe $\left(\mathcal{C}_f\right)$ et précisons les abscisses de ses deux points
1 d'inflexion

Déduisons la concavité de la courbe $\left(\mathcal{C}_f\right)$ On a $\forall x \in]0,1[\cup [\beta,+\infty[\ \ f''(x) < 0$ donc $\boxed{\left(\mathcal{C}_f\right) \text{ est concave sur }]0,1[\text{ et } [\beta,+\infty[}$

Et $\forall x \in]1,\beta[\ \ f''(x) > 0$ donc $\boxed{\left(\mathcal{C}_f\right) \text{ est convexe sur }]1,\beta[}$

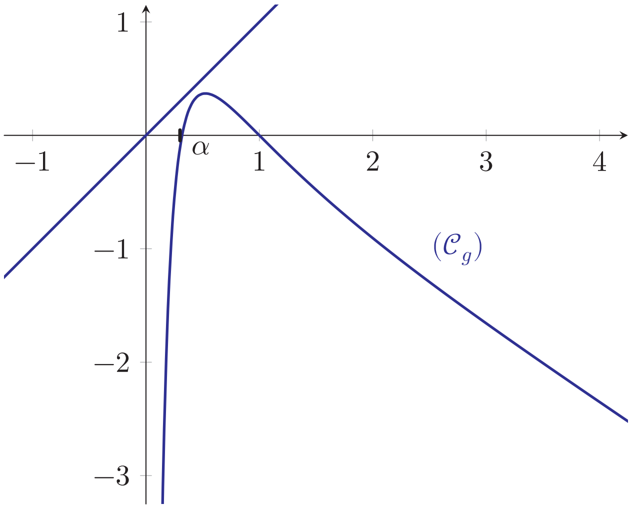
x	0		1		β		$+\infty$
$f"(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
$\left(\mathcal{C}_f\right)$			point d'inflexion		point d'inflexion		

Précisons les abscisses des deux points d'inflexion de la courbe $\left(\mathcal{C}_f\right)$

La fonction f'' s'annule et change de signe en 1 et β

Donc la courbe $\left(\mathcal{C}_f\right)$ admet deux points d'inflexion $\boxed{\mathcal{A}(1, f(1)) \text{ et } \mathcal{B}(\beta, f(\beta))}$

4 - La courbe $(\mathcal{C}_g)$ ci-dessous est la représentation graphique de la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$ et qui s'annule en α et 1 ($\alpha \approx 0.3$), et (Δ) la droite d'équation $y = x$



a) **Déterminons le signe de la fonction g sur** $]0; +\infty[$

D'après la représentation graphique de la fonction g on a :

La courbe $\left(\mathcal{C}_g\right)$ est en dessous de l'axe des abscisses sur chacun des deux intervalles $]0, \alpha]$

et $[1,+\infty[$, donc $\boxed{g(x) \leq 0 \text{ pour tout } x \text{ de l'intervalle }]0,\alpha] \cup [1,+\infty[}$

Et $(\mathcal{C}_g)$ est au-dessus de l'axe des abscisses sur l'intervalle $[1,\alpha]$

Donc $\boxed{g(x) \geq 0 \text{ pour tout } x \text{ de l'intervalle } [\alpha, 1]}$

0.5 **b) Déduisons la position relative de la droite (Δ) et la courbe $(\mathcal{C}_f)$ sur les intervalles $[\alpha;1]$, $]0;\alpha]$ et $[1;+\infty[$**

D'après la question précédente on a $\forall x \in]0,\alpha] \cup [1,+\infty[\;\; g(x) \leq 0$

Donc $\forall x \in]0,\alpha] \cup [1,+\infty[\;\; f(x) \leq x$

D'où $\boxed{\text{la droite } (\Delta) \text{ est au-dessus de } (\mathcal{C}_f) \text{ sur les intervalles }]0,\alpha] \text{ et } [1,+\infty[}$

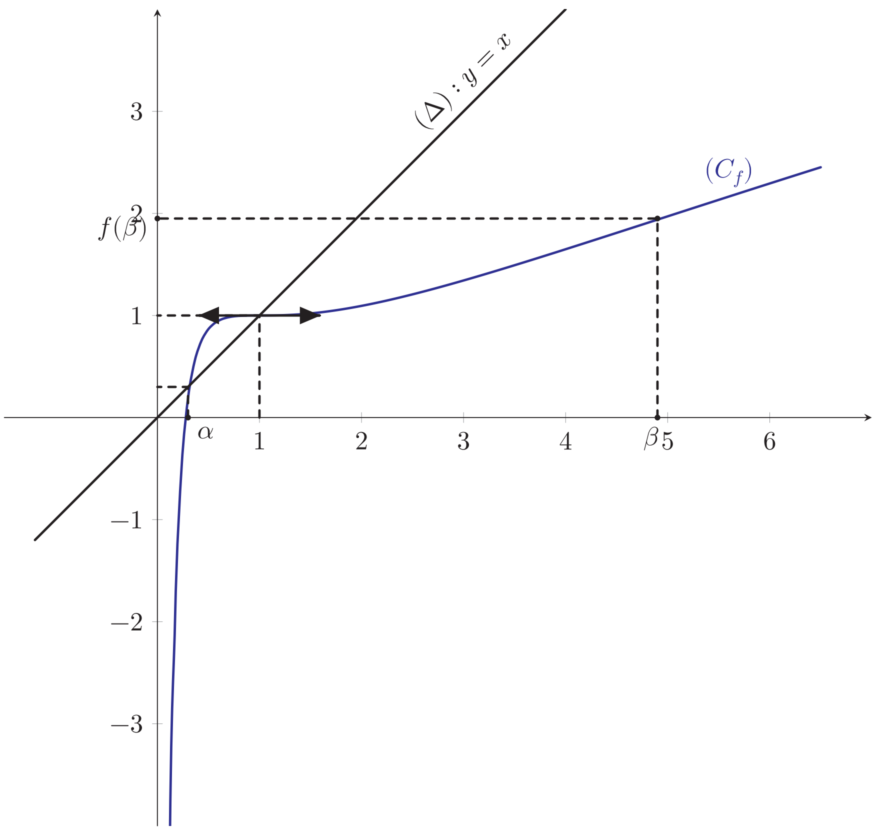
D'autre part on a $\forall x \in [\alpha, 1] \;\; g(x) \geq 0$

Donc $\forall x \in [\alpha, 1] \;\; f(x) \geq x$

D'où $\boxed{\text{la droite } (\Delta) \text{ est en dessous de } (\mathcal{C}_f) \text{ sur l'intervalle } [\alpha, 1]}$

1.5 **5 - Construisons la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et la droite (Δ) dans le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$**

(On prend : $\alpha \simeq 0.3$; $\beta \simeq 4.9$ et $f(\beta) \simeq 1.9$)



0.5 **6 - a) Vérifions que la fonction $x \mapsto 2x - x\ln x$ est une primitive de la fonction $x \mapsto 1 - \ln x$ sur $[\alpha;1]$**

Les deux fonctions $x \mapsto 2x$ et $x \mapsto -x$ sont des fonctions polynômes dérivables sur $[\alpha, 1]$

Et $x \mapsto \ln x$ une fonction logarithme népérien donc dérivable sur $[\alpha, 1]$

Alors $x \mapsto 2x - x\ln x$ est dérivable sur $[\alpha, 1]$

Et pour tout x de $[\alpha, 1]$ on a :

$$\begin{aligned}(2x - x\ln x)' &= (2x)' - (x\ln x)' \\ &= 2 - \left(1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x}\right) \\ &= 2 - \ln x - 1 \\ &= 1 - \ln x\end{aligned}$$

D'où $\boxed{x \mapsto 2x - x\ln x \text{ est une primitive de la fonction } x \mapsto 1 - \ln x \text{ sur } [\alpha, 1]}$

1 **b) En utilisant une intégration par parties, montrons que :**
$\displaystyle\int_\alpha^1 (1 - \ln x)^2 \mathbf{d}x = 5(1-\alpha) + \alpha(4 - \ln\alpha)\ln\alpha$

On va utiliser une intégration par parties sur l'intégrale : $I = \displaystyle\int_\alpha^1 1 \times (1 - \ln x)^2\, dx$

On pose $u(x) = (1 - \ln x)^2$ *et* $v'(x) = 1$

Donc $u'(x) = \dfrac{-2(1 - \ln x)}{x}$ *et* $v(x) = x$

$$\begin{aligned}I &= \left[x(1 - \ln x)^2\right]_\alpha^1 - \int_\alpha^1 x \times \frac{-2(1 - \ln x)}{x} dx \\ &= (1 - \ln 1)^2 - \alpha(1 - \ln\alpha)^2 + 2\int_\alpha^1 (1 - \ln x)\, dx \\ &= 1 - \alpha(1 - \ln\alpha)^2 + 2\Big[2x - x\ln x\Big]_\alpha^1 \\ &= 1 - \alpha\left(1 - 2\ln\alpha + \ln(\alpha)^2\right) + 2(2 - \ln 1 - 2\alpha + \alpha\ln\alpha) \\ &= 1 - \alpha + 2\alpha\ln\alpha - \alpha(\ln\alpha)^2 + 4 - 4\alpha + 2\alpha\ln\alpha \\ &= 5 - 5\alpha + 4\alpha\ln\alpha - \alpha(\ln\alpha)^2\end{aligned}$$

Finalement $\boxed{I = 5(1-\alpha) + \alpha(4 - \ln\alpha)\ln\alpha}$

0.75 **c) Déduisons, en fonction de α, l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe $(\mathcal{C}_f)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = 1$**

On a $\mathcal{A} = \displaystyle\int_\alpha^1 |f(x)|\, dx\ u.a$ et f continue et strictement croissante sur $[\alpha, 1]$

Donc $\forall x \in [\alpha, 1]$ on a $f(\alpha) \leq f(x) \leq f(1)$

Et puisque $g(\alpha) = g(1) = 0$ alors $f(\alpha) = \alpha$ et $f(1) = 1$

D'où $\alpha \leq f(x) \leq 1$ pour tout x de $[\alpha, 1]$, c'est-à-dire f est positive sur $[\alpha, 1]$

Par conséquent : $\mathcal{A} = \int_{\alpha}^{1} f(x)\,dx\ u.a$

$$= \int_{\alpha}^{1} \left(2 - \frac{2}{x} + (1 - \ln x)^2\right) dx\ u.a$$

$$= \left(\left[2x - 2\ln|x|\right]_{\alpha}^{1} + 5(1-\alpha) + \alpha(4 - \ln\alpha)\ln\alpha\right) u.a$$

$$= (2 - 2\alpha + 2\ln\alpha + 5(1-\alpha) + \alpha(4 - \ln\alpha)\ln\alpha)\, cm^2$$

$$\mathcal{A} = \Big(7(1-\alpha) + (2 + 4\alpha - \alpha\ln\alpha)\ln\alpha\Big) cm^2$$

Finalement $\boxed{\mathcal{A} = \Big(7(1-\alpha) + (2 + 4\alpha - \alpha\ln\alpha)\ln\alpha\Big) cm^2}$

7 - Soit la suite numérique $(\mathcal{U}_n)$ définie par $\mathcal{U}_0 \in]\alpha; 1[$ et la relation $\mathcal{U}_{n+1} = f(\mathcal{U}_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

0.5 **a) Montrons, par récurrence, que $\alpha < \mathcal{U}_n < 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$**

Pour $n = 0$ on a $u_0 \in]\alpha, 1[$ donc $\alpha < u_0 < 1$

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\alpha < u_n < 1$ et on montre que $\alpha < u_{n+1} < 1$

On a $\alpha < u_n < 1$ et f une fonction dérivable (d'après la question **2-**) donc continue et strictement croissante sur $[\alpha, 1]$

Donc $f(\alpha) < f(u_n) < f(1)$ et puisque $f(\alpha) = \alpha$, $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(1) = 1$

Alors $\alpha < u_{n+1} < 1$

Et d'après le principe de récurrence on a $\boxed{\alpha < u_n < 1, \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}}$

0.5 **b)** Montrons que la suite $(\mathcal{U}_n)$ est croissante (on peut utiliser la question $4 - b)$)

D'après la question **4-b)** on a $f(x) > x$ pour tout x de $]\alpha, 1[$

Et d'après la question précédente on a $u_n \in]\alpha, 1[$ pour tout n de $\mathbb{N}$

Alors $f(u_n) > u_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$, c'est-à-dire $u_{n+1} > u_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$

D'où $\boxed{(u_n) \text{ est une suite croissante}}$

0.75 **c)** Déduisons que la suite $(\mathcal{U}_n)$ est convergente et calculons sa limite

La suite (u_n) est croissante et majorée par 1

Alors : $\boxed{\text{la suite } (\mathcal{U}_n) \text{ est convergente}}$ **Calcule de $\lim u_n$**

Soit $I =]\alpha, 1[$, on a f continue sur I, $f(I) = I$, $u_0 \in I$ et (u_n) convergente

Alors $\lim u_n$ est une solution de l'équation $f(x) - x = 0$ ou $g(x) = 0$

Et d'après la représentation graphique de la fonction g, les solutions sont α et 1

Donc $\lim u_n = \alpha$ ou $\lim u_n = 1$, et comme (u_n) est croissante alors $u_n > u_0 > \alpha$

D'où $\boxed{\lim u_n = 1}$

FIN