بسم الله الرحمان الرحيم

مقدمة

سمحت إصلاحات المنظومة التربوية بإعادة الإعتبار إلى شهادة التعليم المتوسط إذا أصبحت ركيزة أساسية في الإنتقال إلى التعليم الثانوي كما أنها جاءت بنمط جديد من التقويم الذي يعتمد على المقاربة بالكفاءات، وفي هذا الإطار ومساهمة منا لرفع نسبة النجاح والحد من التسرب المدرسي، نضع بين أيدي تلاميذتنا المقبلين على إمتحان شهادة التعليم المتوسط، هذا الكتاب أملين أن يكون فضاءا أخرا في متناولهم يسمح لهم بالتحضير الجيد لمادة................وتعزيز كفاءاتهم ومكتسابتهم العلمية.
ولقد حرصنا على تقديم مواد الكتاب بمنهجية تربوية بسيطة، في متناول التلاميذ بحيث يجدون ملخصات لأهم المعارف المستهدفة المرفقة بسلسلة من التمارين وبعض وضعيات الإدماج التقويمية ومواضيع إمتخانات، مرفقة بحلولها.
في الأخير لا يسعنا إلا أن نشجع تلامذتنا على الجهد والمثابرة حتى يكون النجاح حليفهم.

المؤلف: **تاوريرت جمال**
مفتش التربية و التكوين لمادة الرياضيات

الفهرس

1 قواسم عدد طبيعي- القاسم المشترك الأكبر- الكسور غير القابلة للاختزال

أتذكر الأهم:

1. قاسم عدد طبيعي

تعريف: a، b عددان طبيعيان حيث: $b \neq 0$.
(b قاسم لِـ a) معناه (يوجد عدد طبيعي k حيث: $a = k \times b$)
نقول أيضا أن a يقبل القسمة على b أو أن b يقسم a أو أن a مضاعف لِـ b.

مثال: العدد 3 يقسم العدد 81 لأن $81 = 27 \times 3$
ملاحظة: العدد 1 يقسم كل الأعداد الطبيعية.

2. خواص قاسم عدد طبيعي

a، b عددان طبيعيان حيث: $a > b$ و n عدد طبيعي غير معدوم.
الخاصية1: إذا قسم n كلا من a و b فإنه يقسم كلا من $(a+b)$ و $(a-b)$.
الخاصية2: إذا قسم n كلا من a و b فإنه يقسم باقي القسمة الإقليدية لِـ a على b.

3. القاسم المشترك الأكبر

تعريف: نسمي القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين أكبر قواسمهما المشتركة.

مثال: القواسم المشتركة للعددين 12 و 30 هي: 1، 2، 3 و 6 ومنه: $PGCD(30;12) = 6$.

خاصية: مجموعة القواسم المشتركة لعددين طبيعيين هي مجموعة قواسم قاسمهما المشترك الأكبر.

4. الكسور غير القابلة للاختزال

تعريف1: (a و b أوليان فيما بينهما) معناه ($PGCD(a;b) = 1$).

تعريف2: (الكسر $\frac{a}{b}$ $(b \neq 0)$ غير قابل للاختزال) معناه (a و b أوليان فيما بينهما).

مثال: العددان 25 و 26 أوليان فيما بينهما ومنه الكسر $\frac{25}{26}$ غير قابل للاختزال.

وزارة التربية الوطنية. المركز الوطني لإدماج الابتكارات البيداغوجية و تنمية تكنولوجيات الإعلام و الاتصال في التربية ، فيفري 2009

أتدرب:

التمرين1:

1- حدد المساواة التي تعبر عن القسمة الإقليدية للعدد 1512 على 21 .

2- أكتب $\frac{720}{1512}$ على شكل كسر غير قابل للاختزال.

التمرين2:

نعتبر العددين الطبيعيين 63 و 105.

1. عين قائمة قواسم كل من هذين العددين.
2. ما هو القاسم المشترك الأكبر لهذين العددين؟ هل هما أوليان فيما بينهما؟ برر.
3. اجعل الكسر $\frac{63}{105}$ غير قابل للاختزال.

التمرين3:

نعتبر العددين 286 و 130.

1- باستعمال خوارزمية إقليدس عين $PGCD\,(286;130)$.

2- ليكن الكسر $A=\frac{286}{130}$. أكتب A على شكل كسر غير قابل للاختزال.

أنمي كفاءاتي:

المسألة1:

يعرض بائع زهور للبيع 75 زهرة نرجس و 90 زهرة أقحوان.

1. باستعمال كل الزهور، هل يمكنه تشكيل 5 باقات متماثلة؟ 6 باقات؟
2. ما هو أكبر عدد ممكن من الباقات المتماثلة التي يمكن تشكيلها باستعمال كل الزهور؟ ما هو عدد زهور النرجس و زهور الأقحوان في كل باقة؟

المسألة2:

نعتبر العددين 3073 و 1317.

1. أحسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 3073 و 1317.
2. يشارك تلاميذ في مسابقة في الرياضيات حسب الفرق. يوجد 3073 تلميذة و 1317 تلميذ. يجب تكوين فرق متماثلة (لها نفس عدد التلاميذ و نفس التوزيع بين البنات و الأولاد) بتعيين كل مشارك في فريق من الفرق.

أ) ما هو أكبر عدد ممكن من الفرق المتماثلة التي يمكن تشكيلها؟

ب) عين في هذه الحالة تشكيلة كل فريق.(عدد البنات و عدد الأولاد) .

وزارة التربية الوطنية. المركز الوطني لإدماج الابتكارات البيداغوجية و تنمية تكنولوجيات الإعلام و الاتصال في التربية ، فيفري 2009

المسألة3: نعتبر العددين 540 و 300 .

1. أحسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 540 و 300 .
2. نريد أن نفرش قاعة مستطيلة الشكل طولها $5,40m$ و عرضها $3m$ بزرابي مربعة الشكل و كلها متماثلة.
   - ما هو طول كل زربية حتى يكون عدد الزرابي المستعملة أصغر ما يمكن؟
   - عين حينئذ عدد الزرابي المستعملة.

المسألة4: يملك أحد هواة الطوابع البريدية 1631 طابعا جزائريا و 932 طابعا أجنبيا.
يريد بيع كل طوابعه على شكل مجموعات متماثلة(لها نفس عدد الطوابع و نفس التوزيع بين الطوابع الجزائرية و الأجنبية).

1. عين أكبر عدد من المجموعات التي يمكن تشكيلها.
2. عين حينئذ عدد الطوابع الجزائرية و عدد الطوابع الأجنبية في كل مجموعة.

حلول التمارين و المسائل

حل التمرين 1

1. $1512 = 21 \times 72 + 0$. حاصل القسمة هو 72 بينما الباقي 0 .
2. لدينا: $1512 = 21 \times 72$ و $720 = 10 \times 72$ و بالتالي:
$\frac{10}{21} = \frac{10 \times 72}{21 \times 72} = \frac{720}{1512}$. الكسر $\frac{10}{21}$ غير قابل للاختزال.

حل التمرين 2

1. قواسم العدد 63 هي: 1، 3، 7، 9، 21، 63 .
قواسم العدد 105 هي: 1، 3، 5، 7، 15، 21، 35، 105.
2. نلاحظ من القائمتين أن قواسمهما المشتركة هي: 1، 3، 7، 21
و بالتالي فإن:
$PGCD\,(105;63) = 21$. و بما أن $PGCD\,(105;63) \neq 1$ فإن العددين 105 و 63 ليسا أوليين فيما بينهما.
3. لدينا: $105 = 21 \times 5$ و $63 = 21 \times 3$ و منه: $\frac{3}{5} = \frac{21 \times 3}{21 \times 5} = \frac{63}{105}$.

وزارة التربية الوطنية. المركز الوطني لإدماج الابتكارات البيداغوجية و تنمية تكنولوجيات الإعلام و الاتصال في التربية ، فيفري 2009

الكسر $\frac{3}{5}$ غير قابل للاختزال.

حل التمرين3

.1

	2	
286	130	26
	26	0

← الحاصل
← القاسم و المقسوم
← الباقي

$$286 = 130 \times 2 + 26$$

$$130 = 26 \times 5 + 0$$

آخر باق غير معدوم للقسمات الإقليدية المتتابعة هو 26
و بالتالي: $PGCD(286;130) = 26$

2. حسب نتيجة السؤال الأول لدينا: $286 = 26 \times 11$ و $130 = 26 \times 5$ و منه:

$$A = \frac{286}{130} = \frac{26 \times 11}{26 \times 5} = \frac{11}{5}$$

الكسر $\frac{11}{5}$ غير قابل للاختزال.

حل المسألة1

1. عدد الزهور المعروضة للبيع هو: $165 = 90 + 75$. لدينا: $165 : 5 = 33$
و بالتالي يمكن البائع تشكيل 5 باقات متماثلة بحيث تشمل كل باقة 15 زهرة نرجس و 18 زهرة أقحوان لأن: $75 : 5 = 15$ و $90 : 5 = 18$.
في حين: $165 : 6 = 27.5$
و بالتالي لا يمكن للبائع تشكيل 6 باقات متماثلة(العدد 27.5 ليس عددا طبيعيا).
2. إذا رمزنا إلى أكبر عدد ممكن من الباقات المتماثلة التي يمكن تشكيلها باستعمال كل الزهور بالرمز n فيجب أن يقسم n كلا من العددين 75 و 90 و بالتالي فإن n قاسم مشترك للعددين 75 و 90 و بالإضافة إلى ذلك فإن n هو أكبر هذه القواسم.
إذن n هو القاسم المشترك الأكبر للعددين 75 و 90. لنحسب باستعمال مثلا خوارزمية إقليدس $PGCD(90,75)$.

$$90 = 75 \times 1 + 15$$

$$75 = 15 \times 5 + 0$$

آخر باق غير معدوم هو 15 و منه: $PGCD(90,75) = 15$.

إذن أكبر عدد ممكن من الباقات المتماثلة التي يمكن تشكيلها باستعمال كل الزهور هو: 15.
لدينا: $75 : 15 = 5$ و $90 : 15 = 6$ و بالتالي فعدد زهور النرجس في كل باقة هو: 5 بينما عدد زهور الأقحوان في كل باقة هو: 6.
نجد في كل باقة 11 زهرة.

وزارة التربية الوطنية. المركز الوطني لإدماج الابتكارات البيداغوجية و تنمية تكنولوجيات الإعلام و الاتصال في التربية ، فيفري 2009

حل المسألة2

1. لنحسب باستعمال مثلا خوارزمية إقليدس $PGCD\left(3073,1317\right)$.

لدينا: $3073 = 1317 \times 2 + 439$ آخر باق غير معدوم هو 439 ومنه:

$1317 = 439 \times 3 + 0$

$$PGCD\left(3073,1317\right) = 439$$

2. ا) بما أن كل الفرق متماثلة و أن كل تلميذ سواء كان بنتا أو ولدا ينتمي إلى إحدى الفرق فإن عدد الفرق يقسم كلا من عدد الأولاد و عدد البنات أي يقسم 3073 و 1317.

و بما أننا نبحث عن أكبر عدد من الفرق فإن هذا العدد هو القاسم المشترك الأكبر للعددين 3073 و 1317 أي 439. و بالتالي فإن أكبر عدد ممكن من الفرق المتماثلة التي يمكن تشكيلها هو 439.

ب) عدد البنات في كل فريق هو: $3073 \div 439 = 7$.

عدد الأولاد في كل فريق هو: $1317 \div 439 = 3$.

يتشكل كل فريق من 10 تلاميذ من بينهم 7 بنات و 3 أولاد.

حل المسألة3

1. لتعيين القاسم المشترك الأكبر للعددين 540 و 300 نستعمل مثلا تقنية عمليات الطرح المتتابعة و التي ترتكز على القاعدة التالية:

$PGCD\left(a;b\right) = PGCD\left(b;a-b\right)$ علما أن: $a > b$

$540 - 300 = 240$ و منه: $PGCD\left(540;300\right) = PGCD\left(300;240\right)$

$300 - 240 = 60$ و منه: $PGCD\left(540;300\right) = PGCD\left(240;60\right)$

$240 - 60 = 180$ و منه: $PGCD\left(540;300\right) = PGCD\left(180;60\right)$

$180 - 60 = 120$ و منه: $PGCD\left(540;300\right) = PGCD\left(120;60\right)$

$120 - 60 = 60$ و منه: $PGCD\left(540;300\right) = PGCD\left(60;60\right)$

و هكذا نجد أن: $PGCD\left(540;300\right) = 60$

2. • طول القاعة هو $540cm$ و عرضها $300cm$. لتفريش القاعة و بدون استعمال أجزاء من زرابي يجب أن يكون ضلع الزربية قاسما لكل من العددين 540 و 300 و ليكون عدد الزرابي المستعملة أصغر ما يمكن يجب أن تكون الزرابي أكبر ما يمكن و بالتالي يجب أن يكون ضلع الزربية القاسم المشترك الأكبر للعددين 540 و 300. و هكذا فإن طول ضلع كل زربية هو: $60cm$.

• عدد الزرابي على طول القاعة هو: $540 \div 60 = 9$ بينما عددها على عرض القاعة هو: $300 \div 60 = 5$. و بالتالي فعدد الزرابي المطلوب هو: $9 \times 5 = 45$.

حل المسألة4

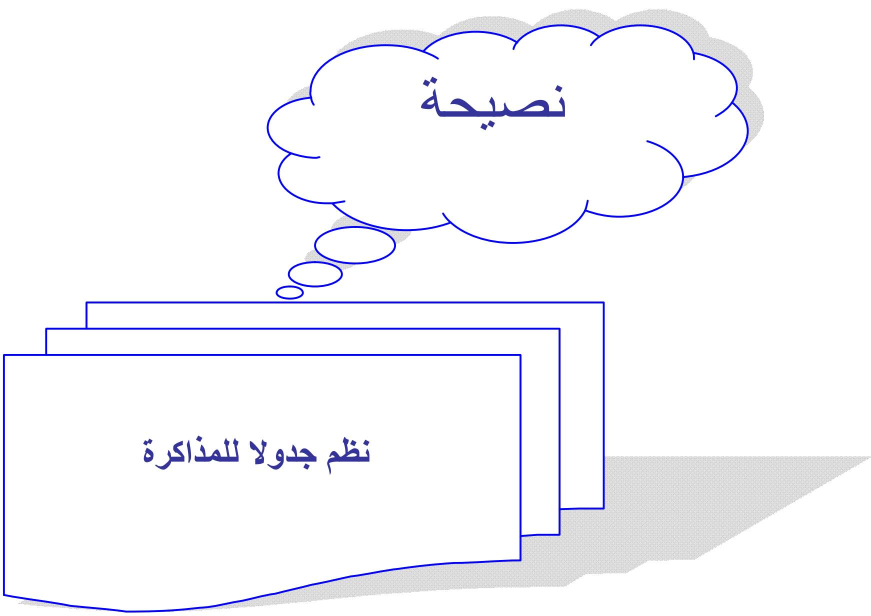
1. إذا رمزنا إلى أكبر عدد ممكن من المجموعات المتماثلة التي يمكن تشكيلها باستعمال كل الطوابع بالرمز n فيجب أن يقسم n كل 1631 و 932 و بالتالي فإن n قاسم مشترك للعددين 1631 و 932 و بالإضافة إلى ذلك فإن n هو أكبر هذه القواسم. إذن n هو القاسم المشترك الأكبر للعددين 1631 و 932. باستعمال خوارزمية إقليدس يكون:

لدينا: $$\begin{aligned}1631 &= 932\times1+699\\ 962 &= 699\times1 = 233\\ 699 &= 233\times3+0\end{aligned}$$ و منه: $PGCD\left(1631;932\right)=233$

و بالتالي فإن أكبر عدد للمجموعات التي يمكن للهاوي تشكيلها هو: 233.

2. لدينا: $1631\div233=7$ و $932\div233=4$

في كل مجموعة يوجد إذن 7 طوابع جزائرية و 4 طوابع أجنبية.



2 الحساب على الجذور

أتذكر الأهم:

5. الجذر التربيعي لعدد موجب

تعريف: الجذر التربيعي للعدد الموجب a هو العدد الموجب الذي مربعه يساوي a

و نرمز له بالرمز $\sqrt{a}$. لدينا: $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$.

مثال: $\sqrt{2}$ هو الجذر التربيعي للعدد 2. لدينا: $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$.

6. المعادلة من الشكل $x^2 = a$

- إذا كان $a < 0$ فإن المعادلة $x^2 = a$ لا تقبل حلولا .
- إذا كان $a = 0$ فإن المعادلة $x^2 = 0$ تقبل حلا وحيدا و هو 0.
- إذا كان $a > 0$ فإن المعادلة $x^2 = a$ تقبل حلين و هما $-\sqrt{a}$ و $\sqrt{a}$.

مثال: للمعادلة $x^2 = 3$ حلان هما $-\sqrt{3}$ و $\sqrt{3}$.

7. خواص

الخاصية1: إذا كان a و b عددين موجبين فإن: $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.

الخاصية2: إذا كان a و b عددين موجبين حيث $b \neq 0$ فإن: $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

الخاصية3: إذا كان a عددا موجبا فإن: $\sqrt{a^2} = a$.

الخاصية4: إذا كان a و b عددين موجبين فإن: $\sqrt{a^2 \times b} = a\sqrt{b}$.

أمثلة: $\sqrt{3} \times \sqrt{5} = \sqrt{15}$ ، $\dfrac{\sqrt{14}}{\sqrt{7}} = \sqrt{\dfrac{14}{7}} = \sqrt{2}$ ، $\sqrt{36} = 6$ ، $\sqrt{18} = \sqrt{3^2 \times 2} = 3\sqrt{2}$

ملاحظة: إذا كان a و b عددين موجبين غير معدومين حيث $a < b$ فإن:

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b} \text{ و } \sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

مثال: لدينا من جهة $\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$ و لدينا من جهة ثانية $\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$

و بالتالي: $\sqrt{16+9} \neq \sqrt{16} + \sqrt{9}$

لدينا من جهة $\sqrt{100-36} = \sqrt{64} = 8$ و لدينا من جهة ثانية $\sqrt{100} - \sqrt{36} = 10 - 6 = 4$

وزارة التربية الوطنية. المركز الوطني لإدماج الابتكارات البيداغوجية و تنمية تكنولوجيات الإعلام و الاتصال في التربية ، فيفري 2009

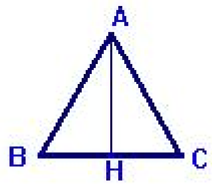
و بالتالي: $\sqrt{100-36} \neq \sqrt{100}-\sqrt{36}$

تمارين ومسائل

أتدرب:

التمرين1: علما أن مساحة قاعة مربعة الشكل هي $18,49\,m^2$ عين بالمتر طول ضلعها.

التمرين2: ABC مثلث متقايس الأضلاع و لتكن النقطة H منتصف القطعة $[BC]$.



1. أحسب الطول AH إذا علمت أن $BC = 7cm$.
2. أحسب الطول AH إذا علمت أن $BC = a\,cm$.

التمرين3: نعتبر العددين A و B بحيث:

$A = \sqrt{25}+\sqrt{20}+\sqrt{80}$ و $B = \left(\sqrt{5}+2\right)^2 - \left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{5}+1\right)$.

1. أكتب العددين A و B على الشكل $a+b\sqrt{5}$ حيث a و b عددان طبيعيان.
2. عين القيمة المدورة إلى 10^{-2} للعدد A.
3. أحسب قيمة مقربة إلى 10^{-2} بالنقصان للعدد B.

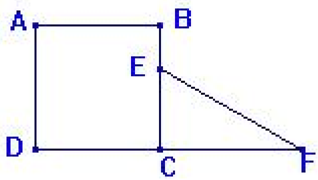
أنمي كفاءاتي:

المسألة1: نهدف إلى إثبات أن العدد $\sqrt{2}$ ليس عددا ناطقا. إذا كان $\sqrt{2}$ عددا ناطقا فإنه يكتب على شكل كسر غير قابل للاختزال $\frac{p}{q}$ حيث p و q عددان طبيعيان غير معدومين.

1. تحقق أن $p^2 = 2q^2$ ثم استنتج أن p^2 عدد زوجي.
2. بين انه إذا كان p زوجيا يكون p^2 زوجيا و إذا كان p فرديا يكون p^2 فرديا ثم استنتج أن العدد p زوجي.
3. بوضع $p = 2p'$ و بإتباع نفس منهجية السؤال السابق أثبت أن العدد q زوجي.

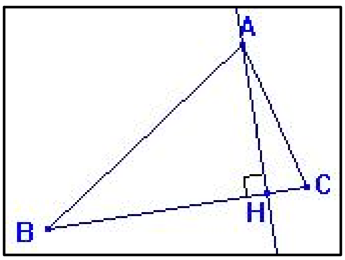
4. اشرح لماذا أجوبة السؤالين 2 و 3 مناقضة للمعطيات ثم استنتج أن $\sqrt{2}$ ليس عددا ناطقا.

المسألة2: $ABCD$ مربع طول ضلعه $x\,cm$. ECF مثلث قائم في النقطة C. النقطة E نقطة من القطعة المستقيمة $[BC]$ و $FC = 4cm$.



1. عبر عن A مساحة $ABCD$ بواسطة x ثم أحسب A من اجل $x = 2+\sqrt{2}$.
2. * نفرض $x \geq 1$ و $BE = 0,5cm$.
احسب A' مساحة المثلث ECF بواسطة x.
* نضع $S = A + A'$. أحسب S بواسطة x ثم تحقق أن: $S = x^2 + 2x - 1$.
* أحسب S من أجل $x = 2+\sqrt{2}$. تعطى النتيجة على الشكل $a + b\sqrt{2}$.

المسألة3: ABC مثلث و H المسقط العمودي لِـ A على (BC)
حيث: $BH = 9\sqrt{3}$ ، $HC = 5\sqrt{3}$ و $AH = 12\sqrt{3}$.



1. بين أن: $AB = 15\sqrt{3}$ و أن: $AC = 13\sqrt{3}$.
2. أحسب P محيط المثلث ABC.
3. أحسب S مساحة المثلث ABC.
4. هل المثلث ABC قائم في النقطة A ؟ علل.

حلول التمارين و المسائل

حل التمرين1

إذا رمزنا إلى طول ضلع القاعة بالرمز x يكون لدينا: $x^2 = 18,49$ لأن مساحة المربع هي x^2. للمعادلة $x^2 = 18,49$ حلان هما $-4,3$ و $4,3$. و علما أن الأطوال أعداد موجبة
فإن $x = 4,3$. و هكذا طول ضلع القاعة المربعة الشكل هو $4,3m$.

حل التمرين2

وزارة التربية الوطنية. المركز الوطني لإدماج الابتكارات البيداغوجية و تنمية تكنولوجيات الإعلام و الاتصال في التربية ، فيفري 2009

المثلث AHC قائم في النقطة H. لدينا حسب مبرهنة فيتاغورس:
$AC^2 = AH^2 + HC^2$ و منه: $AH^2 = AC^2 - HC^2$

بما أن H منتصف $[BC]$ فإن: $HC = \frac{BC}{2}$ و بالتالي: $HC^2 = \frac{BC^2}{4}$

و علما أن: $AC = BC$ فإن: $AH^2 = BC^2 - \frac{BC^2}{2^2}$ أي: $AH^2 = \frac{3BC^2}{2^2}$

1. لدينا: $AH^2 = \frac{3\times 7^2}{2^2}$ و منه: $AH = \sqrt{\frac{3\times 7^2}{2^2}} = \frac{7\sqrt{3}}{2}$.

2. لدينا: $AH^2 = \frac{3\times a^2}{2^2}$ و منه: $AH = \sqrt{\frac{3\times a^2}{2^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

حل التمرين 3

.1

$$A = \sqrt{25} + \sqrt{20} + \sqrt{80}$$

و

$$A = 5 + \sqrt{4\times 5} + \sqrt{16\times 5}$$

$$A = 5 + 2\sqrt{5} + 4\sqrt{5}$$

$$A = 5 + 6\sqrt{5}$$

$$B = \left(\sqrt{5}+2\right)^2 - \left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{5}+1\right)$$

$$B = \left(\sqrt{5}\right)^2 + 2\times\sqrt{5}\times 2 + 2^2 - \left(\left(\sqrt{5}\right)^2 - 1\right)$$

$$B = 5 + 4\sqrt{5} + 4 - 5 + 1$$

$$B = 5 + 4\sqrt{5}$$

2.باستعمال آلة حاسبة علمية نتحصل على: $A = 18,41640...$.

إذن $18,42$ هي القيمة المدورة إلى 10^{-2} للعدد A لأن $6 \geq 5$.

3.باستعمال آلة حاسبة علمية نتحصل على: $B = 13,94427...$.

إذن $13,94$ قيمة مقربة إلى 10^{-2} بالنقصان للعدد B.

حل المسألة 1

1.بوضع: $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$ يكون لدينا: $\frac{p^2}{q^2} = 2$ و منه: $p^2 = 2q^2$. بما أن p^2 يكتب على الشكل: $2k$ فإن p^2 عدد زوجي.

2. *نفرض أن p زوجي و منه: $p = 2k$ حيث k عدد طبيعي و بالتالي: $p^2 = 4k^2$
و هكذا $p^2 = 2\left(2k^2\right) = 2k'$ مع $k' = 2k^2$. إذن: p^2 عدد زوجي.

وزارة التربية الوطنية. المركز الوطني لإدماج الابتكارات البيداغوجية و تنمية تكنولوجيات الإعلام و الاتصال في التربية ، فيفري 2009

* نفرض أن p فرديا و منه: $p = 2k + 1$ حيث k عدد طبيعي
و بالتالي: $p^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$
و هكذا $p^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2k' + 1$ مع $k' = 2k^2 + 2k$. إذن: p^2 عدد فردي.
و منه لو كان p عددا فرديا لكان p^2 عددا فرديا و بما أن p^2 زوجي فإن p زوجي.
3. بما أن p زوجي نضع $p = 2p'$ و منه: $p^2 = 4p'^2$ و بعد التعويض في العلاقة:
$p^2 = 2q^2$ نتحصل على $4p'^2 = 2q^2$ و نجد هكذا: $q^2 = 2p'^2$.
و باستعمال نتائج السؤال الثاني نستنتج أن العدد q زوجي لأنه في نفس وضعية p.
4. استنتجنا في السؤالين 2 و 3 أن العددين p و q زوجيان و بالتالي فإن العدد 2 قاسم مشترك لهما و هذا يعني أن الكسر $\frac{p}{q}$ غير قابل للاختزال و هذا مناقض للفرضية " $\frac{p}{q}$ كسر غير قابل للاختزال " إذن $\sqrt{2}$ ليس عددا ناطقا.

حل المسألة2

1. $A = x^2$. **من أجل** $x = 2 + \sqrt{2}$ لدينا: $A = (2+\sqrt{2})^2 = 6 + 4\sqrt{2}$.
2. $A' = \frac{CF \times CE}{2} = \frac{4 \times (x - 0,5)}{2} = 2(x - 0,5)$ * . **و بالتالي:**
$A' = 2x - 1$.
* **لدينا:** $S = x^2 + (2x - 1)$ و منه: $S = x^2 + 2x - 1$.
* $S = (2+\sqrt{2})^2 + 2(2+\sqrt{2}) - 1 = 4 + 4\sqrt{2} + 2 + 4 + 2\sqrt{2} - 1$
و منه: $S = 9 + 6\sqrt{2}$.

حل المسألة3

1. * بما أن المثلث ABH قائم في النقطة H يكون لدينا حسب مبرهنة فيتاغورس: $AB^2 = BH^2 + AH^2$ أي:
$$AB^2 = (9\sqrt{3})^2 + (12\sqrt{3})^2 = 9^2 \times 3 + 12^2 \times 3$$
و منه: $AB^2 = 225 \times 3 = 15^2 \times 3$ و بالتالي: $AB = \sqrt{15^2 \times 3}$ أي: $AB = 15\sqrt{3}$.
* بما أن المثلث ACH قائم في النقطة H يكون لدينا حسب مبرهنة فيتاغورس:
$AC^2 = HC^2 + AH^2$ أي: $AC^2 = (5\sqrt{3})^2 + (12\sqrt{3})^2 = 5^2 \times 3 + 12^2 \times 3$
و منه: $AC^2 = 169 \times 3 = 13^2 \times 3$ و بالتالي: $AC = \sqrt{13^2 \times 3}$ أي: $AC = 13\sqrt{3}$.
2. لدينا: $BC = BH + HC$ و بالتالي: $BC = 9\sqrt{3} + 12\sqrt{3} = 21\sqrt{3}$.
نعلم أن: $P = AB + BC + CA$ و منه: $P = 15\sqrt{3} + 21\sqrt{3} + 13\sqrt{3}$.

و هكذا نجد أن: $P = 49\sqrt{3}$

3. مساحة المثلث ABC هي: $S = \dfrac{BC \times AH}{2}$. و بالتالي:

$S = \dfrac{21\sqrt{3} \times 12\sqrt{3}}{2} = 21 \times 6 \times \left(\sqrt{3}\right)^2$ و هكذا نجد أن: $S = 378$.

4. لدينا من جهة: $BC^2 = \left(21\sqrt{3}\right)^2 = 1323$ و لدينا من جهة ثانية:

$$AB^2 + AC^2 = 15^2 \times 3 + 13^2 \times 3 = 1182$$

نلاحظ أن: $AB^2 + AC^2 \neq BC^2$ و بالتالي فالمثلث ABC ليس قائما في النقطة A.

نصيحة

أحسن استغلال وقتك
واجعل وقتا للجد و الاجتهاد
ووقتا للعب و المرح.

3 حساب الحرفي- المعادلات من الدرجة الأولى بمجهول واحد

أتذكر الأهم:

8. المتطابقات الشهيرة

تعريف: من اجل كل عددين a و b تسمى المساويات الآتية متطابقات شهيرة:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

أمثلة: $\left(x+\sqrt{2}\right)^2 = x^2 + 2\sqrt{2}x + 2$ ، $(1-x)^2 = 1 - 2x + x^2$ ،
$x^2 - 5 = \left(x-\sqrt{5}\right)\left(x+\sqrt{5}\right)$

9. النشر و التحليل

*تحليل عبارة جبرية يعني كتابتها على شكل جداء و يتم ذلك إما باستعمال العامل المشترك أو باستعمال المتطابقات الشهيرة.

*نشر و تبسيط عبارة جبرية يعني إجراء مختلف العمليات قصد تبسيطها و كتابتها على شكل خطي.

مثال: * نشر وتبسيط العبارة $(x+2)^2 - 3(x-1)$ يعطي: $x^2 + x + 7$

* تحليل العبارة $(x+2)^2 + (x+2)(x-1)$ يعطي: $(x+2)(2x+1)$

10. معادلة جداء (معدوم)

تعريف: تسمى كل معادلة من الشكل: $(ax+b)(cx+d) = 0$ حيث: a ، b ، c و d أعداد حقيقية معلومة مع $a \neq 0$ و $b \neq 0$ معادلة جداء(معدوم) و يؤول حلها إلى حل المعادلتين: $ax+b=0$ و $cx+d=0$.

لدينا: $(ax+b)(cx+d) = 0$ يعني $ax+b=0$ أو $cx+d=0$.

مثال: نعتبر المعادلة ذات المجهول x التالية: $(x+1)(2x-3) = 0$.

$(x+1)(2x-3) = 0$ يعني أن: $x+1=0$ أو $2x-3=0$ أي: $x=-1$ أو $x = \frac{3}{2}$.

وزارة التربية الوطنية. المركز الوطني لإدماج الابتكارات البيداغوجية و تنمية تكنولوجيات الإعلام و الاتصال في التربية ، فيفري 2009

و هكذا فإن للمعادلة: $(x+1)(2x-3)=0$ حلان هما: -1 و $\frac{3}{2}$.

تمارين ومسائل

أتدرب:

التمرين1: نعتبر العبارة الجبرية: $A=(3x-5)^2-(2x-1)(3x-5)$.

1. انشر و بسط العبارة A.
2. حلل العبارة A.
3. احسب قيمة A من اجل $x=\frac{5}{3}$ ثم من اجل $x=\sqrt{3}$.

التمرين2: نعتبر العبارة الجبرية: $E=(2x+3)^2-3(2x+3)$.

1. انشر و بسط العبارة E.
2. حلل العبارة E ثم احسب قيمة E من اجل $x=-2$ ثم من اجل $x=0$.
3. حل المعادلة: $E=0$.

التمرين3: نعتبر العبارة الجبرية: $F=(x-4)(2x+1)-(x^2-16)$.

1. انشر، بسط ثم رتب العبارة F.
2. حلل العبارة F بعد ملاحظة وجود متطابقة شهيرة.
3. اختر العبارة التي تراها مناسبة لحل المعادلتين: $F=0$ و $F=12$.

التمرين4: نعتبر العبارة الجبرية: $G=(x^2-9)-2(x-3)$.

1. انشر، بسط ثم رتب العبارة G.
2. حلل العبارة G.
3. اختر العبارة التي تراها مناسبة لحساب قيمة G من اجل $x=-1$ ثم من أجل $x=0$

حل المعادلة: $(x-3)(x+1)=0$.

التمرين5: عمر أحمد حاليا هو 11 سنة بينما عمر فؤاد هو 26 سنة.
بعد كم سنة يصبح عمر فؤاد ضعف عمر أحمد ؟

وزارة التربية الوطنية. المركز الوطني لإدماج الابتكارات البيداغوجية و تنمية تكنولوجيات الإعلام و الاتصال في التربية ، فيفري 2009

أنمي كفاءاتي:

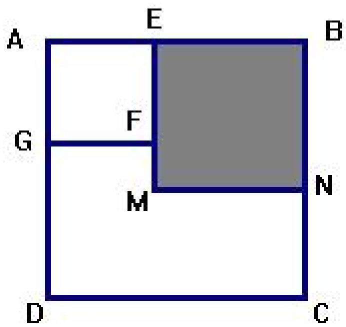
المسألة 1:

1. حلل العبارات الجبرية التالية:

$I=(x+7)^2-36$،

$J=4x^2+8x+4$

و $K=(x+13)(x+1)-4(x+1)^2$.



2. في الشكل المقابل $AEFG$ مربع حيث: $AE=x+1$،

$EBNM$ مربع طول ضلعه 6 و $DG=6$.

* عبر بواسطة x عن S مساحة الجزء غير المظلل في الشكل.

* من أجل أي قيمة لِـ x تكون المساحة S مساوية أربع مرات مساحة المربع $AEFG$؟

المسألة 2:

1. أنشر ثم بسط العبارة: $P=(x+12)(x+2)$.
2. حلل العبارة: $Q=(x+7)^2-25$.
3. x عدد موجب. ABC مثلث قائم في النقطة A بحيث: $AB=5$ و $BC=x+7$.

أثبت أن: $AC^2=x^2+14x+24$.

4. عين قيمة العدد x التي يكون من أجلها: $AC^2=15(x+2)$.

المسألة 3:

1. تحقق أن المثلث، الذي أطواله الأعداد الطبيعية المتتابعة 3، 4 و 5 مثلث قائم،
2. نريد معرفة ما إذا كانت توجد مثلثات أخرى أطوالها أعداد طبيعية متتابعة.

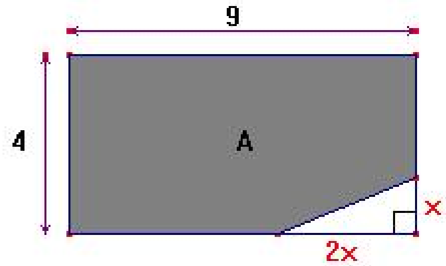
نفرض وجود مثلث يحقق ذلك و نرمز إلى طول أكبر ضلعي الزاوية القائمة بالرمز x.

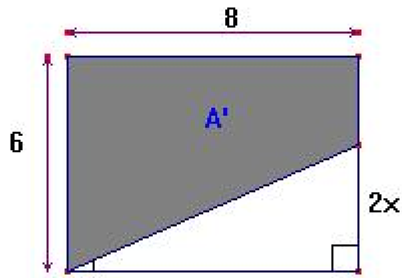
* عبر بواسطة x عن طولي كل من أصغر ضلعي الزاوية القائمة و الوتر.

* عين قيمة x. ماذا تستنتج؟

وزارة التربية الوطنية. المركز الوطني لإدماج الابتكارات البيداغوجية و تنمية تكنولوجيات الإعلام و الاتصال في التربية ، فيفري 2009

المسألة4:





1. عبر عن المساحة المظللة A بواسطة x. حلل العبارة المحصل عليها.
2. عبر عن المساحة المظللة A' بواسطة x. حلل العبارة المحصل عليها.
3. عين قيم x التي تكون من أجلها المساحتان A و A' متساويتين.

حلول التمارين و المسائل

حل التمرين 1

.1
$$A=\left(9x^2-30x+25\right)-\left(6x^2-10x-3x+5\right)$$
$$A=9x^2-30x+25-6x^2+10x+3x-5$$
$$A=3x^2-17x+20$$

.2
$$A=(3x-5)\left[(3x-5)-(2x-1)\right]$$
$$A=(3x-5)(3x-5-2x+1)$$
$$A=(3x-5)(x-4)$$

.3 * من اجل $x=\dfrac{5}{3}$ لدينا: $A=\left(3\times\dfrac{5}{3}-5\right)\left(\dfrac{5}{3}-4\right)$ و منه: $A=0$.

* من اجل $x=\sqrt{3}$ لدينا: $A=3\left(\sqrt{3}\right)^2-17\sqrt{3}+20$ و منه: $A=29-17\sqrt{3}$.

حل التمرين 2

.1 $(2x+3)^2-3(2x+3)=4x^2+12x+9-6x-9=4x^2+6x$:

و هكذا نجد أن: $E=4x^2+6x$

وزارة التربية الوطنية. المركز الوطني لإدماج الابتكارات البيداغوجية و تنمية تكنولوجيات الإعلام و الاتصال في التربية ، فيفري 2009

2. في هذه الحالة يمكن تحليل العبارة E باستعمال عامل مشترك.
لدينا: $E = 4x^2 + 6x = 2x(2x+3)$ و إذا استعملنا العبارة الأولى يكون لدينا:
$E = (2x+3)^2 - 3(2x+3) = (2x+3)(2x+3-3) = (2x+3)2x$.
و هكذا نجد أن: $E = 2x(2x+3)$

من أجل $x = -2$ لدينا: $E = 2(-2)[2(-2)+3] = 4$ أما من أجل $x = 0$ فإن: $E = 0$.
$E = 0$ يعني $2x(2x+3) = 0$ أي: $2x = 0$ أو $2x+3 = 0$ و هذا يعني أن:
$x = 0$ أو $x = -\frac{3}{2}$. حلا المعادلة $E = 0$ هما إذن: 0 و $-\frac{3}{2}$.

حل التمرين 3

.1
$F = (x-4)(2x+1) - (x^2-16) = 2x^2 + x - 8x - 4 - x^2 + 16$
و هكذا نجد أن: $F = x^2 - 7x + 12$.
2. $F = (x-4)(2x+1) - (x^2-16) = (x-4)(2x+1) - (x-4)(x+4)$
ومنه: $F = (x-4)[(2x+1)-(x+4)] = (x-4)(2x+1-x-4)$
و هكذا نجد أن: $F = (x-4)(x-3)$.
3. * لحل المعادلة $F = 0$ نختار العبارة: $F = (x-4)(x-3)$
و هكذا فإن $F = 0$ يعني $(x-4)(x-3) = 0$ أي: $x - 4 = 0$ أو $x - 3 = 0$
و هذا يعني أن: $x = 4$ أو $x = 3$.
إذن للمعادلة $F = 0$ حلان هما 3 و 4.
* لحل المعادلة $F = 12$ نختار العبارة: $F = x^2 - 7x + 12$.
و هكذا فإن $F = 12$ يعني $x^2 - 7x + 12 = 12$ أي: $x^2 - 7x = 0$
نلاحظ أن: $x^2 - 7x = x(x-7)$ و بالتالي فإن: $F = 12$ يعني $x(x-7) = 0$
أي: $x = 0$ أو $x = 7$.
إذن للمعادلة $F = 12$ حلان هما : 0 و 7.

حل التمرين 4

.1
$G = (x^2-9) - 2(x-3) = x^2 - 9 - 2x + 6 = x^2 - 2x - 3$
و هكذا نجد أن: $G = x^2 - 2x - 3$.

2. $G=(x^2-9)-2(x-3)=(x-3)(x+3)-2(x-3)=(x-3)(x+3-2)$ و هكذا نجد أن: $G=(x-3)(x+1)$.

3. *لحساب قيمة G من اجل $x=-1$ العبارة الأنسب هي: $G=(x-3)(x+1)$

فبتعويض x في العبارة بالعدد -1 نتحصل بشكل مباشر على: $G=0$.

*لحساب قيمة G من اجل $x=0$ العبارة الأنسب هي: $G=x^2-2x-3$

فبتعويض x في العبارة بالعدد 0 نتحصل بشكل مباشر على: $G=-3$.

4. $(x-3)(x+1)=0$ يعني: $x-3=0$ أو $x+1=0$ أي: $x=3$ أو $x=-1$

للمعادلة $(x-3)(x+1)=0$ حلان هما: -1 و 3.

حل التمرين 5

إذا رمزنا بالرمز x إلى عدد السنوات التي يصبح بعدها عمر فؤاد ضعف عمر احمد يكون حينئذ عمر فؤاد هو $26+x$ و يكون عمر أحمد هو $11+x$.

لدينا إذن: $2(11+x)=26+x$ و هذا يعني أن: $22+2x=26+x$

أي: $2x-x=26-22$. نجد هكذا: $x=4$. و بالتالي يصبح عمر فؤاد ضعف عمر أحمد بعد 4 سنوات. يكون عمر أحمد 15 سنة و يكون عمر فؤاد 30 سنة.

حل المسألة 1

1. $I=(x+7)^2-36=(x+7-6)(x+7+6)=(x+1)(x+13)$

$J=4x^2+8x+4=4(x^2+2x+1)=4(x+1)^2$

$K=(x+13)(x+1)-4(x+1)^2=(x+1)[(x+13)-4(x+1)]$

$K=(x+1)(x+13-4x-4)=(x+1)(9-3x)$

2. * من الواضح أن $ABCD$ مربع طول ضلعه $(x+1)+6$ أي: $x+7$ و بالتالي فمساحته هي: $(x+7)^2$. من جهة ثانية مساحة المربع المظلل هي: 36

و بالتالي يكون لدينا: $S=(x+7)^2-36$.

3 * مساحة المربع $AEFG$ هي: $S'=(x+1)^2$. لنعين x بحيث يكون: $S=4S'$

$S=4S'$ يعني $(x+7)^2-36=4(x+1)^2$ أي و بعد ملاحظة أن $S=I$:

$(x+1)(x+13)-4(x+1)^2=0$ أي: $K=0$ و هذا يعني أن:

$(x+1)(9-3x)=0$ أي: $x+1=0$ أو $9-3x=0$. نجد هكذا: $x=-1$ أو $x=3$

و بما أن x عدد موجب نأخذ هكذا $x=3$.

وزارة التربية الوطنية. المركز الوطني لإدماج الابتكارات البيداغوجية و تنمية تكنولوجيات الإعلام و الاتصال في التربية ، فيفري 2009

حل المسألة2

1. $P=(x+12)(x+2)=x^2+2x+12x+24=x^2+14x+24$.
2. $Q=(x+7)^2-25=(x+7-5)(x+7+5)=(x+2)(x+12)$.

بتطبيق مبرهنة فيتاغورس في المثلث القائم ABC يكون لدينا:
$BC^2=AB^2+AC^2$ أي: $AC^2=BC^2-AB^2$ و منه: $AC^2=(x+7)^2-25$.
نلاحظ أن: $AC^2=Q$ و أن: $Q=P$ و بالتالي: $AC^2=x^2+14x+24$.
5. بما أن: $AC^2=(x+12)(x+2)$ فإن: $AC^2=15(x+2)$ يعني أن:
$(x+12)(x+2)=15(x+2)$ أي: $(x+12)(x+2)-15(x+2)=0$
و منه: $(x+2)(x-3)=0$ أي: $x=-2$ أو $x=3$ و بما أن $x\geq 0$ فإن: $x=3$.

حل المسألة3

1. لدينا: $3^2+4^2=9+16=25$ و لدينا: $5^2=25$ و منه: $3^2+4^2=5^2$
و هكذا حسب عكس مبرهنة فيتاغورس فإن المثلث قائم.

2. * بما أن أطوال هذا المثلث هي أعداد طبيعية متتابعة و علما أن طول أكبر ضلعي الزاوية القائمة هو x فإن طول أصغر ضلعي الزاوية القائمة هو $(x-1)$ بينما طول الوتر هو $(x+1)$.
* بما أن المثلث قائم يكون لدينا حسب مبرهنة فيتاغورس:
$(x-1)^2+x^2=(x+1)^2$ أي: $x^2-2x+1+x^2=x^2+2x+1$ و بالتالي:
$x^2-2x+1+x^2-x^2-2x-1=0$ أي: $x^2-4x=0$ و هذا يعني أن:
$x(x-4)=0$ أي: $x=0$ أو $x=4$.

القيمة $x=0$ غير مناسبة لأن في هذه الحالة يكون طول أصغر ضلعي الزاوية القائمة هو $0-1=-1$ و نعلم أن الأطوال أعداد موجبة دائما. الحل الوحيد هو إذن: $x=4$ و في هذه الحالة فإن طول أصغر ضلعي الزاوية القائمة هو $4-1=3$ بينما طول الوتر هو $4+1=5$.
نستنتج أن المثلث الوحيد الذي يجيب على السؤال هو المثلث المعرف في السؤال الأول.

حل المسألة4

1. مساحة المستطيل في الشكل الثاني هي: $9\times 4=36$ و مساحة المثلث غير المظلل هي: $\frac{(2x).x}{2}=x^2$ و بالتالي فمساحة الشكل المظلل هي: $A=36-x^2$
لدينا: $A=(6-x)(6+x)$

وزارة التربية الوطنية. المركز الوطني لإدماج الابتكارات البيداغوجية و تنمية تكنولوجيات الإعلام و الاتصال في التربية ، فيفري 2009

2. مساحة المستطيل في الشكل الأول هي: $8\times 6=48$ و مساحة المثلث غير المظلل هي: $8x=\frac{8\times(2x)}{2}$ و بالتالي فمساحة الشكل المظلل هي: $A'=48-8x$

لدينا: $A'=8(6-x)$

3. $A=A'$ يعني أن:

$(6-x)(6+x)=8(6-x)$ أي $(6-x)(6+x)-8(6-x)=0$

نتحصل على: $(6-x)\left[(6+x)-8\right]=0$ أي: $(6-x)(x-2)=0$

و هذا يعني : $6-x=0$ أو $x-2=0$ أي: $x=6$ أو $x=2$.

نلاحظ من الشكل أن العدد x يجب أن يكون اصغر من 3 و إلا لكان $2x>6$

تكون المساحتان A و A' متساويتين من أجل $x=2$.

تمارين إضافية

التمرين 1: نعتبر العبارة الجبرية: $E=(2x-3)^2-(2x-3)(4x-5)$.

1. انشر ثم بسط العبارة E.
2. حلل العبارة E.
3. احسب قيمة E من اجل $x=\sqrt{5}$. تعطى النتيجة على الشكل $a+b\sqrt{5}$.
4. حل المعادلة: $E=0$.

التمرين 2: نعتبر العبارتين الجبريتين: $A=(2x-1)^2-(2x-1)(-x-3)$

و $B=2x^2-9x+4$

1. حلل العبارة A.
2. بين أن: $A=B$.
3. احسب قيمة A من اجل $x=\frac{2}{3}$. تعطى النتيجة على شكل كسر غير قابل للاختزال.
4. حل المعادلة: $(2x-1)(x-4)=0$.

وزارة التربية الوطنية. المركز الوطني لإدماج الابتكارات البيداغوجية و تنمية تكنولوجيات الإعلام و الاتصال في التربية ، فيفري 2009

4 المتراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد

أتذكر الأهم:

11. المتراجحة من الدرجة الأولى بمجهول واحد

تعريف: المتراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد هي متباينات تكتب بعد تحويلها على أحد الأشكال الآتية: $ax > b$ ، $ax \le b$ ، $ax \ge b$ حيث:
a و b عددان حقيقيان و x المجهول.

أمثلة:

* المتراجحة $2x < -1$ هي متراجحة من الدرجة الأولى بمجهول واحد.
* المتراجحة $-3x - 2 \ge 0$ هي متراجحة من الدرجة الأولى بمجهول واحد لأنه يمكن كتابتها على الشكل: $-3x \ge 2$.

12. حل متراجحة من الدرجة الأولى بمجهول واحد

* حل متراجحة يعني إيجاد كل الأعداد x التي تحقق المتباينة.
* تسمى الأعداد التي تحقق المتباينة حلول المتراجحة.

<u>مثال</u>: نعتبر المعادلة: $3x - 5 \ge x + 3$

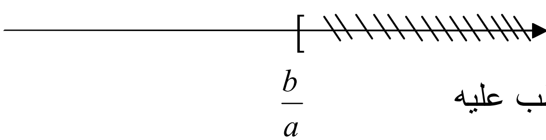
لدينا: $3x - 5 \ge x + 3$ يعني $3x - x \ge 3 + 5$ أي $2x \ge 8$ أي $x \ge \frac{8}{2}$ أي $x \ge 4$.

إذن حلول المتراجحة $3x - 5 \ge x + 3$ هي كل الأعداد الأكبر من أو تساوي 4 .

13. تمثيل مجموعة حلول متراجحة على مستقيم مدرج

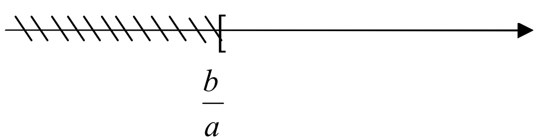
a و b عددان حقيقيان حيث $a > 0$.

* حلول المتراجحة $ax < b$ هي الأعداد x التي تحقق $x < \frac{b}{a}$ و تمثيلها على مستقيم مدرج هو كما يلي:



الحلول ممثلة في الجزء غير المشطب عليه

* حلول المتراجحة $ax \ge b$ هي الأعداد x التي تحقق $x \ge \frac{b}{a}$ و تمثيلها على مستقيم مدرج هو كما يلي:



<u>ملاحظة هامة جدا</u>: إذا كان $a < 0$ نغير اتجاه المتباينة عند القسمة على a.

أتدرب:

التمرين1: نعتبر المتراجحة التالية: $-5x+7>2x+21$

1. هل العدد 2 حل لهذه المتراجحة ؟
2. حل هذه المتراجحة ثم مثل حلولها على مستقيم مدرج.

التمرين2: حل المتراجحة التالية ثم مثل حلولها على مستقيم مدرج:

$\frac{2x+1}{3}-1\leq\frac{x-1}{2}$.

التمرين3:

1. حل المتراجحة $7x>8x-3$ ثم مثل مجموعة حلولها على مستقيم مدرج.
2. حل المتراجحة $-2x+1>-5x-2$ ثم مثل مجموعة حلولها على مستقيم مدرج.
3. مثل على مستقيم مدرج مجموعة حلول الجملة التالية:

$$\begin{cases}7x>8x-3\\-2x+1>-5x-2\end{cases}$$

أنمي كفاءاتي:

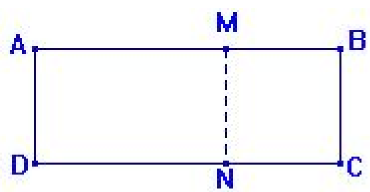
المسألة1: يقترح أحد النوادي لكراء أشرطة الفيديو على زبنائه حلين هما:

<u>الحل الأول</u>: يشارك الزبون بمبلغ $150\,DA$ و يدفع مبلغ $20\,DA$ عند كراء كل شريط.

<u>الحل الثاني</u>: لا يشارك الزبون بأي مبلغ و يدفع مبلغ $32\,DA$ عند كراء كل شريط.

انطلاقا من أي عدد للأشرطة المقتناة يكون أفضل للزبون اختيار الحل الأول.

المسألة2: يمثل المستطيل $ABCD$ قاعة يمكن تقسيمها إلى قاعتين مستطيلتين بواسطة جدار متحرك ممثل بالقطعة $[MN]$.



وزارة التربية الوطنية. المركز الوطني لإدماج الابتكارات البيداغوجية و تنمية تكنولوجيات الإعلام و الاتصال في التربية ، فيفري 2009

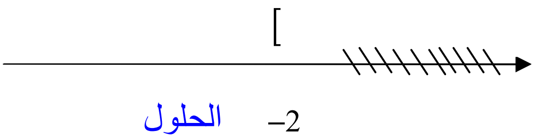
يعطى: $AB = 30m$ ، $AD = 10m$
و $MB = x\ m$.
عين قيم x التي يكون من أجلها ربع مساحة القاعة
$AMND$ أصغر من مساحة القاعة $MBCN$.

حلول التمارين و المسائل

حل التمرين 1

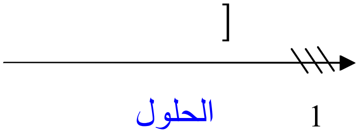
1.بتعويض العدد 2 في المتراجحة يكون لدينا: $-5\times 2+7 > 2\times 2+21$
أي: $-3 > 25$ و بما أن هذه المتباينة خاطئة فإن 2 ليس حلا للمتراجحة.

2. $-5x+7 > 2x+21$ يعني $-5x-2x > 21-7$ أي $-7x > 14$
بقسمة طرفي المتباينة على العدد (-7) و علما أن $-7 < 0$ نتحصل بعد تغيير اتجاهها على $x < -2$.
حلول المعادلة هي إذن كل الأعداد الأصغر تماما من العدد (-2) وتمثيلها على مستقيم مدرج هو كما يلي:



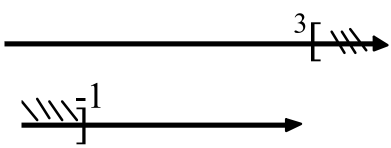
حل التمرين 2

$\frac{2x+1}{3} - 1 \leq \frac{x-1}{2}$ يعني $\frac{2x+1-3}{3} \leq \frac{x-1}{2}$ أي $\frac{2x-2}{3} \leq \frac{x-1}{2}$
و هذا يعني $2(2x-2) \leq 3(x-1)$ أي $4x-4 \leq 3x-3$
أي $4x-3x \leq -3+4$
و هذا يعني $x \leq 1$. إذن حلول المعادلة هي إذن كل الأعداد الأصغر من أو تساوي العدد 1
و تمثيلها على مستقيم مدرج هو كما يلي:



حل التمرين 3

1. $7x > 8x-3$ يعني $x < 3$ و لدينا



وزارة التربية الوطنية. المركز الوطني لإدماج الابتكارات البيداغوجية و تنمية تكنولوجيات الإعلام و الاتصال في التربية ، فيفري 2009

حل المسألة1

2. $-2x+1>-5x-2$ يعني $x>-1$ و لدينا

3. حلول الجملة $\begin{cases} 7x>8x-3 \\ -2x+1>-5x-2 \end{cases}$ هي الحلول المشتركة بين المتراجحتين $7x>8x-3$ و $-2x+1>-5x-2$ و بالتالي فحلولها هي الأعداد المحصورة بين العددين -1 و 3 و لدينا:

ليكن x عدد الأشرطة المقتناة.

<u>الحل الأول</u>: المبلغ المدفوع عند كراء x شريط فيديو هو: $150+20x$

<u>الحل الثاني</u>: المبلغ المدفوع عند كراء x شريط فيديو هو: $32x$

يكون الحل الأول أفضل من الحل الثاني إذا كان المبلغ المدفوع في الحل الأول أقل منه في الحل الثاني و يؤول ذلك إلى حل المتراجحة: $32x>150+20x$

$32x>150+20x$ يعني $32x-20x>150$ أي $x>\frac{150}{12}$ أي $x>12{,}5$.

و هكذا يكون أفضل للزبون اختيار الحل الأول انطلاقا من كراء 13 شريط فيديو.

حل المسألة2

مساحة $AMND$ هي $10(30-x)\ m^2$ بينما مساحة $MBCN$ هي $10x\ m^2$.

يكون ربع مساحة $AMND$ أصغر من مساحة $MBCN$ يعني $\frac{10(30-x)}{4}<10x$

و هذا يعني $300-10x<40x$ أي $300<50x$ و بالتالي $x>6$.

5 جمل معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين

أتذكر الأهم:

14. جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين

تعريف: نسمي جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين كل جملة من الشكل:

$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ حيث a ،b ،c ،a' ،b' ،c' أعداد حقيقية معلومة.

15. الحل الجبري لجملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين

- **طريقة الجمع**

لحل جملة باستعمال طريقة الجمع نقوم بضرب المعادلتين في أعداد مختارة بهدف جعل معاملي أحد المجهولين متعاكسين بحيث يتم التخلص منه بالجمع طرف لطرف.

مثال: لحل الجملة $\begin{cases} 4x-2y=2 & (1) \\ x+y=5 & (2) \end{cases}$ نقوم مثلا بضرب طرفي المعادلة (2) في 2

لنحصل على الجملة $\begin{cases} 4x-2y=2 & (1) \\ 2x+2y=10 & (2') \end{cases}$ و بعد جمع (1) و $(2')$ طرف لطرف

نحصل على المعادلة $6x=12$ ذات الحل $x=2$. لحساب y نعوض x بقيمته 2 في إحدى المعادلتين و لتكن (2) فنتحصل على $2+y=5$ أي $y=3$ و أخيرا نتحقق من أن $(2;3)$ حل للجملة. إذن $(2;3)$ هو الحل الوحيد للجملة.

- **طريقة التعويض**

لحل جملة باستعمال طريقة التعويض نكتب أحد المجهولين بواسطة الآخر في إحدى المعادلتين ثم نعوضه في المعادلة الأخرى بهدف الحصول على معادلة بمجهول واحد.

مثال: لحل الجملة $\begin{cases} 2x+y=-1 & (1) \\ x-y=4 & (2) \end{cases}$ نكتب مثلا x بواسطة y في (2) لنجد $x=y+4$

ثم نقوم بتعويضه في (1) لنجد $2(y+4)+y=-1$ فنحصل على $y=-3$ وبعد تعويض y بقيمته في إحدى المعادلتين نجد $x=1$.

وزارة التربية الوطنية. المركز الوطني لإدماج الابتكارات البيداغوجية و تنمية تكنولوجيات الإعلام و الاتصال في التربية ، فيفري 2009

إذن $(1;-3)$ هو الحل الوحيد للجملة.

أتدرب:

التمرين 1: حل باستعمال طريقة التعويض الجملة التالية:

$$\begin{cases} 3x - 5y = 30 & (1) \\ 2x + y = 7 & (2) \end{cases}$$

التمرين 2: أوجد عددين علما أن مجموعهما 50 و أن الفرق بين العدد الأول و ضعف العدد الثاني هو 5 .

أنمي كفاءاتي:

المسألة 1: 1. حل الجملة التالية:

$$\begin{cases} x + y = 20 & (1) \\ 7x + 4y = 104 & (2) \end{cases}$$

2. تتكون حمولة إحدى الشاحنات من 20 صندوق وزن بعضها $28kg$ و وزن البعض الآخر $16kg$. علما أن وزن حمولة الشاحنة هو $416kg$ عين عدد الصناديق التي وزنها $28kg$ و عدد الصناديق التي وزنها $16kg$.

المسألة 2:

1. حل الجملة التالية:

$$\begin{cases} 5x + 2y = 13 & (1) \\ x + 2y = 8 & (2) \end{cases}$$

2. ثمن باقة زهور متكونة من 5 زهور نرجس و زهرتي أقحوان هو $13DA$ بينما ثمن باقة متكونة من زهرة نرجس و زهرتي أقحوان هو $8DA$.
ما هو ثمن باقة زهور متكونة من 4 زهور نرجس و 3 زهور أقحوان ؟

المسألة 3: عين طول و عرض قاعة مستطيلة الشكل علما أنه إذا زاد طولها بِـ $1m$ و زاد عرضها بِـ $3m$ زادت مساحتها بِـ $25m^2$ أما إذا نقص كل من عرضها و طولها بِـ $1m$ نقصت مساحتها بِـ $9m^2$.

المسألة4: 1. حل الجملة التالية:
$$\begin{cases} x+y=360 & (1) \\ 50x+75y=21750 & (2) \end{cases}$$
2. لزيارة أحد المتاحف فإن ثمن تذكرة الدخول بالنسبة للكبار هو $75DA$ بينما ثمنها
بالنسبة للصغار هو $50DA$. علما أن في هذا اليوم كان عدد الزوار 360 زائرا و أن مداخيل المتحف قدرت بـِ $21750DA$ حدد عدد الصغار و عدد الكبار الذين قاموا بزيارة المتحف في هذا اليوم.

حلول التمارين و المسائل

حل التمرين 1

باستعمال المعادلة (2) نكتب مثلا y بواسطة x فنحصل على $y=7-2x$. لنعوض y بعبارته بواسطة x في المعادلة (1) فنحصل هكذا على: $3x-5(7-2x)=30$ أي $3x-35+10x=30$ و هذا يعني $13x=65$ أي $x=5$.
لنعوض الآن x بـِ 5 في (2) فنحصل على $2\times5+y=7$ أي $y=7-10=-3$.
إذن $(5;-3)$ هو الحل الوحيد للجملة.

حل التمرين 2

إذا رمزنا إلى العددين بـِ x و y يكون لدينا: $\begin{cases} x+y=50 & (1) \\ x-2y=5 & (2) \end{cases}$
لنستعمل مثلا طريقة الجمع لحل هذه الجملة و من أجل ذلك نقوم بضرب طرفي (1) في 2 لنحصل على الجملة $\begin{cases} 2x+2y=100 & (1') \\ x-2y=5 & (2) \end{cases}$ و بجمع $(1')$ و (2) طرفا لطرف نحصل على $3x=105$ أي $x=\frac{105}{3}=35$. للحصول على y نعوض مثلا x بـِ 35 في (1) لنحصل على $35+y=50$ أي $y=50-35=15$.
و هكذا فإن حل الجملة الوحيد هو الثنائية $(35;15)$.

حل المسألة1

1.لحل الجملة نستعمل مثلا طريقة الجمع فنقوم بضرب طرفي المعادلة (1) في (-4)

لنحصل على الجملة $\begin{cases} -4x-4y=-80 & (1') \\ 7x+4y=104 & (2) \end{cases}$ و بالجمع طرف لطرف نحصل على: $3x=24$ أي $x=8$. بالتعويض في (1) نجد $8+y=20$ أي $y=12$.

إذن $(8;12)$ هو الحل الوحيد للجملة.

2. ليكن x عدد الصناديق التي وزنها $28kg$ و y عدد الصناديق التي وزنها $16kg$.

- بما أن عدد الصناديق في الشاحنة 20 فإن $x+y=20$.
- حمولة الشاحنة هي $28x+16y$ و منه $28x+16y=416$.

نحصل هكذا على الجملة $\begin{cases} x+y=20 \\ 28x+16y=416 \end{cases}$.

بقسمة طرفي المعادلة الثانية على العدد 4 نحصل على الجملة $\begin{cases} x+y=20 \\ 7x+4y=104 \end{cases}$ المعرفة في السؤال الأول و التي حلها $(8;12)$.

إذن عدد الصناديق التي وزنها $28kg$ هو 8 بينما عدد الصناديق التي وزنها $16kg$ هو 12.

حل المسألة2

1.لحل الجملة نستعمل مثلا طريقة الجمع فنقوم بضرب طرفي المعادلة (2) في (-1)

لنحصل على الجملة $\begin{cases} 5x+2y=13 & (1) \\ -x-2y=-8 & (2') \end{cases}$ و بالجمع طرف لطرف نحصل على: $4x=4$ أي $x=1$. بالتعويض في (1) نجد $5+2y=13$ أي $2y=8$ و منه $y=4$.

إذن $(1;4)$ هو الحل الوحيد للجملة.

2. ليكن x ثمن زهرة نرجس و y ثمن زهرة أقحوان.

*ثمن باقة زهور متكونة من 5 زهور نرجس و زهرتي أقحوان هو $5x+2y$.

* ثمن باقة متكونة من زهرة نرجس و زهرتي أقحوان هو $x+2y$.

و هكذا يكون لدينا: $\begin{cases} 5x+2y=13 \\ x+2y=8 \end{cases}$ و بما أن حل هذه الجملة هو $(1;4)$ فإن:

وزارة التربية الوطنية. المركز الوطني لإدماج الابتكارات البيداغوجية و تنمية تكنولوجيات الإعلام و الاتصال في التربية ، فيفري 2009

ثمن زهرة نرجس هو $1DA$ و ثمن زهرة أقحوان هو $4DA$. و بالتالي فثمن باقة زهور متكونة من 4 زهور نرجس و 3 زهور أقحوان هو $(4\times1+3\times4)DA$ أي $16DA$.

حل المسألة3

ليكن x طول القاعة و y عرضها و منه فمساحتها هي xy.
إذا زاد طولها بِـ $1m$ و زاد عرضها بِـ $3m$ تصبح مساحتها $(x+1)(y+3)$
أما إذا نقص كل من عرضها و طولها بِـ $1m$ تصبح مساحتها $(x-1)(y-1)$

يكون هكذا لدينا: $\begin{cases}(x+1)(y+3)=xy+25 & (1)\\(x-1)(y-1)=xy-9 & (2)\end{cases}$ و هذا يعني:

$\begin{cases}3x+y+3+xy=xy+25 & (1)\\-x-y+1+xy=xy-9 & (2)\end{cases}$ أي $\begin{cases}3x+y=22 & (1')\\x+y=10 & (2')\end{cases}$

لحل هذه الجملة نستعمل مثلا طريقة التعويض فنحصل هكذا من $(2')$ على $y=10-x$
و بعد التعويض في $(1')$ نحصل على $3x+10-x=22$ أي $2x=12$ و بالتالي $x=6$
و منه $y=4$ بعد التعويض في إحدى المعادلات.
و هكذا فإن طول القاعة هو $6m$ و عرضها هو $4m$.

حل المسألة4

1. لحل الجملة $\begin{cases}x+y=360 & (1)\\50x+75y=21750 & (2)\end{cases}$ نستعمل مثلا طريقة الجمع فنقوم

بضرب طرفي المعادلة (1) في 75 لنحصل على الجملة $\begin{cases}75x+75y=27000\\50x+75y=21750\end{cases}$

و بالطرح طرف لطرف نحصل على: $25x=5250$ أي $x=210$. بالتعويض في (1) نجد $210+y=360$ أي $y=150$.

إذن $(210;150)$ هو الحل الوحيد للجملة.

2. ليكن x عدد الصغار و y عدد الكبار الذين زاروا المتحف في هذا اليوم.
   * عدد الزوار في هذا اليوم هو $x+y$.
   * مداخيل المتحف في هذا اليوم هي $50x+75y$.

وزارة التربية الوطنية. المركز الوطني لإدماج الابتكارات البيداغوجية و تنمية تكنولوجيات الإعلام و الاتصال في التربية ، فيفري 2009

و هكذا يكون لدينا: $\begin{cases} x + y = 360 \\ 50x + 75y = 21750 \end{cases}$

بما أن الحل الوحيد لهذه الجملة حسب السؤال الأول هو $(210;150)$ فإن:

- عدد الصغار الذين زاروا المتحف في هذا اليوم هو 210.
- عدد الكبار الذين زاروا المتحف في هذا اليوم هو 160.

حل المسألة5

إذا رمزنا إلى مساحة المربع بـِ A و إلى مساحة المستطيل بـِ A' يكون لدينا:

$\begin{cases} A + A' = 850 \\ \dfrac{A}{A'} = \dfrac{3}{7} \end{cases}$ أي $\begin{cases} A + A' = 850 \\ 7A - 3A' = 0 \end{cases}$.نجد بعد الحل: $A = 255\,m^2$

و $A' = 595\,m^2$.

تمرين إضافي

التمرين:

انطلق أحد الراجلين من مدينة A نحو مدينة B على الساعة 8 بسرعة متوسطة قدرها $5\ km/h$ في حين انطلق دراج على الساعة 10 من نفس المدينة A

نحو B بسرعة متوسطة قدرها $28\ km/h$.

على بعد أي مسافة من المدينة A يلتحق الدراج بالراجل و في أي ساعة ؟

وزارة التربية الوطنية. المركز الوطني لإدماج الابتكارات البيداغوجية و تنمية تكنولوجيات الإعلام و الاتصال في التربية ، فيفري 2009

6 الدالة الخطية – الدالة التآلفية

أتذكر الأهم:

16. الدالة الخطية

تعريف: a عدد معطى. نعرف دالة خطية f لما نرفق بكل عدد x العدد ax و نرمز: $f: x \mapsto ax$. العدد ax هو صورة العدد x بـِ f و نكتب: $f(x) = ax$.
يسمى العدد a معامل الدالة الخطية f.

التمثيل البياني لدالة خطية: التمثيل البياني للدالة الخطية $f: x \mapsto ax$ هو المستقيم الذي يمر من المبدأ و الذي معادلته: $y = ax$. a هو معامل توجيه المستقيم.

مثال: الدالة $f: x \mapsto 3x$ هي الدالة الخطية ذات المعامل 3 و تمثيلها البياني هو المستقيم ذو المعادلة $y = 3x$. 3 هو معامل توجيه المستقيم.

17. الدالة التآلفية

تعريف: a وb عددان معلومان. نعرف دالة تآلفية f لما نرفق بكل عدد x العدد $ax + b$. و نرمز: $f: x \mapsto ax + b$. العدد $ax + b$ هو صورة العدد x بـِ f و نكتب: $f(x) = ax + b$. يسمى العدد a معامل الدالة التآلفية f.

التمثيل البياني لدالة تآلفية: التمثيل البياني للدالة التآلفية $f: x \mapsto ax + b$ هو المستقيم الذي معادلته: $y = ax + b$. يسمى العدد a معامل توجيه المستقيم و يسمى b الترتيب عند المبدأ.

مثال: الدالة $f: x \mapsto -2x + 1$ هي الدالة التآلفية ذات المعامل -2 و تمثيلها البياني هو المستقيم ذو المعادلة $y = -2x + 1$. -2 هو معامل توجيه المستقيم.

18. النسب المئوية

* أخذ $t\%$ من x هو حساب $\frac{t}{100}x$. الدالة الخطية المرفقة هي الدالة: $x \mapsto \frac{t}{100}x$.

وزارة التربية الوطنية. المركز الوطني لإدماج الابتكارات البيداغوجية و تنمية تكنولوجيات الإعلام و الاتصال في التربية ، فيفري 2009

*زيادة x بـِ $t\%$ هو حساب $\left(1+\frac{t}{100}\right)x$. الدالة الخطية المرفقة هي الدالة:

$x \mapsto \left(1+\frac{t}{100}\right)x$.

*خفض x بـِ $t\%$ هو حساب $\left(1-\frac{t}{100}\right)x$. الدالة الخطية المرفقة هي الدالة:

$x \mapsto \left(1-\frac{t}{100}\right)x$

تمارين ومسائل

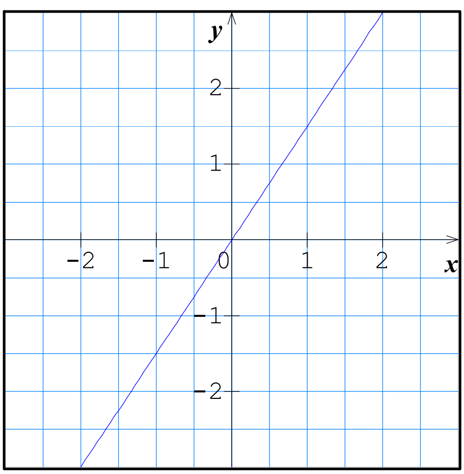
أتدرب:

التمرين 1: نعتبر الدالة الخطية: $f : x \mapsto 2x$.

1. عين صورة العدد (-3).
2. عين العدد الذي صورته 1.

التمرين 2: عين معامل الدالة الخطية f التي تحقق $f(2) = -5$ ثم مثلها بيانيا.

التمرين 3: التمثيل البياني المقابل هو لدالة خطية f.



أجب عن الأسئلة التالية باستعمال التمثيل البياني.

1. عين صورة العدد -1.
2. عين العدد الذي صورته $\frac{3}{2}$.
3. أكمل الجدول التالي:

x	-2		1	
$f(x)$		-1		3

وزارة التربية الوطنية. المركز الوطني لإدماج الابتكارات البيداغوجية و تنمية تكنولوجيات الإعلام و الاتصال في التربية ، فيفري 2009

أحسب a معامل الدالة الخطية.

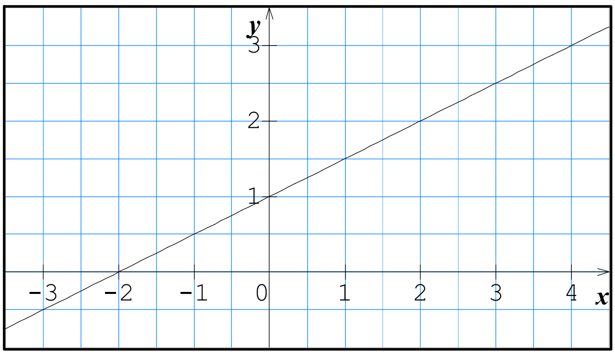
التمرين4: نعتبر الدالة التآلفية: $g : x \mapsto -2x + 5$.

1. عين صورة العدد 2 .ثم عين العدد الذي صورته -2 .
2. ارسم التمثيل البياني للدالة g .

التمرين5: لتكن f الدالة التآلفية التي تحقق: $f(-1) = -5$ و $f(2) = 4$.

عين عبارة الدالة التآلفية f.

التمرين6: التمثيل البياني المقابل هو لدالة تآلفية f. أجب عن الأسئلة التالية باستعمال التمثيل البياني.



1. عين صورة كل من -3 و 2
2. عين العدد الذي صورته $\frac{5}{2}$.
3. أحسب a معامل الدالة f.

أعط العبارة الجبرية لـِ f.

التمرين7: لتكن f الدالة التآلفية التي تحقق: $f(1) = 1$ و $f(2) = 5$.

عين عبارة الدالة التآلفية f.

التمرين8: نعتبر الدالتين f و g حيث $f : x \mapsto -3x + 2$ و $g : x \mapsto 2x - 3$.

1. أرسم في معلم متعامد و متجانس المستقيمين (D) و (D') الممثلين للدالتين f و g على الترتيب.
2. حل بيانيا الجملة التالية: $\begin{cases} 3x + y = 2 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$.

التمرين9:

رفع تاجر ثمن سلعه بنسبة 9%. ثمن سلعة $x\ DA$ ليصبح ثمنها بعد الزيادة $y\ DA$.

1. عبر عن y بدلالة x.
2. ثمن جهاز A قبل الزيادة هو $217\,DA$. ما هو ثمنه بعد الزيادة ؟
3. ثمن جهاز B بعد الزيادة هو $545\,DA$. ما هو ثمنه قبل الزيادة ؟

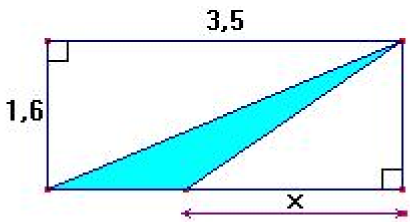
التمرين10

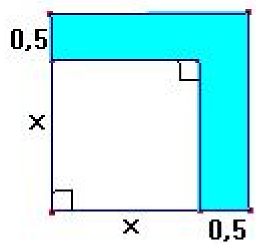
خفض تاجر ثمن إحدى سلعه المقدر بـِ $390\,DA$ مرتين متتاليتين الأولى بنسبة 10% و الثانية بنسبة 15%.

1. ما هو الثمن النهائي لهذه السلعة ؟
2. ما هي نسبة التخفيض الإجمالية ؟ ما هو رأيك ؟

التمرين11

في كل حالة من الحالات التالية عبر عن $A(x)$ مساحة الجزء المظلل بدلالة x.





أنمي كفاءاتي:

المسألة1:

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;I,J)$.

1. نعتبر الدالتين f و g حيث $f: x \mapsto \frac{3}{2}x + \frac{9}{2}$

و $g: x \mapsto -3x + 9$.

أ- أحسب $f(0)$ ، $g(0)$ ، $f(2)$ ، $g(2)$.

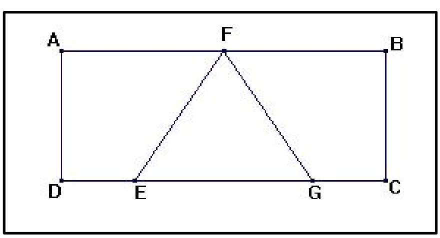
ب- عين العدد الذي صورته 5 بالدالة g.

ت- أرسم التمثيلين البيانيين (d_1) و (d_2) للدالتين f و g على الترتيب.

2. $ABCD$ مستطيل حيث: $AB = 6cm$ ، $AD = 3cm$ ، F منتصف $[AB]$.

E و G نقطتان من $[DC]$ حيث: $DE = CG$.

نضع $DE = x$.



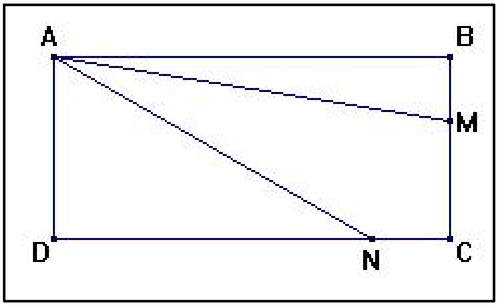
أ- علما أن النقط D ، E ، G ، C تحافظ على هذا الترتيب حدد بين أي قيم يتغير x.

ب- أحسب بدلالة x المساحات $A(x)$ ، $B(x)$ و $C(x)$ للمضلعات EFG ، $AFED$ و $FBCG$ على الترتيب.

ت- عين بيانيا باستعمال السؤال الأول قيمة x التي ينقسم من أجلها المستطيل $ABCD$ إلى 3 أجزاء لها نفس المساحة.

ث- تحقق من صحة النتيجة بالحساب.

المسألة2:



$ABCD$ مستطيل حيث:

$AB = 6cm$ ، $AD = 4cm$.

M نقطة من $[BC]$ و N نقطة من $[CD]$ حيث: $BM = CN = x$. أنظر الشكل المقابل

1. عبر بدلالة x عن $A(x)$ مساحة المثلث ABM.
2. أحسب DN بدلالة x ثم بين أن مساحة المثلث ADN هي $B(X) = -2x + 12$.
3. نعتبر الدالتين التآلفيتين $f : x \mapsto 3x$ و $g : x \mapsto -2x + 12$
   - أرسم التمثيلين البيانيين (d_1) و (d_2) للدالتين f و g على الترتيب.
   - عين إحداثيات نقطة تقاطع (d_1) و (d_2).
   - عين قيمة x التي يكون من أجلها $A(x) = B(x)$. برر الإجابة ثم

أحسب من أجل القيمة المحصل عليها مساحة الرباعي $AMCN$.

حلول التمارين و المسائل

حل التمرين1

1. لدينا $f(-3) = 2(-3) = -6$. إذن صورة العدد (-3) هي العدد (-6).
2. العدد الذي صورته 1 هو العدد x الذي يحقق $2x = 1$ أي $x = 0,5$.

حل التمرين2

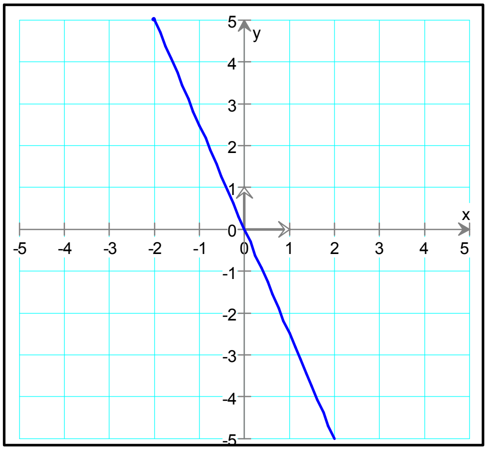
بما أن f دالة خطية فإن $f : x \mapsto ax$
أو بصيغة أخرى $f(x) = ax$.

وزارة التربية الوطنية. المركز الوطني لإدماج الابتكارات البيداغوجية و تنمية تكنولوجيات الإعلام و الاتصال في التربية ، فيفري 2009

$f(2)=-5$ يعني $2\times a=-5$ أي $a=-\frac{5}{2}$

ومنه معامل الدالة الخطية f هو $-\frac{5}{2}$.

لرسم المستقيم الممثل للدالة الخطية f يكفي، إضافة إلى المبدأ، رسم نقطة ثانية و هي مثلا النقطة $(2;-5)$ لأن $f(2)=-5$.



حل التمرين3

1. صورة العدد -1 هو العدد $-\frac{3}{2}$. لدينا هكذا $f(-1)=-\frac{3}{2}$.

2. العدد الذي صورته $\frac{3}{2}$ هو العدد 1. لدينا هكذا $f(1)=\frac{3}{2}$.

3. $f(-2)=-3$ ، $f(2)=3$

x	-2	-1	1	2
$f(x)$	-3	$-1,5$	$1,5$	3

4. معامل الدالة الخطية f هو معامل التناسبية و لدينا مثلا:

$a=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}$ أي $a=\frac{3-1,5}{1}$ و هكذا نجد أن $a=1,5$.

حل التمرين4

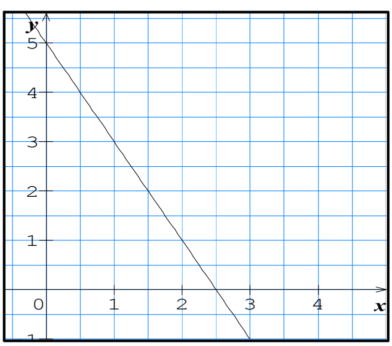
1. $g(2)=-2(2)+5$

2. و منه $g(2)=1$.

إذن صورة 2 هي 1. العدد الذي صورته -2 هو العدد x الذي يحقق $g(x)=-2$ أي

$-2x+5=-2$ و هذا يعني $-2x=-7$

أي $x=\frac{7}{2}$.



وزارة التربية الوطنية. المركز الوطني لإدماج الابتكارات البيداغوجية و تنمية تكنولوجيات الإعلام و الاتصال في التربية ، فيفري 2009

3. انظر الرسم المقابل.

حل التمرين5

بما أن f دالة تآلفية فإن $f(x)=ax+b$. نعلم أن معامل توجيهها هو نفسه معامل التناسبية و هكذا يكون لدينا: $a=\dfrac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}$ و منه

$$a=\frac{4-(-5)}{3}=\frac{9}{3}$$

إذن $a=3$. $f(2)=4$ يعني $3(2)+b=4$ أي $b=4-6$ ومنه $b=-2$.

نجد هكذا أن العبارة الجبرية للدالة التآلفية f هي: $f(x)=3x-2$.

حل التمرين6

1. نقرا من التمثيل البياني أن: $f(-3)=-\dfrac{1}{2}$ و أن $f(2)=2$.

2. نقرأ من التمثيل البياني أن العدد الذي صورته $\dfrac{5}{2}$ هو 3.

3. لدينا مثلا: $f(-2)=0$ و $f(0)=1$ و منه: $a=\dfrac{f(0)-f(-2)}{0-(-2)}$ أي $a=\dfrac{1-0}{2}$

و بالتالي $a=\dfrac{1}{2}$. معامل توجيه الدالة f هو $\dfrac{1}{2}$.

4. نعلم أن b هو الترتيب عند المبدأ و بما أن $f(0)=1$ فإن $b=1$.

العبارة الجبرية للدالة f هي إذن: $f(x)=\dfrac{1}{2}x+1$.

حل التمرين7

بما أن f دالة تآلفية فإن $f(x)=ax+b$.

لدينا $\begin{cases} f(1)=1 \\ f(2)=5 \end{cases}$ يعني $\begin{cases} a+b=1 \\ 2a+b=5 \end{cases}$ نحصل هكذا على جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين a و b و لنستعمل مثلا طريقة الجمع لحلها و من أجل ذلك نقوم بضرب طرفي المعادلة الأولى في (-1) لنحصل على $\begin{cases} -a-b=-1 \\ 2a+b=5 \end{cases}$

بالجمع طرف لطرف نجد: $a=4$ ثم بالتعويض مثلا في العادلة الأولى نحصل على $4+b=1$ أي $b=-3$.

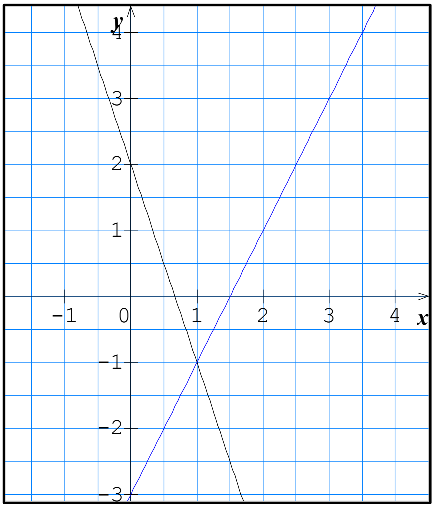
العبارة الجبرية للدالة f هي إذن: $f(x)=4x-3$.

وزارة التربية الوطنية. المركز الوطني لإدماج الابتكارات البيداغوجية و تنمية تكنولوجيات الإعلام و الاتصال في التربية ، فيفري 2009

حل التمرين 8

1. يكفي تعيين نقطتين لرسم المستقيم (D)

لدينا مثلا $f(0)=2$ و $f(0,5)=0,5$ و منه يمر المستقيم (D) من النقطتين $(0;2)$ و $(-0,5;0,5)$.



نفس الشيء بالنسبة للمستقيم (D') فهو مثلا يمر من النقطتين $(0;-3)$ و $(2;1)$ لأن $g(0)=-3$ و $g(2)=1$.

2. نلاحظ ان الجملة المقترحة يمكن كتابتها على الشكل التالي: $\begin{cases} y=-3x+2 \\ y=2x-3 \end{cases}$ و بالتالي فإن حل هذه الجملة هي إحداثيات نقطة تقاطع المستقيمين (D) و (D').

نقرأ من التمثيلين البيانيين أن المستقيمين (D) و (D') يتقاطعان في النقطة $(1;-1)$.

الحل الوحيد للجملة هو إذن $(1;-1)$.

حل التمرين 9

1. بما أن نسبة الزيادة هي 9% فإن الزيادة هي $\frac{9}{100}x$ و هكذا يكون

لدينا: $y=x+\frac{9}{100}x$

$y=x+0,09x$

و بالتالي: $y=1,09x$

2. في هذه الحالة لدينا $x=217$ و منه $y=1,09\times 217$ أي $y=236,53$.

و بالتالي ثمن الجهاز A بعد الزيادة هو $236,53\,DA$.

3. في هذه الحالة لدينا $y=545$ و منه $545=1,09x$ أي $x=\frac{545}{1,09}=500$

و بالتالي ثمن الجهاز B قبل الزيادة هو $500\,DA$.

حل التمرين 10

1. إذا رمزنا إلى ثمن السلعة بعد لتخفيض الأول بـ P_1 و إلى ثمنها بعد التخفيض الثاني بـ P_2. بما أن نسبة التخفيض في المرة الأولى هي 10%

يكون لدينا: $P_1=\left(1-\frac{10}{100}\right)390$ أي $P_1=0,9\times 390$ و منه $P_1=351DA$.

و بما أن نسبة التخفيض في المرة الثانية هي 15% يكون لدينا: $P_2=\left(1-\frac{15}{100}\right)P_1$

و هذا يعني $P_2=0,85\times 351$. و بالتالي: $298,35DA$.

2. إذا رمزنا إلى نسبة التخفيض الإجمالية بالرمز x يكون لدينا:

$298,35=\left(1-\frac{x}{10}\right)390$ أي $\frac{298,35}{390}=1-\frac{x}{100}$ و بالتالي $1-\frac{298,35}{390}=\frac{x}{100}$

أي $x=100\left(1-\frac{298,35}{390}\right)$ و منه $x=23,5$.

إذن نسبة التخفيض الإجمالية هي $23,5\%$.

نلاحظ أن $23,5\%\neq 10\%+15\%$.

حل التمرين 11

- بالنسبة للشكل الأول لدينا:

$$A(x)=(x+0,5)^2-x^2$$
$$A(x)=x^2+x+0,25-x^2$$
$$A(x)=x+0.25$$

- بالنسبة للشكل الثاني لدينا:

$$A(x)=\frac{1,6\times 3,6}{2}-\frac{1,6\times x}{2}$$
$$A(x)=0,8\times 3,6-0,8\times x$$
$$A(x)=-0,8x+2,88$$

حل المسألة 1

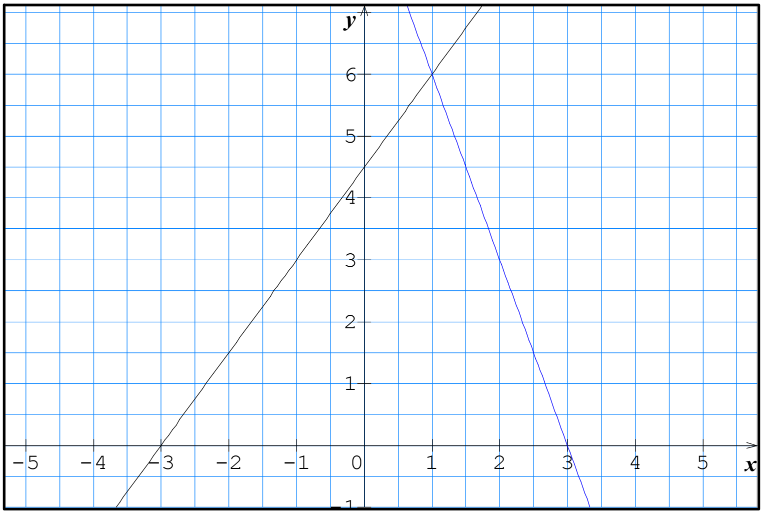
1. $f:x\mapsto \frac{3}{2}x+\frac{9}{2}$ و $g:x\mapsto -3x+9$

أ- $f(0)=\frac{9}{2}$ ، $g(0)=9$ ، $f(2)=\frac{15}{2}$ ، $g(2)=3$.

ب- $g(x)=5$ يعني $-3x+9=5$. نجد $x=\frac{4}{3}$.

وزارة التربية الوطنية. المركز الوطني لإدماج الابتكارات البيداغوجية و تنمية تكنولوجيات الإعلام و الاتصال في التربية ، فيفري 2009

ت-



2. علما أن النقط D ، E ، G ، C تحافظ على هذا الترتيب يكون لدينا:

أ- العدد x يتغير بين القيمتين 0 و 3 أي $0 \leq x \leq 3$.

ب- لدينا: $A(x) = \dfrac{3\times(6-2x)}{2}$ أي $A(x) = -3x + 9$ و لدينا:

$B(x) = \dfrac{(3+x)\times 3}{2}$ أي $B(x) = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{9}{2}$. و نلاحظ أن $C(x) = B(x)$.

ت- نلاحظ أن $A(x) = g(x)$ و أن $C(x) = B(x) = f(x)$ و بالتالي يكون لدينا $A(x) = B(x) = C(x)$ من أجل $x = 1$ فاصلة نقطة تقاطع (d_1) و (d_2).

ث- بالنسبة للتحقق نقترح طريقتين:

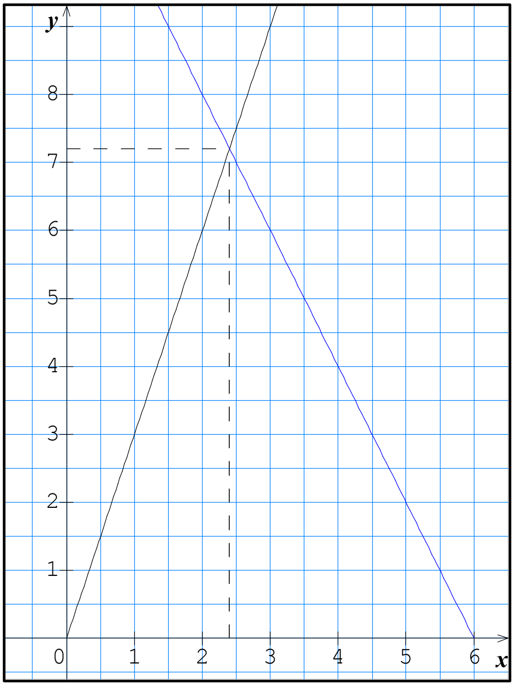
* الطريقة الأولى: $C(x) = B(x) = f(x)$ يعني $-3x + 9 = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{9}{2}$ أي $-6x + 18 = 3x + 9$ و هكذا نجد $-9x = -9$ أي $x = 1$.

* الطريقة الثانية: مساحة المستطيل هي $6\times 3 = 18$ و بالتالي فإن ثلثها هو 6 و هكذا يكون لدينا: $-3x + 9 = 6$ أي $-3x = -3$ و منه $x = 1$.

وزارة التربية الوطنية. المركز الوطني لإدماج الابتكارات البيداغوجية و تنمية تكنولوجيات الإعلام و الاتصال في التربية ، فيفري 2009

حل المسألة 2

1. $A(x)=\dfrac{6\times x}{2}$ و منه $A(x)=3x$



2. النقط D، N و C في استقامية

و منه:

$DN=DC-NC$ أي $DN=6-x$

و منه

$B(x)=\dfrac{4\times(6-x)}{2}$ أي

$B(x)=12-2x$

3. • أنظر الشكل المقابل

• الفاصلة x لنقطة التقاطع تحقق

$f(x)=g(x)$ أي $3x=-2x+12$

و منه $x=\dfrac{12}{5}$ ثم بالتعويض مثلا في $f(x)$

نجد أن ترتيب نقطة التقاطع هي $y=\dfrac{36}{5}$

إذن نقطة التقاطع هي $\left(\dfrac{12}{5};\dfrac{36}{5}\right)$.

• $A(x)=B(x)$ يعني $f(x)=g(x)$ أي $x=\dfrac{12}{5}$.

لتكن $C(x)$ مساحة الرباعي $AMCN$. لدينا: $C(x)=24-(3x)-(-2x+12)$

نجد $C(x)=-x+12$ و من أجل $x=\dfrac{12}{5}$ يكون لدينا $C(x)=\dfrac{48}{5}=9,6cm^2$.

وزارة التربية الوطنية. المركز الوطني لإدماج الابتكارات البيداغوجية و تنمية تكنولوجيات الإعلام و الاتصال في التربية ، فيفري 2009

7 الإحـــصـــاء

أتذكر الأهم:

19. التكرار المجمع المتزايد(الصاعد) - التكرار المجمع المتناقص(النازل)

تعريف: - التكرار المجمع المتزايد لقيمة أو لفئة هو مجموع تكرار هذه القيمة أو الفئة و تكرارات القيم أو الفئات الأصغر منها.

- التكرار المجمع النازل لقيمة أو لفئة هو مجموع تكرار هذه القيمة أو الفئة و تكرارات القيم أو الفئات الأكبر منها.

مثال: تمثل السلسلة الإحصائية الآتية علامات 20 تلميذ في فرض لمادة الرياضيات

13	12	11	10	9	8	العلامات
1	3	5	2	6	3	التكرارات
20	19	16	11	9	3	التكرارات المجمعة المتزايدة
1	4	9	11	17	20	التكرارات المجمعة المتناقصة

20. الوسط الحسابي لسلسلة إحصائية

تعريف: - الوسط الحسابي لسلسلة إحصائية هو حاصل قسمة مجموع قيم هذه السلسلة على التكرار الكلي (عدد قيمها). و غالبا ما نرمز إليه بالرمز $\overline{x}$.

- الوسط الحسابي المتوازن لسلسلة إحصائية مرفقة بتكراراتها هو حاصل قسمة جداءات قيمها بتكراراتها على مجموع التكرارات.

- الوسط الحسابي لسلسلة إحصائية مجمعة في فئات هو حاصل قسمة مجموع جداءات مراكز الفئات بتكراراتها على مجموع التكرارات.

مثال: تمثل السلسلة الإحصائية الآتية علامات 20 تلميذ في فرض لمادة الرياضيات

13	12	11	10	9	8	العلامات
1	3	5	2	6	3	التكرارات

$$\overline{x}=\frac{3\times 8+6\times 9+2\times 10+5\times 11+3\times 12+1\times 13}{3+6+2+5+3+1}=\frac{202}{201}=10{,}10$$

21. الوسيط

تعريف: وسيط سلسلة إحصائية مرتبة هو قيمة المتغير التي تقسم السلسلة إلى جزأين لهما نفس التكرار. و غالبا ما نرمز إليه بالرمز Me.

- إذا كان التكرار الكلي للسلسلة فرديا فوسيطها هو القيمة المركزية.
- إذا كان التكرار الكلي للسلسلة زوجيا فوسيطها هو وسط القيمتين المركزيتين.

مثال:

- وسيط السلسلة: 2، 3، 3، 5، 6، 6، 6 هو 5 لأن التكرار الكلي فردي (7).

وزارة التربية الوطنية. المركز الوطني لإدماج الابتكارات البيداغوجية و تنمية تكنولوجيات الإعلام و الاتصال في التربية ، فيفري 2009

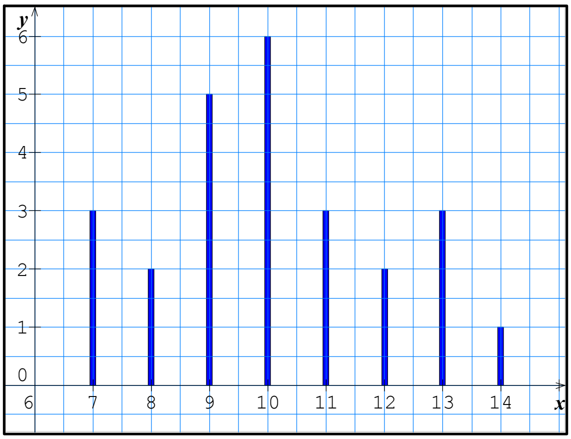
- وسيط السلسلة: 3 ، 3 ، 5 ، 6 ، 6 ، 6 ، 7 هو $5,5 = \frac{5+6}{2}$ لأن التكرار الكلي زوجي (8)

مسائل

أنمي كفاءاتي:

المسألة 1:

المخطط بالأعمدة المقابل يمثل توزيع علامات تلاميذ إحدى أقسام السنة الرابعة متوسط في فرض الرياضيات.



1. كم عدد تلاميذ هذا القسم ؟
2. أعط جدول التكرارات المجمعة.
3. ما هو عدد التلاميذ الذين تحصلوا على نقاط تفوق أو تساوي 9 ؟
4. ما هو معدل القسم في الفرض ؟
5. ما هي النقطة الوسيطة ؟

المسألة 2: علامات الرياضيات المحصل عليها من قبل 150 تلميذ إحدى الإكماليات في الامتحان التجريبي لشهادة التعليم المتوسط هي موزعة في الجدول الموالي:

العلامات n	$0 \le n < 4$	$4 \le n < 8$	$8 \le n < 12$	$12 \le n < 16$	$16 \le n < 20$
عدد التلاميذ	14	x	55	20	9

1. احسب العدد x ثم ارسم المدرج التكراري لهذه السلسلة.
2. بعد تعيين مراكز الفئات أحسب الوسط الحسابي لهذه السلسلة.
3. عين الفئة التي ينتمي إليها الوسيط.
4. ما هو عدد التلاميذ الذين تحصلوا على علامة أقل من 12 ؟
5. ما هي نسبة التلاميذ الذين تحصلوا على الأقل على 12 ؟

وزارة التربية الوطنية. المركز الوطني لإدماج الابتكارات البيداغوجية و تنمية تكنولوجيات الإعلام و الاتصال في التربية ، فيفري 2009

حلول المسائل

حل المسألة: 1

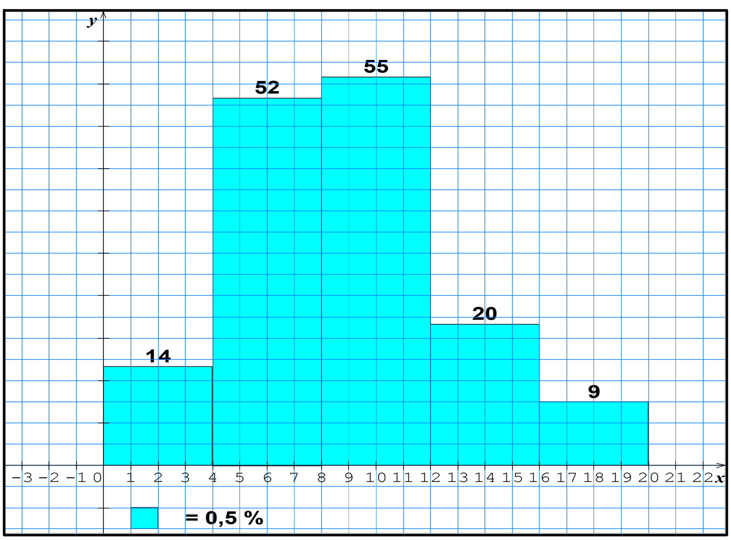
1. عدد تلاميذ القسم هو 25 .
2.

العلامات	7	8	9	10	11	12	13	14
التكرارات	3	2	5	6	3	2	3	1
التكرارات المجمعة المتزايدة	3	5	10	16	19	21	24	25
التكرارات المجمعة المتناقصة	25	22	20	15	9	6	4	1

3. عدد التلاميذ الذين تحصلوا على نقاط تفوق أو تساوي 9 هو 20 .
4. $\overline{x} = \dfrac{3\times 7+2\times 8+5\times 9+6\times 10+3\times 11+2\times 10+3\times 13+1\times 14}{3+2+5+6+3+2+3+1} = 10,08$ معدل القسم هو إذن $10,08$.
5. النقطة الوسيطة هي 12 .

حل المسألة: 2

1. لدينا: $14+x+55+20+9=155$ و منه $x=52$.



وزارة التربية الوطنية. المركز الوطني لإدماج الابتكارات البيداغوجية و تنمية تكنولوجيات الإعلام و الاتصال في التربية ، فيفري 2009

.2

العلامات n	$0 \le n < 4$	$4 \le n < 8$	$8 \le n < 12$	$12 \le n < 16$	$16 \le n < 20$
مركز الفئة	2	6	10	14	18
عدد التلاميذ	14	52	55	20	9

$\bar{x} = \frac{2\times14+6\times52+10\times55+14\times20+18\times9}{150} = \frac{1332}{150}$ ومنه $\bar{x} = 8,88$

3. القيمة الوسيطة هي القيمة الموافقة للعلامة المحصورة بين 75 و 76 و اللذان ينتميان إلى الفئة $8 \le n < 12$ و هي الفئة الوسيطة.

4. عدد التلاميذ الذين تحصلوا على علامة أقل من 12 هو 121.

5. التلاميذ الذين تحصلوا على الأقل على 12 هم التلاميذ الذين تتراوح علاماتهم بين 12 و 20 و هكذا عددهم هو 29 لأن $150-121=29$. و بالتالي فإن نسبة التلاميذ الذين تحصلوا على الأقل على 12 هي: $\frac{29}{150}\times100$ أي 19,34.

نصيحة

لا تؤجل عمل اليوم إلى غد.

وزارة التربية الوطنية. المركز الوطني لإدماج الابتكارات البيداغوجية و تنمية تكنولوجيات الإعلام و الاتصال في التربية ، فيفري 2009

8 خــاصــيــة طــالــس

أتذكر الأهم:

22. مبرهنة طالس

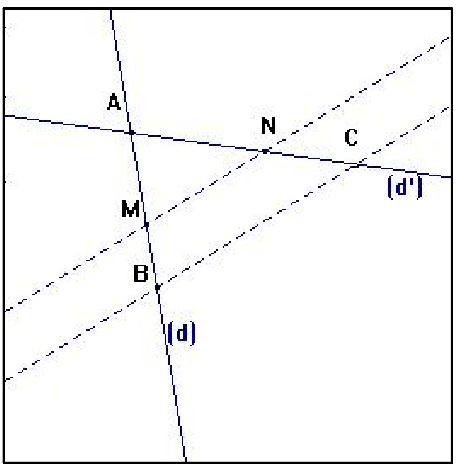
نص المبرهنة: (d) و (d') مستقيمان متقاطعان في النقطة A.

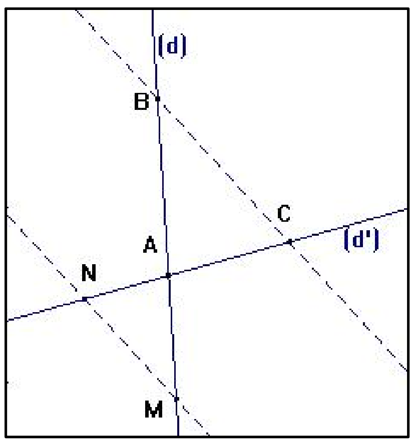
B و M نقطتان من (d) تختلفان عن A. C و N نقطتان من (d') تختلفان عن A.

إذا كان المستقيمان (BC) و (MN) متوازيين فإن $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$.

ملاحظة:

- تسمح مبرهنة طالس من حساب طول بمعرفة الأطوال الثلاثة الأخرى .
- تسمح مبرهنة طالس من إثبات أن مستقيمين غير متوازيان بحيث أنه في شروط مبرهنة طالس إذا كان $\frac{AM}{AB}\neq\frac{AN}{AC}$ يكون المستقيمان (BC) و (MN) غير متوازيين.





23. المبرهنة العكسية لمبرهنة طالس

نص المبرهنة: (d) و (d') مستقيمان متقاطعان في النقطة A.

وزارة التربية الوطنية. المركز الوطني لإدماج الابتكارات البيداغوجية و تنمية تكنولوجيات الإعلام و الاتصال في التربية ، فيفري 2009

B و M نقطتان من (d) تختلفان عن A. C و N نقطتان من (d') تختلفان عن A.

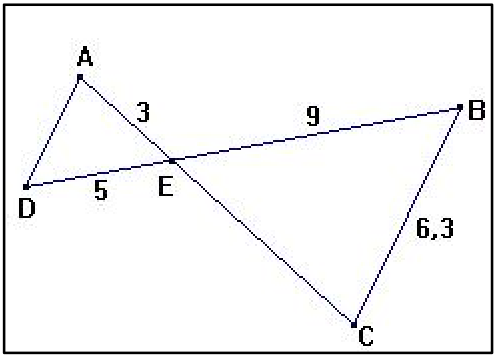
إذا كان $\frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB}$ وإذا كانت A، B، M بنفس ترتيب النقط A، C، N يكون المستقيمان (BC) و (MN) متوازيين .

تمارين ومسائل

أتدرب:

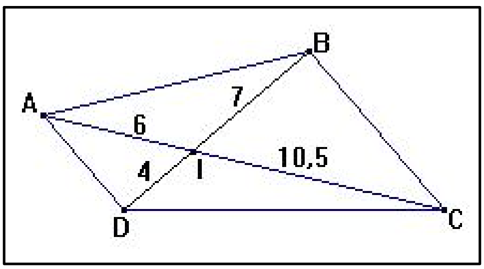
التمرين1:

باستعمال معطيات الشكل المقابل و علما أن المستقيمين (BC) و (AD) متوازيان احسب كلا من EC و AD.



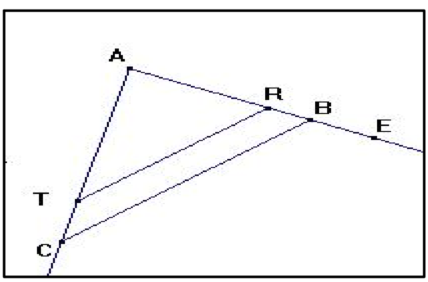
التمرين2:

باستعمال معطيات الشكل المقابل برهن أن المستقيمين (BC) و (AD) متوازيان.



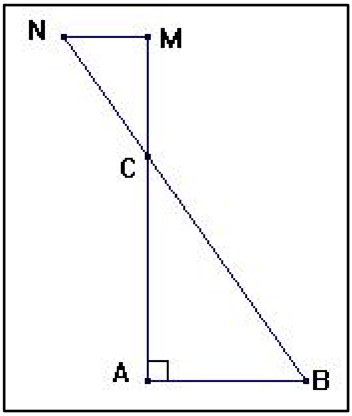
التمرين3:

ABC مثلث حيث: $AB = 6cm$، $AC = 7,2cm$ و $BC = 10cm$. R و E نقطتان من (AB) و T نقطة من (AC) حيث (BC) و(RT)



متوازيان ، $AR = 4,5cm$ و $BE = 2cm$.

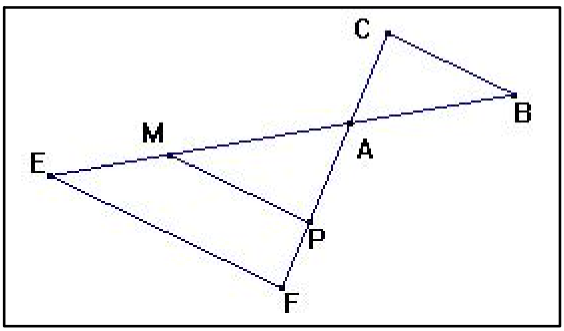
التمرين 4:



ABC مثلث قائم في A حيث: $AB = 5$ و $BC = 13$. النقط A ، C ، M في استقامية و النقط B ، C ، N في استقامية كذلك بحيث: $CM = 2,4$ و $CN = 2,6$.

1. أحسب الطول AC.
2. بين أن المستقيمين (AB) و (MN) متوازيان.
3. أحسب الطول MN.
4. عين دون إجراء حسابات طبيعة المثلث CMN.

التمرين 5:

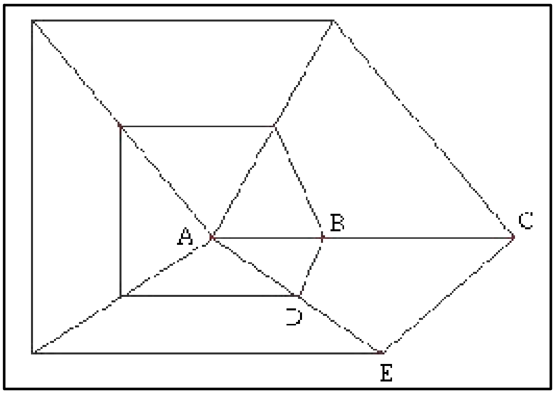


النقط E ، M ، A ، B في استقامية بهذا الترتيب. النقط F ، P ، A ، C في استقامية بهذا الترتيب. المستقيمان (EF) و (MP) متوازيان.

$AM = 6cm$ ، $MP = 4,8cm$ ، $AP = 3,6cm$ ، $EF = 6cm$ ، $AC = 4,5cm$ ، $AB = 7,5cm$.

1. بين أن المثلث AMP مثلث قائم.
2. أحسب AE ثم استنتج الطول ME .
3. بين أن المستقيمين (MP) و (BC) متوازيان.
4. استنتج دون إجراء حسابات أن المستقيمين (EF) و (BC) متوازيان.

وزارة التربية الوطنية. المركز الوطني لإدماج الابتكارات البيداغوجية و تنمية تكنولوجيات الإعلام و الاتصال في التربية ، فيفري 2009



التمرين 6: يمثل الشكل المقابل نسيج عنكبوت.

ا لنقط A ، D ، E من جهة و النقط A ، B ، C من جهة أخرى في استقامية و بنفس الترتيب.

لدينا: $AE = 19cm$ ، $AD = 10cm$ ، $BC = 14,4cm$ ، $AB = 16cm$.

1. أحسب $\frac{AB}{AC}$ و اكتب النتيجة على شكل غير قابل للاختزال.
2. هل المستقيمان (BD) و (CE) متوازيان ؟

حلول التمارين

حل التمرين 1

المستقيمان (AC) و (BD) متقاطعان في E .

و بما أن المستقيمين (BC) و (AD) متوازيان

فإن حسب مبرهنة طالس:

$\frac{BC}{AD} = \frac{EB}{ED} = \frac{EC}{EA}$ أي $\frac{6,3}{AD} = \frac{9}{5} = \frac{EC}{3}$ و منه $EC = \frac{9}{5} \times 3$ و $AD = \frac{6,3}{9} \times 5$

نجد بعد الحساب: $EC = 5,4$ و $AD = 3,5$.

حل التمرين 2

المستقيمان (AC) و (BD) متقاطعان في I .

ترتيب النقط A ، I ، C هو نفسه ترتيب النقط D ، I ، B . لدينا من جهة أخرى

$\frac{IC}{IA} = \frac{10,5}{6} = 1,75$ و $\frac{IB}{ID} = \frac{7}{4} = 1,75$ و منه $\frac{IB}{ID} = \frac{IC}{IA}$ و هكذا بتطبيق عكس مبرهنة طالس فإن المستقيمين (BC) و (AD) متوازيان.

وزارة التربية الوطنية. المركز الوطني لإدماج الابتكارات البيداغوجية و تنمية تكنولوجيات الإعلام و الاتصال في التربية ، فيفري 2009

حل التمرين 3

1.بما أن المستقيمين (TC) و (RB) يتقاطعان في النقطة A و بما أن المستقيمين (BC)و(RT) متوازيان فإن مبرهنة طالس

تسمح بكتابة: $\frac{AT}{AC}=\frac{AR}{AB}=\frac{TR}{BC}$

و بالتالي: $AT=\frac{AR\times AC}{AB}$ و $TR=\frac{AR\times BC}{AB}$ أي $AT=\frac{4,5\times 7,2}{6}=5,4cm$

و $TR=\frac{4,5\times 10}{6}=7,5cm$.

النقط A، B و E في استقامية بهذا الترتيب و منه $AE=AB+BE$ أي $AB=8cm$.

2. لدينا من جهة النقط A، B و E هي بنفس ترتيب النقط A، T و C.

و لدينا ن جهة ثانية $\frac{AB}{AE}=\frac{AT}{AC}$ لأن $\frac{AB}{AE}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$ و $\frac{AT}{AC}=\frac{5,4}{7,2}=\frac{3}{4}$ و بالتالي حسب المبرهنة العكسية لمبرهنة طالس فإن المستقيمين (BT) و (EC) متوازيان.

حل التمرين 4

1.لـ دينا حـ سب مبرهن ة فيث اغورس ف ي المثل ث الق ائم ABC:

$BC^2=AB^2+AC^2$

و منه $AC^2=BC^2-AB^2$ أي $AC^2=169-25=144$ و بالتالي

$AC=\sqrt{144}$

و هكذا نجد $AC=12$.

2. المستقيمان (CA) و (CB) متقاطعان في النقطة C. النقط M، C و A هي بنفس ترتيب النقط N، C و B و لدينا $\frac{CA}{CM}=5$ و $\frac{CB}{CN}=5$ أي $\frac{CA}{CM}=\frac{CB}{CN}$

و هكذا حسب عكس مبرهنة طالس فإن المستقيمين (AB) و (MN) متوازيان.

3. المستقيمان (CA) و (CB) متقاطعان في النقطة C. M نقطة من (CA) و N نقطة من (CB) و المستقيمان (AB) و (MN) متوازيان. لدينا حسب مبرهنة طالس

$\frac{AB}{MN}=\frac{CA}{CM}=\frac{CB}{CN}$ و منه $\frac{AB}{MN}=\frac{CA}{CM}=5$ وهكذا فإن $MN=\frac{AB}{5}$

و بالتالي $MN=1$.

4. بما أن المثلث ABC قائم في A فإن المستقيم (AM) عمودي على المستقيم (AB)

وزارة التربية الوطنية. المركز الوطني لإدماج الابتكارات البيداغوجية و تنمية تكنولوجيات الإعلام و الاتصال في التربية ، فيفري 2009

و بما أن المستقيم (AB) يوازي المستقيم (MN) فإن المستقيم (AM) عمودي كذلك على المستقيم (MN)

نستنتج هكذا أن المثلث CMN قائم في النقطة M.

حل التمرين 5

1. لدينا من جهة: $AM^2 = 6^2 = 36$ و لدينا من جهة ثانية: $MP^2 + PA^2 = (4,8)^2 + (3,6)^2$ إي $MP^2 + PA^2 = 36$.

و بالتالي فإن: $AM^2 = MP^2 + PA^2$.

نستنتج حسب عكس مبرهنة فيتاغورس أن المثلث AMP مثلث قائم في النقطة P.

2. المستقيمان (AE) و (AF) متقاطعان في النقطة A. M نقطة من (AE) و P نقطة من (AF) و بالإضافة إلى ذلك فإن المستقيمين (EF) و (MP) متوازيان.

و منه يكون لدينا حسب مبرهنة طالس $\frac{AM}{AE} = \frac{AP}{AF} = \frac{MP}{EF}$.

$\frac{MP}{EF} = \frac{AM}{AE}$ يعني $\frac{4,8}{6} = \frac{6}{AE}$ و منه: $AE = \frac{6 \times 6}{4,8}$. نجد أن $AE = 7,5cm$.

بما أن النقط A، M و E في استقامية بهذا الترتيب فإن $AM + ME = AE$ و بالتالي فإن $ME = AE - AM$ أي $ME = 7,5 - 6$. نجد أن $ME = 1,5cm$.

3. المستقيمان (AM) و (AP) متقاطعان في النقطة A. B نقطة من (AM) و C نقطة من (AP). النقط M، A و B في استقامية و بنفس ترتيب النقط P، A و C.

و لدينا من جهة ثانية $\frac{AM}{AB} = \frac{6}{7,5} = 0.8$ و $\frac{AP}{AC} = \frac{3,6}{4,5} = 0.8$ أي $\frac{AM}{AB} = \frac{AP}{AC}$.

نستنتج حسب عكس مبرهنة طالس أن المستقيمين (MP) و (BC) متوازيان.

4. المستقيمان (EF) و (BC) يوازيان نفس المستقيم (MP) فهما إذن متوازيان.

حل التمرين 6

1. $\frac{AB}{AC} = \frac{16}{16+14,4} = \frac{16}{30,4} = \frac{160}{304}$ و بما أن $PGCD(304;160) = 16$ فإن $\frac{AB}{AC} = \frac{16 \times 10}{16 \times 19} = \frac{10}{19}$. إذن $\frac{AB}{AC} = \frac{10}{19}$

2. المستقيمان (AC) و (AE) متقاطعان في النقطة A. B نقطة من (AC) و D نقطة من (AE). النقط A، B و C في استقامية و بنفس ترتيب النقط A، D و E.

و لدينا $\frac{AB}{AC} = \frac{10}{19}$ و $\frac{AD}{AE} = \frac{10}{19}$ و منه $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE}$.

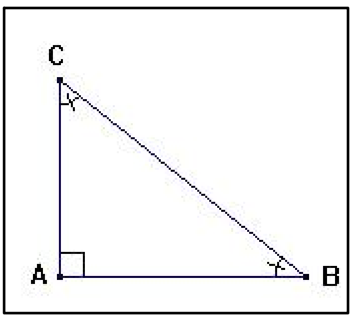
وزارة التربية الوطنية. المركز الوطني لإدماج الابتكارات البيداغوجية و تنمية تكنولوجيات الإعلام و الاتصال في التربية ، فيفري 2009

نستنتج حسب عكس مبرهنة طالس أن المستقيمين (BD) و (CE) متوازيان.

9 حساب المثلثات في المثلث القائم

أتذكر الأهم:

24. النسب المثلثية في مثلث قائم



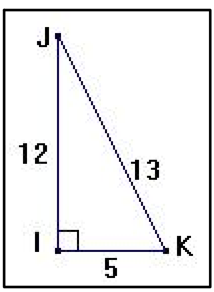
تعاريف: ABC مثلث قائم في النقطة A.

و لتكن مثلا $\widehat{B}$ إحدى زواياه الحادة. يسمى $[AC]$ الضلع المقابل لِـ $\widehat{B}$ بينما يسمى $[AB]$ الضلع المجاور لِـ $\widehat{B}$.

نعرف الثلاث نسب التالية:

$$\cos\widehat{B} = \frac{AB}{BC} \text{ ، } \sin\widehat{B} = \frac{AC}{BC} \text{ ، } \tan\widehat{B} = \frac{AC}{AB}$$

مثال: IJK مثلث قائم في النقطة I حيث $IJ = 12cm$ ، $IK = 5cm$ و $JK = 13cm$.



لدينا:

- $\sin\widehat{J} = \frac{5}{13}$ ، $\cos\widehat{J} = \frac{12}{13}$ ، $\tan\widehat{J} = \frac{5}{12}$
- $\sin\widehat{K} = \frac{12}{13}$ ، $\cos\widehat{K} = \frac{5}{13}$ ، $\tan\widehat{K} = \frac{12}{5}$

ملاحظات:

- جيب إحدى الزوايا الحادة في مثلث قائم يساوي جيب تمام الزاوية

وزارة التربية الوطنية. المركز الوطني لإدماج الابتكارات البيداغوجية و تنمية تكنولوجيات الإعلام و الاتصال في التربية ، فيفري 2009

الأخرى.

- جيب و جيب تمام زاوية حادة هي أعداد محصورة بين العددين 0 و 1.

25. العلاقات بين النسب المثلثية

إذا كان x قيسا لإحدى الزوايا الحادة في مثلث قائم فإن:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \text{و} \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

مثال: لنعين مثلا $\cos 60°$ علما أن $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

لدينا: $\sin^2 60° + \cos^2 60° = 1$ و منه $\cos^2 60° = 1 - \sin^2 60°$

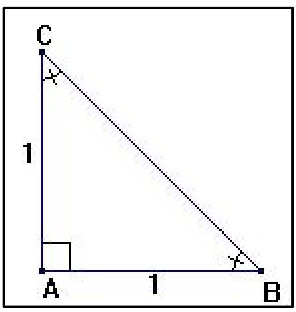
تمارين و مسائل

و هكذا نجد $\cos^2 60° = 1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ و بالتالي $\cos 60° = \frac{1}{2}$.

التمرين1:

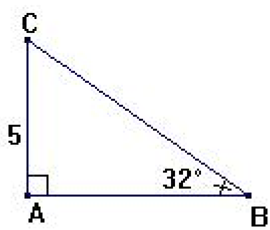
أتدرب:

أنشئ باستعمال مسطرة غير مدرجة و مدور زاوية قيسها a علما أن $\sin a = 0,6$.



التمرين2: باستعمال مثلث قائم ABC في النقطة A حيث $AB = AC = 1cm$ عين القيم المضبوطة لكل من $\sin 45°$، $\cos 45°$ و $\tan 45°$.

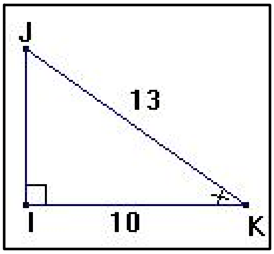
التمرين3: ABC مثلث قائم في النقطة A حيث $AC = 5cm$ و $\widehat{B} = 32°$. أحسب قيمة مقربة إلى $0,01$ لكل من BC و AB.



وزارة التربية الوطنية. المركز الوطني لإدماج الابتكارات البيداغوجية و تنمية تكنولوجيات الإعلام و الاتصال في التربية ، فيفري 2009

التمرين4: IJK مثلث قائم في النقطة I حيث $IK = 10cm$ و $JK = 13\ cm$.

عين المدور إلى 10^{-2} لقيس الزاوية $\widehat{K}$.



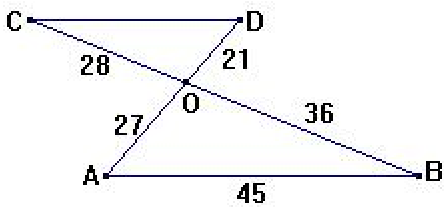
أنمي كفاءاتي:

مسألة: المستقيمان (BC) و (AD) متقاطعتان في O.

حيث:

$AB = 45cm$ ، $OA = 27cm$ ، $OD = 21cm$ ،

$OB = 36cm$ ، $OC = 28cm$.



1. برهن أن المستقيمين (AB) و (CD) متوازيان.
2. أحسب الطول CD.
3. أثبت أن المثلث AOB قائم.
4. عين قيس الزاوية $\widehat{ABO}$ بالتقريب إلى الوحدة من الدرجة.

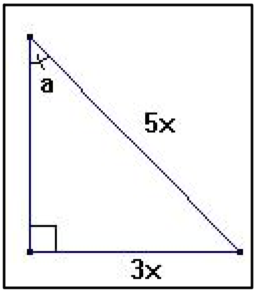
وزارة التربية الوطنية. المركز الوطني لإدماج الابتكارات البيداغوجية و تنمية تكنولوجيات الإعلام و الاتصال في التربية ، فيفري 2009

حلول التمارين و المسائل

حل التمرين 1

نعلم أن $\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = 0,6$ و منه $\sin\alpha = \frac{3}{5}$.

ننشئ مثلثا قائما وتره $5x$ و طول أحد ضلعي الزاوية القائمة هو $3x$ بحيث x عدد موجب (طول) معطى.



حل التمرين 2

بما أن $AB = AC$ فإن المثلث ABC متساوي الساقين و قائم في A و بالتالي فإن $\widehat{B} = \widehat{C} = 45°$.

لدينا: $\cos\widehat{B} = \frac{AB}{BC}$. لنحسب القيمة المضبوطة لـِ BC و ذلك بتطبيق مبرهنة فيتاغورس في المثلث ABC:

$BC^2 = AB^2 + AC^2$ أيٍ $BC^2 = 1+1 = 2$ و منه $BC = \sqrt{2}\,cm$.

نجد هكذا أن $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\widehat{B}$ و بالتالي فإن $\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

و يمكن أن نثبت بنفس الطريقة أن $\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

لدينا مثلا من جهة أخرى $\tan 45° = \frac{\sin 45°}{\cos 45°}$ و بالتالي $\tan 45° = 1$.

حل التمرين 3

لدينا $\sin 32° = \frac{5}{BC}$ و بالتالي فإن $BC = \frac{5}{\sin 32°}$

نجد باستعمال آلة حاسبة $BC \approx 9,43cm$. لدينا من جهة ثانية $\tan 32° = \frac{5}{AB}$ و منه $AB = \frac{5}{\tan 32°}$. نجد باستعمال آلة حاسبة $AB \approx 8,00cm$.

حل التمرين 4

لدينا $\cos\widehat{K} = \frac{10}{13}$ ثم باستعمال آلة حاسبة نجد: $\widehat{K} = 39,72°$

وزارة التربية الوطنية. المركز الوطني لإدماج الابتكارات البيداغوجية و تنمية تكنولوجيات الإعلام و الاتصال في التربية ، فيفري 2009

حل المسألة :

1. المستقيمان (BC) و (AD) متقاطعتان في O. النقط C، O، B في استقامية و بنفس ترتيب النقط A ، O، D.

لدينا: $\frac{7}{9}=\frac{21}{27}=\frac{OD}{OA}$ و $\frac{7}{9}=\frac{28}{36}=\frac{OC}{OB}$ و هكذا فإن $\frac{OC}{OB}=\frac{OD}{OA}$.

نستنتج حسب عكس مبرهنة طالس أن المستقيمين (AB) و (CD) متوازيان.

2. المستقيمان (BC) و (AD) متقاطعان في O. D نقطة من (OA) و C نقطة من (OB). و بالإضافة إلى ذلك المستقيمان (AB) و (CD) متوازيان.

و منه حسب مبرهنة طالس فإن: $\frac{AB}{CD}=\frac{OB}{OC}=\frac{OA}{OD}$. لدينا هكذا $\frac{AB}{CD}=\frac{OA}{OD}$ و بالتالي $\frac{45}{CD}=\frac{9}{7}$ و منه $CD=\frac{7\times 45}{9}$. و هكذا نجد $CD=35cm$.

3. لدينا في المثلث AOB: $AB^2=45^2=2025$ من جهة و $OA^2+OB^2=27^2+36^2=2025$ من جهة ثانية و منه $OA^2+OB^2=AB^2$

نستنتج حسب عكس مبرهنة فيتاغورس أن المثلث AOB قائم في النقطة O.

4. في المثلث القائم AOB لدينا: $\tan \widehat{ABO}=\frac{27}{36}=\frac{3}{4}$ و منه و باستعمال آلة حاسبة نجد أن $\widehat{ABO}\approx 37°$.

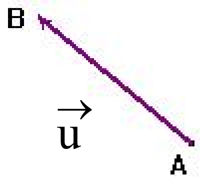
وزارة التربية الوطنية. المركز الوطني لإدماج الابتكارات البيداغوجية و تنمية تكنولوجيات الإعلام و الاتصال في التربية ، فيفري 2009

10 الأشعة والانسحاب

أتذكر الأهم:

26. مفهوم الشعاع

تعريف: الانسحاب الذي يحول النقطة A إلى النقطة B يعرف شعاعا نرمز إليه بالرمز $\overrightarrow{AB}$. و غالبا ما نكتب $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$. يعرف الشعاع $\overrightarrow{AB}$ بـِ:



- منحاه و هو منحى المستقيم (AB).

اتجاهه و هو من A نحو B.

طوله و هو طول القطعة $[AB]$.

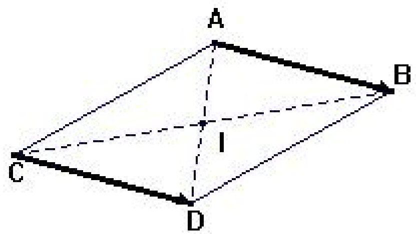
ملاحظة: الانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$ هو الانسحاب الذي يحول A إلى B.

3. تساوي شعاعين

تعريف: الشعاعان المتساويان هما شعاعان لهما نفس المنحى، نفس الطول و نفس الاتجاه.

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ يعني $ABDC$ متوازي أضلاع.

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ يعني للقطعتين $[AD]$ و $[BC]$ نفس المنتصف I.

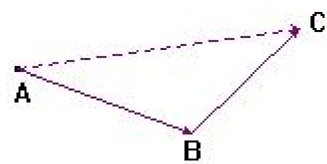


ملاحظة: I منتصف $[AB]$ يعني $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}$.

4. تركيب انسحابين – مجموع شعاعين

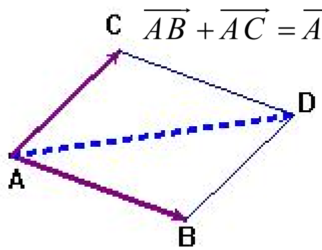
علاقة شال

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$



قاعدة متوازي الأضلاع

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$



وزارة التربية الوطنية. المركز الوطني لإدماج الابتكارات البيداغوجية و تنمية تكنولوجيات الإعلام و الاتصال في التربية ، فيفري 2009

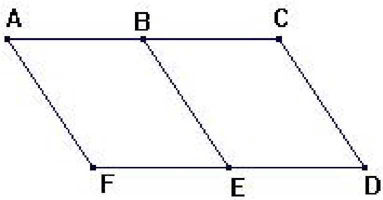
حالة خاصة: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$. نقول أن $\overrightarrow{BA}$ هو معاكس $\overrightarrow{AB}$ و نكتب:

تمارين

$\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$.

أتدرب:

التمرين 1:



$ABEF$ و $BCDE$ متوازيا أضلاع.
B منتصف $[AC]$ و E منتصف $[DF]$.

باستعمال فقط نقط الشكل المقابل عين:
شعاعا يساوي الشعاع $\overrightarrow{BA}$ و شعاعا يساوي الشعاع $\overrightarrow{EC}$.
شعاعا منحاه يختلف عن منحى الشعاع $\overrightarrow{FD}$.
صورة النقطة A بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{CD}$.
شعاعا يساوي الشعاع $\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BC}$ و شعاعا يساوي الشعاع $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF}$.

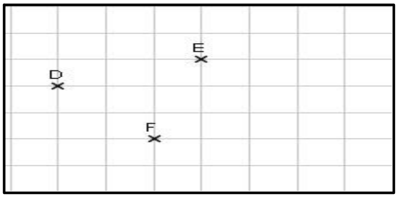
التمرين 2:

أنشئ مثلثا كيفيا ABC ثم عين نقطة كيفية D على $[BC]$.
أنشئ النقطة E التي تحقق $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{DA}$.
أنشئ النقطة F التي تحقق $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$.

التمرين 3:

A ، B ، C 3 نقط من المستوي حيث: $AB=5cm$ ، $AC=4cm$ و $BC=6cm$.
أنشئ المثلث ABC.
أنشئ النقطة M صورة النقطة A بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{BC}$.
أعط شعاعا يساوي الشعاع $\overrightarrow{MA}$.
أنشئ النقطة K التي تحقق $\overrightarrow{CK}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$.
برهن أن $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{AK}$. ماذا تستنتج بالنسبة للنقطة A ؟

التمرين 4:



DEF مثلث.

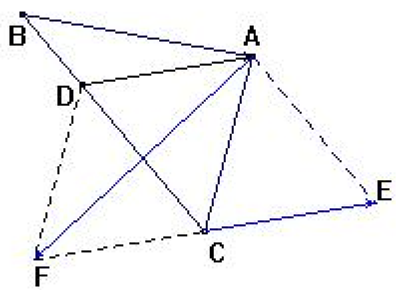
أنشئ النقطة G صورة النقطة F
بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{DE}$
أنشئ النقطة H نظيرة النقطة G بالنسبة إلى النقطة F.
3.ما هي طبيعة الرباعي $DEFH$ ؟ علل.

حلول التمارين

حل التمرين 1

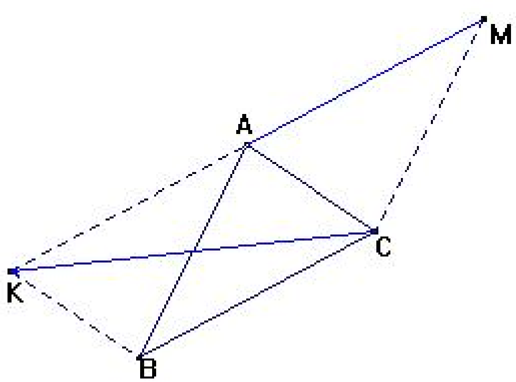
لدينا $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DE}$ بينما $\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{FB}$.
لدينا عدة أشعة منحاها يختلف عن منحى $\overrightarrow{FD}$ مثال: $\overrightarrow{EC}$، $\overrightarrow{BE}$...
لدينا $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{CD}$ و منه صورة بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{CD}$ هي النقطة F.
باستعمال علاقة شال نجد: $\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{FB}$ بينتما باستعمال قاعدة متوازي الأضلاع نجد: $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AB}$.

حل التمرين 2



أنظر الشكل المقابل.
النقطة E هي صورة النقطة C بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{DA}$. و منه فإن $ADCE$ متوازي أضلاع.
يتم إنشاء النقطة F بحيث يكون $ADFC$ متوازي أضلاع.

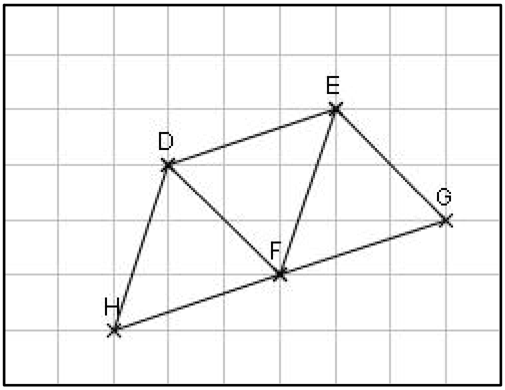
حل التمرين 3



أنظر الشكل المقابل.
لدينا $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BC}$
و منه فإن
الرباعي $ABCM$ متوازي أضلاع.
من $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BC}$ نستنتج أن $-\overrightarrow{MA}=-\overrightarrow{CB}$ و منه $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{CB}$.
باستعمال قاعدة متوازي الأضلاع ننشئ

النقطة K بحيث يكون $ABCK$ متوازي أضلاع.
لدينا من السؤال3 $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{CB}$ و بما أن $ABCK$ متوازي أضلاع فإن $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AK}$.
من $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{CB}$ و $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AK}$ نستنتج أن $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{AK}$. النقطة A هي منتصف $[KM]$.

حل التمرين4



لدينا $\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{DE}$ و بالتالي فالرباعي $DEGF$ متوازي أضلاع.
النقطة F هي منتصف القطعة $[GH]$
لدينا من السؤال1: $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{FG}$
و بما أن F هي منتصف القطعة $[GH]$ فإن $\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{HF}$ و منه نستنتج أن: $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{HF}$
و بالتالي فالرباعي $DEFH$ متوازي أضلاع.

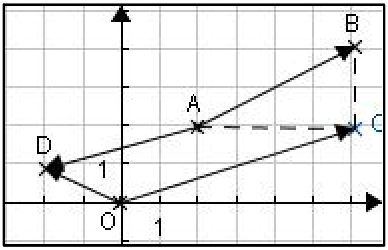
نصيحة

أبعد وسائل التسلية و الترفيه عن مكان المذاكرة.

11 المعالم

أتذكر الأهم:

5. قراءة إحداثيي شعاع في معلم

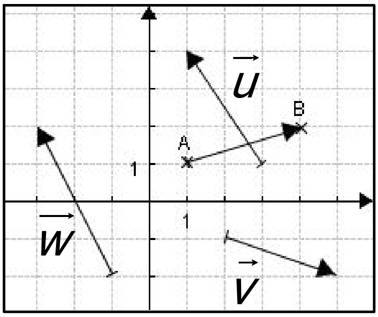


مثال: نقرا في الشكل المقابل:

$\overrightarrow{AB}(4;2)$ ، $\overrightarrow{AC}(4;0)$ ، $\overrightarrow{BC}(0;-2)$ ،

$\overrightarrow{AD}(-4;-1)$ ، $\overrightarrow{OC}(6;2)$ ، $\overrightarrow{OD}(-2;1)$.

6. تمثيل شعاع بمعرفة إحداثييه



مثال: لقد تم في الشكل المقابل تمثيل الأشعة التالية:

$\overrightarrow{AB}$ حيث $A(1;1)$ و $B(4;2)$.

$\vec{u}(-2;3)$ ، $\vec{v}(3;-1)$ و $\vec{w}(-2;4)$.

7. حساب إحداثيي شعاع بمعرفة مبدأ و نهاية ممثل له.

إذا كانت $A(x_A;y_A)$ و $B(x_B;y_B)$ فإن:

$$\overrightarrow{AB}(x_B-x_A;Y_B-Y_A) \quad AB=\sqrt{17}$$

مثال: إذا كان $A(3;2)$ و $B(-1;3)$ فإن $\overrightarrow{AB}(-1-3;3-2)$ و منه $\overrightarrow{AB}(-4;1)$

8. حساب إحداثيي منتصف قطعة مستقيمة

إذا كانت $A(x_A;y_A)$ و $B(x_B;y_B)$ و كانت $M(x_M;y_M)$ منتصف $[AB]$ فإن:

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{2} \quad \text{و} \quad Y_M=\frac{Y_A+Y_B}{2}$$

مثال: إذا كان $A(3;2)$ و $B(-1;3)$ فإن منتصف $[AB]$ هي النقطة $M\left(\frac{3-1}{2};\frac{2+3}{2}\right)$

و منه $M\left(1;\frac{5}{2}\right)$

9. حساب المسافة بين نقطتين في معلم متعامد و متجانس

في معلم متعامد و متجانس إذا كانت $A(x_A;y_A)$ و $B(x_B;y_B)$ فإن:

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(Y_B-Y_A)^2}$$

مثال: إذا كانت $A(3;2)$ و $B(-1;3)$ فإن $AB=\sqrt{(-1-3)^2+(3-2)^2}$

و بالتالي فإن: $AB=\sqrt{17}$.

وزارة التربية الوطنية. المركز الوطني لإدماج الابتكارات البيداغوجية و تنمية تكنولوجيات الإعلام و الاتصال في التربية ، فيفري 2009

تمارين

أتدرب:

التمرين 1: المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;I,J)$. وحدة الطول هي السنتيمتر.

علم النقط $A(2;3)$ ، $B(-2;5)$ و $C(-2;1)$.

أحسب الأطوال AB ، AC و BC.

أحسب إحداثيي النقطة E منتصف القطعة المستقيمة $[BC]$.

هل المستقيم (AE) محورا للقطعة المستقيمة $[BC]$ ؟

عين إحداثيي النقطة D بحيث يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع.

التمرين 2: المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;I,J)$. وحدة الطول هي السنتيمتر.

علم النقط $A(-2;2)$ ، $B(1;5)$ ، $C(5;1)$ و $D(2;-2)$.

تحقق أن النقطة B هي صورة النقطة A بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{DC}$.

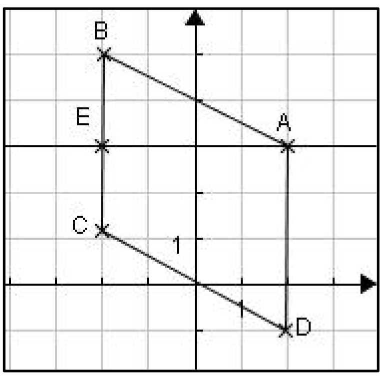
أحسب الأطوال AB ، AC و BC ثم بين أن المثلث ABC قائم.

ما هي طبيعة الرباعي $ABCD$ ؟

عين إحداثيي النقطة E منتصف القطعة $[AC]$.

بين أن النقطة E هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC.

حلول التمارين



حل التمرين 1

أنظر الشكل المقابل.

2. $AB=\sqrt{(-2-2)^2+(5-3)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

بنفس الطريقة نجد: $AC=2\sqrt{5}$ و $BC=4$.

3. لدينا $E\left(\frac{-2-2}{2};\frac{5+1}{2}\right)$ أي $E(-2;3)$.

وزارة التربية الوطنية. المركز الوطني لإدماج الابتكارات البيداغوجية و تنمية تكنولوجيات الإعلام و الاتصال في التربية ، فيفري 2009

4. بما أن المستقيم (AB) يمر من A رأس المثلث ABC و النقطة E منتصف القطعة $[BC]$ و بما أن المثلث ABC متساوي الساقين في A فإن (AE) محور للقطعة المستقيمة $[BC]$.

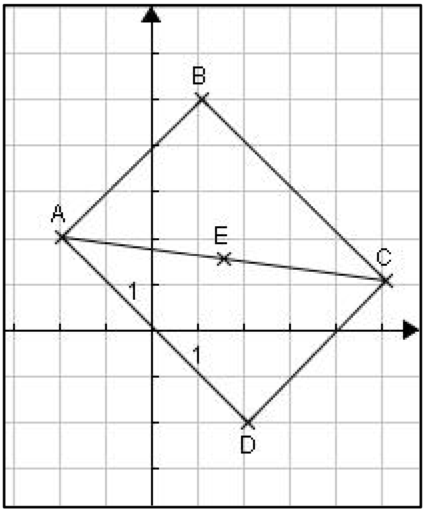
5. نفرض أن $D(x;y)$ و منه $\overrightarrow{AD}(x-2;y-3)$ و لدينا $\overrightarrow{BC}(0;-4)$.

$ABCD$ متوازي أضلاع يعني $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ أي $\begin{cases} x-2=0 \\ y-3=-4 \end{cases}$

نجد هكذا أن $D(2;-1)$.

حل التمرين 2

أنظر الشكل المقابل.



يكفي أن نبين أن $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

لدينا:

$\overrightarrow{AB}(1+2;5-2)$ أي $\overrightarrow{AB}(3;3)$ و لدينا:

$\overrightarrow{DC}(5-3;1+2)$ أي $\overrightarrow{DC}(3;3)$. و بالتالي:

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

$AB=3\sqrt{2}$ ، $AC=5\sqrt{2}$ و $BC=4\sqrt{2}$

لدينا: $AB^2+BC^2=\left(3\sqrt{2}\right)^2+\left(4\sqrt{2}\right)^2=50$

و لدينا من جهة ثانية: $AC^2=\left(5\sqrt{2}\right)^2=50$

و منه: $AB^2+BC^2=AC^2$. نستنتج حسب عكس مبرهنة طالس أن المثلث ABC قائم في النقطة A.

بما أن $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ فإن $ABCD$ متوازي أضلاع و بما أن إحدى زواياه قائمة فهو إذن مستطيل.

لدينا: $E\left(\dfrac{-2+5}{2};\dfrac{2+1}{2}\right)$ و منه $E\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2}\right)$.

المثلث ABC قائم في A و E منتصف وتره فهي إذن مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC. أو بإتباع طريقة ثانية يكون لدينا من جهة: $EA=EC=\dfrac{AC}{2}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

و $EB=\sqrt{\left(1-\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(5-\dfrac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{50}{4}}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ و هكذا فإن $EA=EB=EC$ مما يدل على أن النقطة E هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC.

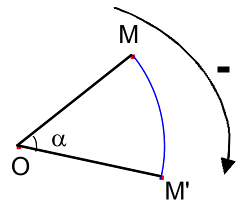
وزارة التربية الوطنية. المركز الوطني لإدماج الابتكارات البيداغوجية و تنمية تكنولوجيات الإعلام و الاتصال في التربية ، فيفري 2009

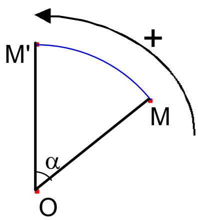
12 الـدوران – المضلعات المنتظمة – الزوايا

أتذكر الأهم:

10. الدوران

تعريف: O نقطة، α قيس بالدرجات لزاوية و اتجاه معطى.
صورة النقطة M بالدوران الذي مركزه O و زاويته α في الاتجاه المعطى هي النقطة M' بحيث: $OM'=OM$ و $\widehat{MOM'}=\alpha°$ (محسوبة في الاتجاه المعطى).



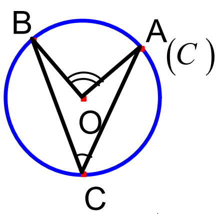


M' هي صورة M في الاتجاه السالب M' هي صورة M في الاتجاه الموجب

ملاحظة: دوران مركزه O و زاويته $180°$ هو تناظر مركزي مركزه النقطة O.

خواص: * الدوران يحافظ على المسافات، على الاستقامية و على أقياس الزوايا.
* الدوران يحول الأشكال الهندسية إلى أشكال تقايسها و لها نفس الخصائص.

11. الزاوية المركزية و الزاوية المحيطية



تعريف:

* الزاوية $\widehat{ACB}$ زاوية محيطية في الدائرة (C).
* الزاوية $\widehat{AOB}$ زاوية مركزية في الدائرة (C).
* الزاوية المركزية $\widehat{AOB}$ و الزاوية المحيطية $\widehat{ACB}$ تحصران نفس القوس $\overset{\frown}{AB}$ من الدائرة (C).

خواص: * قيس زاوية محيطية في دائرة هو نصف قيس الزاوية المركزية التي تحصر نفس القوس معها. $\widehat{ACB}=\frac{1}{2}\widehat{AOB}$

* كل الزوايا المحيطية في دائرة و التي تحصر نفس القوس متقايسة.

12. المضلعات المنتظمة

تعريف: المضلع المنتظم هو مضلع كل زواياه متقايسة و كل أضلاعه لها نفس الطول.

وزارة التربية الوطنية. المركز الوطني لإدماج الابتكارات البيداغوجية و تنمية تكنولوجيات الإعلام و الاتصال في التربية ، فيفري 2009

مثال: المربع هو مضلع منتظم.

خواص:

* يسمى مركز الدائرة المحيطة بالمضلع المنتظم مركز المضلع المنتظم.
* كل الزوايا المركزية في مضلع منتظم متقايسة.

تمارين

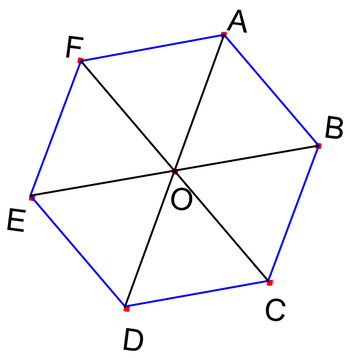
أتدرب:

التمرين1: نعتبر مثلثا قائما ABC في النقطة A.

أنشئ صورة المثلث ABC بالدوران الذي مركزه B وزاويته $90°$ و في الاتجاه الموجب.

أنشئ صورة المثلث ABC بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$.

التمرين2:



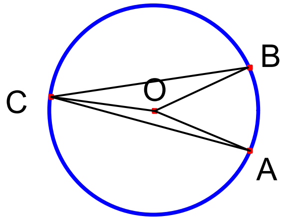
$ABCDEF$ سداسي منتظم مركزه النقطة O.

ما هي صورة المثلث OEF بالتناظر المركزي مركزه النقطة O ؟

ما هي صورة المثلث OAB بالتناظر المحوري الذي محوره المستقيم (OB) ؟

ما هو قيس كل من الزاويتين $\widehat{AOB}$ و $\widehat{ADB}$ ؟

ما هي صورة المثلث OAF بالدوران الذي مركزه O و زاويته $60°$ في الاتجاه المعاكس لحركة عقارب الساعة.



التمرين3: عين مع التبرير أقياس زوايا المثلث ABC

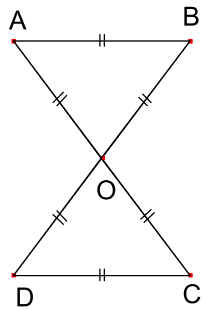
علما أن: $\widehat{AOB} = 46°$ و $\widehat{BOC} = 162°$.

التمرين4: أعد رسم الشكل الآتي علما أن $OA = 3cm$.

بين أن الرباعي $ABCD$ مستطيل.

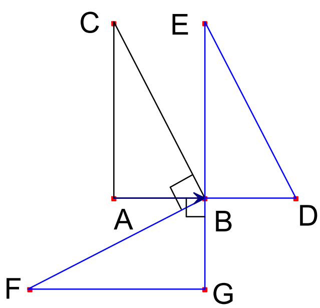
وزارة التربية الوطنية. المركز الوطني لإدماج الابتكارات البيداغوجية و تنمية تكنولوجيات الإعلام و الاتصال في التربية ، فيفري 2009

أنشئ النقطة E صورة النقطة O بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{BA}$.
أنشئ النقطة F صورة النقطة C بالدوران الذي مركزه O و زاويته $60°$ في الاتجاه المعاكس لحركة عقارب الساعة.
بين أن النقط A، B، C، D، E، F تنتمي إلى نفس الدائرة.
ما نوع الرباعي $ABFCDE$ ؟
عين شعاعا يساوي الشعاع $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}$.



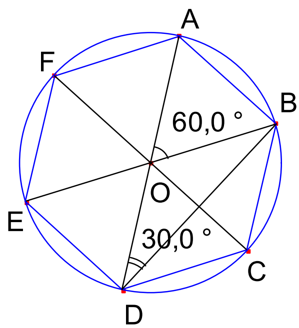
حلول التمارين

حل التمرين 1



من الواضح أن صورة النقطة B هي B نفسها.
صورة النقطة A هي G و صورة النقطة C هي F.
و بالتالي فصورة المثلث ABC ABC بالدوران الذي مركزه B وزاويته $90°$ و في الاتجاه الموجب هو المثلث GBF القائم في النقطة G.
صورة النقطة A هي النقطة B، صورة النقطة B هي النقطة D و صورة النقطة C هي النقطة E و بالتالي فصورة المثلث ABC بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$ هو المثلث BDE القائم في النقطة B.

حل التمرين 2



صورة المثلث OEF بالتناظر الذي مركزه O هو المثلث OBC.
صورة المثلث OAB بالتناظر الذي محوره (OB) هو المثلث OCB.
$\widehat{AOB}=60°$ و $\widehat{ADB}=\frac{1}{2}\widehat{AOB}$ و بالتالي $\widehat{ADB}=30°$.

صورة المثلث OAF بالدوران الذي مركزه O

وزارة التربية الوطنية. المركز الوطني لإدماج الابتكارات البيداغوجية و تنمية تكنولوجيات الإعلام و الاتصال في التربية ، فيفري 2009

و زاويته $60°$ في الاتجاه المعاكس لحركة عقارب الساعة هو المثلث OFE.

حل التمرين 3

نعلم أن $\widehat{AOB}+\widehat{BOC}+\widehat{COA}=360°$

و بالتالي: $\widehat{COA}=360°-\widehat{AOB}-\widehat{BOC}$

أي $\widehat{COA}=360-46-162$ و منه $\widehat{COA}=152°$.

الزاوية المحيطية $\widehat{ACB}$ و الزاوية المركزية $\widehat{AOB}$ تحصران نفس القوس و بالتالي فإن:

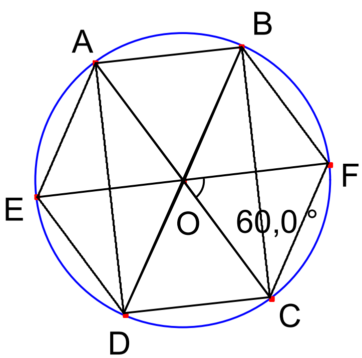
$\widehat{ACB}=\frac{1}{2}\widehat{AOB}$ أي $\widehat{ACB}=\frac{1}{2}\times 46°$ و أخيرا $\widehat{ACB}=23°$.

لدينا كذلك قيس الزاوية $\widehat{BAC}$ هو نصف قيس الزاوية $\widehat{BOC}$ و منه $\widehat{BAC}=81°$.

كذلك قيس الزاوية $\widehat{CBA}$ هو نصف قيس الزاوية $\widehat{COA}$ و منه $\widehat{CBA}=76°$.

نتحقق أن مجموع أقياس زوايا مثلث هي $180°$: $23+81+76=180$.

حل التمرين 4



أنظر الشكل المقابل.

$\frac{OA}{OC}=\frac{OB}{OD}$ و منه حسب عكس

مبرهنة

طالس فإن $(AB)//(CD)$ و بما أن $AB=CD$

فإن $ABCD$ متوازي أضلاع و بما أن قطريه

متقايسان فإن $ABCD$ مستطيل.

أنظر الشكل.

أنظر الشكل.

$OA=OB=OC=OD=OE=OF$ لأن $OE=BA=OA$ و $OF=OC$.

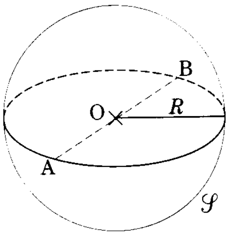
$ABFCDE$ سداسي منتظم.

$\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}$.

13 الـهندسة في الفضاء

أتذكر الأهم:

13. الكرة و الجلة



تعريف: * الكرة التي مركزها النقطة O و نصف قطرها R هي مجموعة كل النقط M من الفضاء بحيث: $OM = R$.

* يسمى داخل الكرة التي مركزها النقطة Oو نصف قطرها R الجلة التي مركزها النقطة O و نصف قطرها R.

* الجلة التي مركزها النقطة O و نصف قطرها R هي مجموعة كل النقط M من الفضاء بحيث: $OM \leq R$.

14. مساحة الكرة – حجم

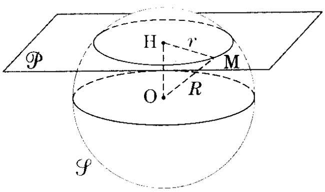
مساحة كرة نصف قطرها R هي: $A = 4\pi R^2$.

حجم جلة نصف قطرها R هو: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

مثال: * مساحة كرة نصف قطرها $\sqrt{3}cm$ هو: $A = 12\pi cm^2$

* حجم جلة نصف قطرها $\sqrt{3}cm$ هو: $V = 4\pi\sqrt{3}cm^3$

15. المقاطع المستوية لمجسمات مألوفة



تعريف: يسمى تقاطع مستو بمجسم مقطعا مستويا لهذا المجسم.

مثال: مقطع كرة نصف قطرها r بحيث $OH \leq r$ بمستو هو دائرة نصف قطرها $\sqrt{r^2 - OH^2}$.

H هي المسقط العمودي للنقطة O على المستوي.

16. التكبير و التصغير

تعريف: إذا ضربنا كل أبعاد مجسم بعدد موجب k نكون قد قمنا بتكبيره إذا كان $k > 1$ و بتصغيره إذا كان $0 < k < 1$. يسمى العدد k معامل أو سلم التكبير (التصغير).

خواص: * التكبير و التصغير لا يغيران طبيعة المجسمات.

* التكبير و التصغير يحافظان على الزوايا.

* إذا قمنا بتكبير أو تصغير مجسم بتكبير أو تصغير معامله k فإن:

أبعاده تضرب في العدد k.

مساحته تضرب في العدد k^2.

حجمه يضرب في العدد k^3.

وزارة التربية الوطنية. المركز الوطني لإدماج الابتكارات البيداغوجية و تنمية تكنولوجيات الإعلام و الاتصال في التربية ، فيفري 2009

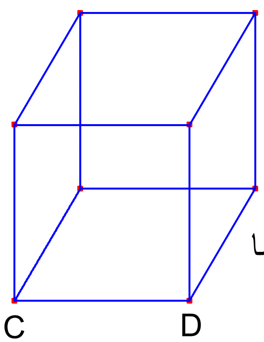
أتدرب:

التمرين1: تغطي البحار و المحيطات حوالي $70°$ من مساحة سطح الكرة.
أحسب بِـ km^2 المساحة التي تغطيها القارات (مدورة إلى الوحدة) إذا اعتبرنا الكرة الأرضية كرة نصف قطرها $6730\,km$.

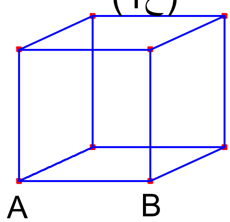
التمرين2: احسب بِـ cm^3 الحجم V لكرة السلة إذا اعتبرناها كرة نصف قطرها $R = 12\,cm$.
نقبل أن كرة المضرب عبارة عن كرة نصف قطرها $R'cm$ و هي بهذا الشكل تصغير لكرة السلة بحيث أن معامل التصغير هو $\frac{4}{15}$.
أحسب R'.
باستعمال طريقتين مختلفتين أحسب بِـ cm^3 الحجم V' لكرة المضرب.
ملاحظة: يتم تدوير النتائج إلى الوحدة.

التمرين3: (خ1) و(خ2) خزانان للمياه على شكل مكعب حيث: $CD = 1,5AB$.

(خ2)

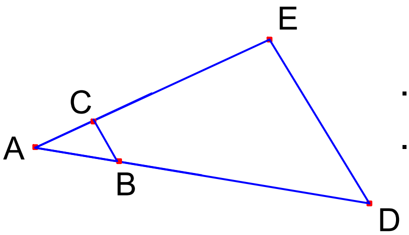


(خ1)



أحسب حجم الخزان (خ1)
علما أن حجم الخزان (خ2) هو $843,75$ l.
إذا لزمنا $3\,kg$ من الطلاء لصبغ الخزان (خ1) كم يلزمنا من الطلاء لصبغ الخزان (خ2) علما أن كتلة الطلاء و المساحة المصبوغة متناسبان.

التمرين4: ADE مثلث مساحته $A = 112\,cm^2$.
B نقطة من $[AD]$ حيث $AB = 0,25 \times AD$.
C نقطة من $[AE]$ حيث $AC = 0,25 \times AE$.
بين أن المستقيمين (BC) و (DE) متوازيان.
المثلث ABC تصغير للمثلث ADE. ما هو سلم التصغير؟



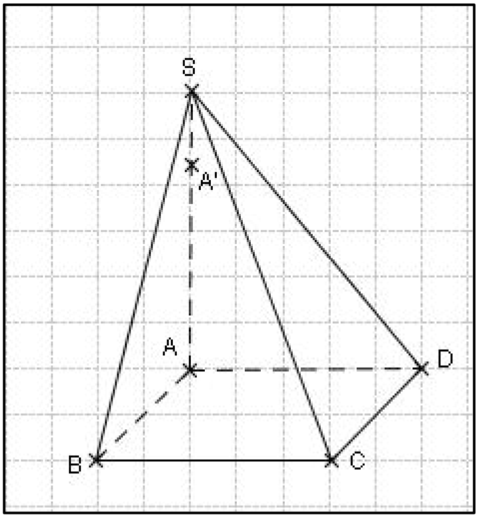
وزارة التربية الوطنية. المركز الوطني لإدماج الابتكارات البيداغوجية و تنمية تكنولوجيات الإعلام و الاتصال في التربية ، فيفري 2009

أحسب مساحة المثلث ABC.

أنمي كفاءاتي:

مسألة:

$SABCD$ هرم رأسه S و قاعدته $ABCD$ مستطيلة الشكل بحيث:



$SA = 8cm$ ، $AD = 6cm$ ، $SD = 10cm$ ،

$AB = \frac{10}{3}cm$ و $SB = \frac{26}{3}cm$.

لتكن A' نقطة من $[SA]$ بحيث $SA' = \frac{1}{4}SA$.

نقطع الهرم بمستو يمر من A' و موازٍ لقاعدته، هذا الأخير يقطع $[SB]$ في B' و يقطع $[SC]$ في C' و يقطع $[SD]$ في D'.

بين أن المثلثين SAD و SAB قائمان.

بين أن SA هي ارتفاع الهرم.

يعتبر $SA'B'C'D'$ هرم مصغر للهرم $SABCD$. ما هو معامل التصغير ؟

ما هي طبيعة $A'B'C'D'$ ؟ أحسب أبعاده.

حلول التمارين و المسائل

حل التمرين 1

بما أن البحار و المحيطات تغطي نسبة $70°$ من مساحة الكرة الأرضية فإن القارات تغطي نسبة $30°$ من هذه المساحة.

إذا رمزنا إلى مساحة الكرة الأرضية بِـ A و إلى المساحة التي تغطيها القارات بِـ A' يكون لدينا: $A' = \frac{30}{100} \times A$. نعلم أن $A = 4\pi 6730^2$ و منه

$A = 181171600\pi\ km^2$

و بالتالي فإن $A' = \frac{3}{10} \times 181171600\pi\ km^2$ أي $A' = 170750210\ km^2$

وزارة التربية الوطنية. المركز الوطني لإدماج الابتكارات البيداغوجية و تنمية تكنولوجيات الإعلام و الاتصال في التربية ، فيفري 2009

حل التمرين2

$V=\frac{4}{3}\pi R^3$ و منه $V=\frac{4}{3}\pi(12)^3$ وهكذا نجد $V\approx 7238cm^3$.

ا- $R'=\frac{4}{15}R$ و منه $R'=\frac{4}{15}\times 12$ و هكذا نجد $R'=3,2cm$.

ب- * الطريقة1: $V'=\left(\frac{4}{15}\right)^3\times V$ و منه $V'=\left(\frac{4}{15}\right)^3\times 7238$.

و بالتالي: $V'=137cm^3$.

* الطريقة2: $V'=\frac{4}{3}\pi R'^3$ و منه $V'=\frac{4}{3}\pi(3,2)^3$

و بالتالي: $V'=137cm^3$.

حل التمرين3

الخزان (خ2) هو تكبير للخزان (خ1) بحيث أن معامل التكبير هو $k=1,5$.

نعلم أن $V_2=(1,5)^3\times V_1$ حيث V_1 هو حجم (خ1) و V_2 هو حجم (خ2)

و منه: $V_1=\frac{V_2}{1,5^3}$ بعد الحساب نجد $V_1=250\ l$.

نعلم أن $A_2=(1,5)^2\times A_1$ حيث A_1 هي مساحة (خ1) و A_2 هي مساحة (خ2).

أي $A_2=2,25\times A_1$ و بما أن كتلة الطلاء و المساحة المصبوغة متناسبان يلزمنا إذن $2,25\times 3kg$ أي $6,75kg$ من الطلاء لصبغ الخزان (خ2).

حل التمرين4

النقط A، B، D في استقامية و بنفس ترتيب النقط A، C، E و لدينا:

$\frac{AB}{AD}=0,25$ و $\frac{AC}{AE}=0,25$ أي $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$ و منه حسب عكس مبرهنة طالس المستقيمان (BC) و (DE) متوازيان.

لدينا $AB=0,25\times AD$ و بالتالي فإن سلم التصغير هو $0,25$.

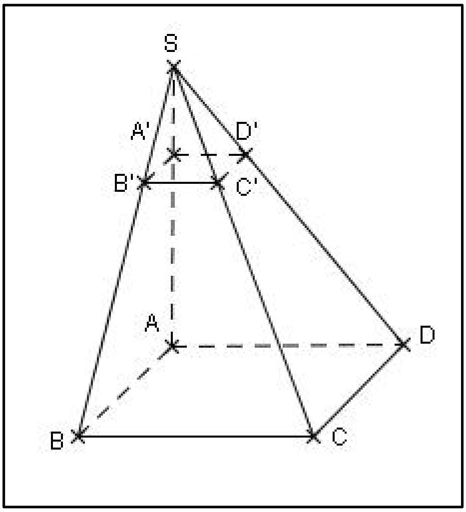
مساحة المثلث ABC هي $A=(0,25)^2\times 112cm^2$

نجد هكذا $A=7\ cm^2$.

وزارة التربية الوطنية. المركز الوطني لإدماج الابتكارات البيداغوجية و تنمية تكنولوجيات الإعلام و الاتصال في التربية ، فيفري 2009

حل المسألة

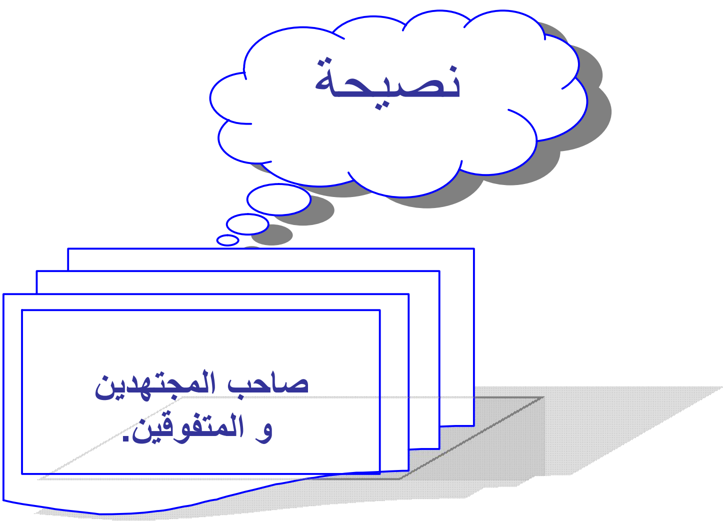
لدينا $SA^2+AB^2=8^2+6^2=100$ و $SD^2=10^2=100$ و بالتالي $SA^2+AB^2=SD^2$. نستنتج أن المثلث SAD قائم في النقطة A.
بنفس الكيفية نثبت إن المثلث SAB قائم في النقطة A.
من السؤال الأول نستنتج أن المستقيم (SA) عمودي على كل من المستقيمين المتقاطعين (AB) و (AD) فهو إذن عمودي على المستوي الذي يشملهما و بالتالي فإن SA هي ارتفاع الهرم.



من $SA'=\frac{1}{4}SA$ نستنتج أن معامل التصغير هو $\frac{1}{4}$.
نعلم أن مقطع هرم بمستو مواز لقاعدته هو تصغير لقاعدته و بما أن القاعدة مستطيل فإن تصغيرها مستطيل و هكذا فإن $A'B'C'D'$ مستطيل و لدينا بما أن معامل التصغير هو $\frac{1}{4}$:

$$A'B'=C'D'=\frac{AB}{4}=\frac{5}{6}cm$$

$$A'D'=B'C'=\frac{AD}{4}=1,5cm$$



وزارة التربية الوطنية. المركز الوطني لإدماج الابتكارات البيداغوجية و تنمية تكنولوجيات الإعلام و الاتصال في التربية ، فيفري 2009

مواضيع مقترحة

الموضوع الأول

الجزء الأول (12 نقطة)

التمرين الأول:

أكتب العبارتين A و B التاليتين على الشكل $a\sqrt{b}$ حيث a و b عددان طبيعيان و b اصغر ما يمكن.

$A=\sqrt{6}\times\sqrt{30}$ و $B=3\sqrt{32}-2\sqrt{50}+11\sqrt{2}$

التمرين الثاني:

لتكن العبارة الجبرية التالية: $E=(2x-1)^2+(4x^2-1)$.

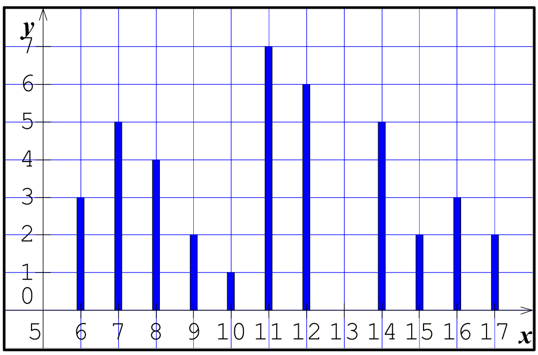
أنشر ثم بسط العبارة الجبرية E.

حلل العبارة الجبرية E.

حل المعادلة $4x(2x-1)=0$.

التمرين الثالث:

إليك المخطط بالأعمدة الممثل لتوزيع العلامات المتحصل عليها في اختبار مادة الرياضيات من قبل تلاميذ أحد أقسام السنة الرابعة متوسط في إحدى المتوسطات.



ما هو عدد تلاميذ هذا القسم ؟

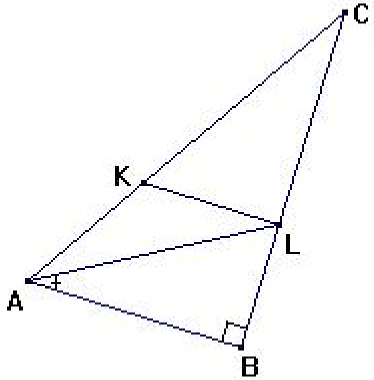
ما هو معدل القسم في الاختبار؟

أحسب وسيط هذه السلسلة.

التمرين الرابع:

ABC مثلث قائم في B بحيث: $AB=12cm$ و $BC=16cm$. ننشئ على $[BC]$ النقطة L بحيث $BL=6cm$ و على $[AC]$ النقطة K بحيث $AK=7,5cm$.

أحسب الطول AC.



بين أن المستقيمين (KL) و (AB) متوازيان.
أحسب القيمة المقربة بالنقصان إلى الوحدة لقيس
الزاوية $\widehat{LAB}$ بالدرجات.
أحسب الطول KL.

الجزء الثاني: مسألة (8 نقط)
يقترح أحد نوادي اللأنترنيت على زبنائه خيارين:
الخيار الأول: يسدد الزبون مبلغ $60DA$ للاستفادة من ساعة واحدة.
الخيار الثاني: يسدد الزبون اشتراكا شهريا قيمته $150DA$ على أن يدفع مبلغ $45DA$ للاستفادة من ساعة واحدة.
ما هو الخيار الأكثر فائدة لزبون استفاد من 7 ساعات خلال شهر واحد.
ما هو الخيار الأكثر فائدة لزبون استفاد من 12 ساعة خلال شهر واحد.
نسمي x عدد الساعات المستفاد منها من قبل زبون خلال شهر واحد و نسمي y_1 المبلغ الشهري المسدد من قبل الزبون في حالة اختياره الخيار الأول بينما نسمي y_2 المبلغ الذي سدده إذا فضل الخيار الثاني.
عبر عن كل من y_1 و y_2 بدلالة x.
نختار في معلم متعامد الوحدات البيانية التالية:
على محور الفواصل يمثل $1cm$ ساعة واحدة و يمثل $1cm$ على محور التراتيب $100DA$.
أنشئ في المعلم السابق المستقيمين (d_1) و (d_2) الممثلين على التوالي للدالتين f_1 و f_2 المعرفتين كما يلي: $f_1(x) = 60x$ و $f_2(x) = 45x + 150$
اعتمادا على البيان حدد أفضل الخيارين تبعا لعدد الساعات المستفاد منها خلال شهر واحد.

الموضوع الثاني

الجزء الأول (12 نقطة)
التمرين الأول:
أحسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 325 و 500.
أكتب الكسر $\frac{325}{500}$ على شكل كسر غير قابل للاختزال.

وزارة التربية الوطنية. المركز الوطني لإدماج الابتكارات البيداغوجية و تنمية تكنولوجيات الإعلام و الاتصال في التربية ، فيفري 2009

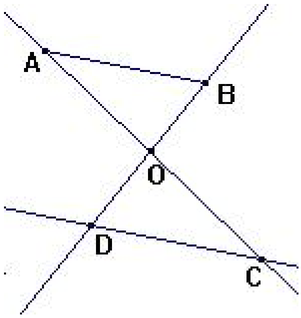
التمرين الثاني:

لتكن العبارة الجبرية التالية: $E=(2x+3)(2-x)+(2x+3)^2$.

1.أنشر ثم بسط العبارة الجبرية E .

2.حلل العبارة الجبرية E إلى جداء عاملين من الشكل $(ax+b)$

3.حل المعادلة $(2x+3)(x+5)=0$.



التمرين الثالث:

في الشكل المقابل لدينا المعطيات التالية:

$OA=5cm$ ، $OB=3cm$ ، $OC=2cm$ ، $OD=1,2cm$.

بين أن المستقيمين (DC) و (AB) متوازيان.

احسب AB علما أن $DC=4cm$

التمرين الرابع:

ABC مثلث بحيث: $AB=8cm$ ، $AC=6cm$ و $BC=10cm$.

بين أن المثلث ABC قائم في النقطة A .

أحسب $\tan\widehat{ACB}$ ثم أحسب قيس الزاوية $\widehat{ACB}$ بالتدوير إلى الوحدة من الدرجة.

لتكن النقطة K من $[AC]$ بحيث $AK=2cm$. المستقيم الموازي للمستقيم (AB) و المار من النقطة K يقطع المستقيم (BC) في نقطة L . احسب الطول BL .

الجزء الثاني: مسألة (8 نقط)

القسم الأول:

مؤسسة تصنع علبا للتصبير، وتقترح نمطين من البيع:

النمط الأول: $25DA$ للعلبة الواحدة.

النمط الثاني: $15DA$ للعلبة الواحدة زائد مبلغ جزافي $50DA$.

1) احسب ثمن 30 علبة وثمن 50 علبة حسب النمط الأول، ثمّ حسب النمط الثاني.

2) نرمز بـِ x إلى عدد العلب المنتجة، عبر بدلالة x عن ثمنها حسب كلّ من النمطين.

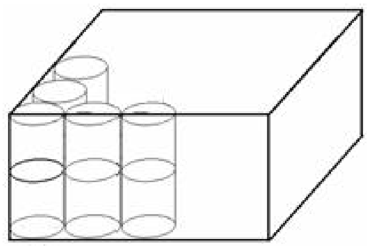
3) لتكن $P_1(x)=25x$ و $P_2(x)=15x+50$

أنشئ في معلم متعامد المستقيمين (D_1) و (D_2) الممثلين للدالتين P_1 و P_2 على الترتيب، (نأخذ على محور الفواصل $0,5cm$ لكل علبة وعلى محور التراتيب $1cm$ لكل $100DA$)

وزارة التربية الوطنية. المركز الوطني لإدماج الابتكارات البيداغوجية و تنمية تكنولوجيات الإعلام و الاتصال في التربية ، فيفري 2009

4) بقراءة بيانية بسيطة أجب عن الأسئلة الثلاثة الآتية:
أ) ما هو أكبر عدد من العلب التي يمكن شراءها بـِ $500DA$ ؟
ب) من أجل أي عدد من العلب يكون الثمنان متساويين ؟
ج) ما هو الشرط الذي يكون من أجله النمط الثاني أفضل من النمط الأول بالنسبة إلى المشتري ؟

القسم الثاني:
تصنع كلّ علبة على شكل اسطوانة نصف قطر قاعدتها $5cm$ وارتفاعها $20cm$ ، ويغلّف كلّ سطحها الجانبي بورقة إشهارية.
1) احسب القيمة المضبوطة لمساحة هذه الورقة، والقيمة المقربة بأخذ $\pi = 3{,}14$.
2) احسب سعة كلّ علبة بالسنتيمتر المكعّب، ثمّ باللتر.
3) توضع العلب في صناديق على شكل متوازي مستطيلات كما هو مبين في الشّكل المرفق. ما هي أبعاد كلّ صندوق كي يسع 100 علبة ؟



الموضوع الثالث

الجزء الأول (12 نقطة)

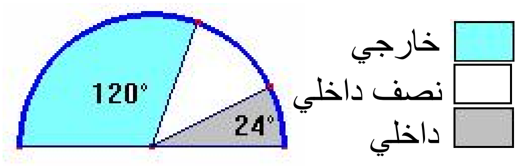
التمرين الأول:
أكتب على الشكل $a\sqrt{5}$ حيث a عدد طبيعي كلا من العددين التاليين:
$$B = 2\sqrt{20} - 3\sqrt{80} + 2\sqrt{125} \quad \text{و} \quad A = \sqrt{12} \times \sqrt{15}$$
تحقق أن العدد $\frac{A}{B}$ عدد طبيعي.

التمرين الثاني:
لتكن العبارة الجبرية التالية: $E = (2x+5)^2 - (x-2)^2$.
1.أنشر ثم بسط العبارة الجبرية E .
2.حلل العبارة الجبرية E إلى جداء عاملين من الشكل $(ax+b)$
حل المعادلة $(x+7)(3x+3) = 0$

وزارة التربية الوطنية. المركز الوطني لإدماج الابتكارات البيداغوجية و تنمية تكنولوجيات الإعلام و الاتصال في التربية ، فيفري 2009

التمرين الثالث:

يمثل المخطط نصف الدائري المرفق توزيع 630 تلميذ لإحدى المتوسطات حسب الصنف.



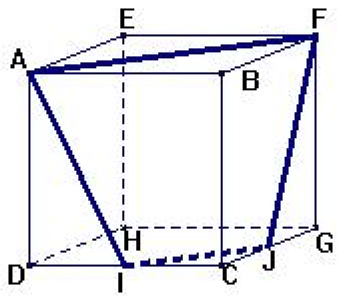
أحسب قيس الزاوية الموافقة لصنف النصف الداخليين.

حدد جدول التكرارات و التكرارات النسبية (التواثرات).

التمرين الرابع:

$ABCDEFGH$ مكعب طول حرفه $3cm$.

نعتبر النقطتين I و J حيث I منتصف القطعة $[CD]$ و J منتصف القطعة $[CG]$.



ما نوع الرباعي $AIJF$ ؟ برر إجابتك.

ماذا يمثل هذا الرباعي بالنسبة للمكعب $ABCDEFGH$ ؟

احسب محيط الرباعي $AIJF$.

الجزء الثاني: مسألة (8 نقط)

تقترح إحدى المجلات الأسبوعية على زبائنها خيارين لاقتناء مجلاتها:

الخيار الأول: يسدد الزبون مبلغ $30DA$ للحصول على مجلة واحدة.

الخيار الثاني: يسدد الزبون اشتراكا سنويا قيمته $300DA$ على أن يدفع مبلغ $20DA$ للحصول على مجلة واحدة.

أحسب المبلغ المسدد للحصول على 10 مجلات ثم على 50 مجلة بالنسبة لكل خيار.

نسمي x عدد المجلات التي يتحصل عليها زبون خلال سنة واحدة و ليكن y_1 المبلغ السنوي المسدد من قبل الزبون في حالة الخيار الأول و y_2 المبلغ المسدد في حالة الخيار الثاني.

عبر عن كل من y_1 و y_2 بدلالة x.

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;I,J)$ بحيث $1cm$ يمثل 10 مجلات على محور الفواصل بينما $1cm$ يمثل $200DA$ على محور التراتيب.

أنشئ المستقيمين (d_1) و (d_2) اللذين معادلتاهما: $y = 30x$ و $y = 20x + 300$ على الترتيب.

باستعمال التمثيل البياني السابق أجب عن الأسئلة التالية:

وزارة التربية الوطنية. المركز الوطني لإدماج الابتكارات البيداغوجية و تنمية تكنولوجيات الإعلام و الاتصال في التربية ، فيفري 2009

ما هو أحسن الخيارين إذا اشترى زبون 25 مجلة ؟
ما هو المبلغ الذي يجب تسديده للحصول على 60 مجلة ؟
بتسديد مبلغ $1200\,DA$ ما هو عدد المجلات المحصل عليها بالنسبة للخيارين ؟
حل المتراجحة التالية: $30x \le 20x + 300$ ثم عقب على النتيجة.

الموضوع الرابع

الجزء الأول (12 نقطة)

التمرين الأول:

أحسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 147 و 84.
لمساعدة التلاميذ المعوزين قامت جمعية أولياء التلاميذ لإحدى المتوسطات بتوزيع 147 كراسا و 84 قلما عليهم بطريقة عادلة على شكل مجموعات متماثلة.

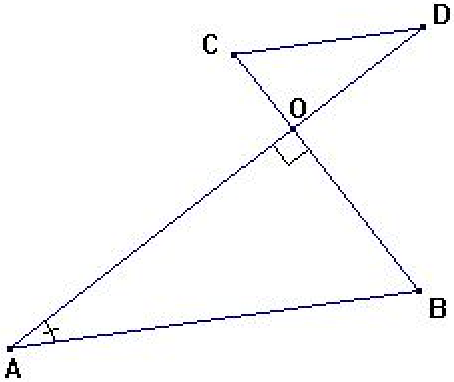
* ما هو أكبر عدد ممكن من التلاميذ المستفيدين من هذه الإعانة ؟
* ما هو عدد الكراريس و عدد الأقلام التي يستفيد منها كل تلميذ ؟

التمرين الثاني:

لتكن العبارة الجبرية التالية: $E = (3x-2)^2 + (3x-2)(x+1)$.

1. أنشر ثم بسط العبارة الجبرية E.
2. حلل العبارة الجبرية E.
3. حل المعادلة $E = 0$.

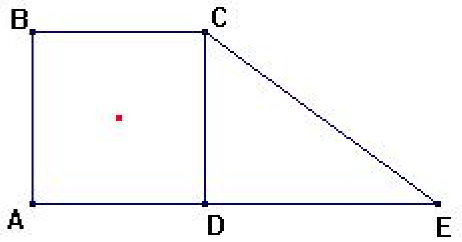
التمرين الثالث:



في الشكل المقابل لدينا المعطيات التالية:
$OA = 4\sqrt{3}\,cm$ ، $OD = 2\sqrt{3}\,cm$ ،
$OC = 2cm$
$\widehat{AOB} = 90^\circ$ و $\widehat{OAB} = 30^\circ$.
أحسب الطول OB.
بين أن المستقيمين (AB) و (CD) متوازيان.

التمرين الرابع: المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; I, J)$.

علم النقط $A\left(3;2\right)$ ، $B\left(1;4\right)$ و $C\left(-5;-2\right)$.
أحسب الأطوال AB ، AC و BC ثم بين أن المثلث ABC قائم.
عين إحداثيي النقطة D صورة النقطة A بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{BC}$.
ما هي طبيعة الرباعي $ABCD$ ؟ علل إجابتك.



الجزء الثاني: مسألة (8 نقط)
اشترى أحمد و بومدين قطعتي أرض متجاورتين
كما هو موضح في الشكل المقابل علما أن:
$ABCD$ مربع و CDE مثلث قائم.
وحدة الطول هي المتر (m).

الفرع الأول:
دفع أحمد مبلغ $320\,000\,DA$ ثمن القطعة المربعة $ABCD$ علما أن ثمن المتر المربع هو $200\,DA$.
أحسب مساحة قطعة أحمد.
استنتج طول القطعة $[AB]$.
دفع بومدين $250\,DA$ للمتر المربع بقصد شراء قطعته.
أحسب مساحة قطعة بومدين إذا علمت أن $DE = 50m$.
استنتج ثمن قطعة بومدين.

الفرع الثاني:
اشترى بومدين من أحمد الجزء CDM حيث M نقطة من القطعة المستقيمة $[DA]$.
فيما يلي نأخذ: $AB = 40m$ ، $DE = 50m$ و نضع $DM = x$ مع $0 < x < 40$.
أ) عبر عن المساحة A_{CDM} للمثلثٍ CDM بدلالة x.
ب) استنتج المساحة F_{ABCM} للرباعي $ABCM$ و المساحة G_{CME} للمثلث CME بدلالة x.
جـ) أحسب قيمة x التي من أجلها تكون المساحتان F_{ABCM} و G_{CME} متساويتين.
نعتبر الدالتين f و g المعرفتين بـِ:

$$f : x \mapsto -20x + 1600 \text{ و } g : x \mapsto 20x + 1000$$

حيث x عدد موجب اصغر من 40.
مثل بيانيا في معلم متعامد الدالتين f و g (نأخذ على الورق المليمتري $1cm$ لكل وحدتين على محور الفواصل و $1cm$ لكل 200 وحدة على محور التراتيب).
كيف يمكن إيجاد نتيجة السؤال 1- جـ باستعمال التمثيلات البيانية للسؤال2.

وزارة التربية الوطنية. المركز الوطني لإدماج الابتكارات البيداغوجية و تنمية تكنولوجيات الإعلام و الاتصال في التربية ، فيفري 2009

باستعمال البيان فقط، أجب عن الأسئلة التالية مع التعليل:
ما هي مساحات القطع التابعة لأحمد و لبومدين إذا كانت M منتصف القطعة $[DA]$ ؟
ما هي قيمة x عندما تكون المساحة F_{ABCM} لقطعة أحمد هي 1500 ؟ ما هي عندئذ المساحة G_{CME} لقطعة بومدين ؟

الموضوع الخامس

الجزء الأول (12 نقطة)

التمرين الأول:

حل الجملة التالية: $\begin{cases} 2x+5y=185 \\ 3x+4y=155 \end{cases}$

لشراء قلمين وخمسة كراريس دفعت أسماء مبلغ $185\,DA$ بينما دفعت بشرى لشراء ثلاثة أقلام و أربعة كراريس مبلغ $155\,DA$.
ما هو سعر القلم الواحد و ما هو سعر الكراس الواحد ؟

التمرين الثاني:

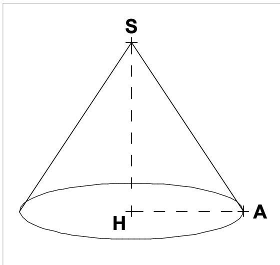
لتكن العبارة الجبرية التالية: $E=(5x-2)^2-(2x+5)^2$.

1. أنشر ثم بسط العبارة الجبرية E .
2. حلل العبارة الجبرية E إلى جداء عاملين من الشكل $(ax+b)$
3. حل المعادلة $(3x-7)(7x+3)=0$.

التمرين الثالث:

ABC مثلث قائم في النقطة A بحيث: $\widehat{ABC}=50°$ و $AB=4cm$.
أحسب الطول AC (يتم تدوير النتيجة إلى $0,1cm$).
حدد وضعية النقطة O مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC . علل إجابتك.
عين قيس الزاوية $\widehat{AOB}$.

التمرين الرابع:



مخروط دوراني رأسه S، ارتفاعه $[SH]$ و نصف قطر قاعدته $[AH]$ بحيث: $SH = 12cm$ و $AH = 8cm$.

عين قيس الزاوية $\widehat{ASH}$ (يتم تدوير النتيجة إلى $0,1$).

أحسب الطول SA.

نقوم بتصغير هذا المخروط للحصول على مخروط جديد ارتفاعه $h' = 8cm$.

أحسب V حجم المخروط الأول.

أحسب k معامل (سلم) التصغير.

أحسب V' حجم المخروط المصغر.

الجزء الثاني: مسألة (8 نقط)

يتلقى عامل في مصنع للمحافظ أجرة أسبوعية قدرها $400DA$ زائد علاوة قدرها $50DA$ عن كل محفظة ينجزها.

القسم الأول:

نرمز بـ x لعدد المحافظ المنجزة خلال الأسبوع و بالرمز y للأجرة الأسبوعية.

1 ـ أنقل وأكمل الجدول التالي :

x	0	2	8	15
y				

2- عبر عن y بدلالة x

3 ـ مثل بيانيا التطبيق التآلفي f المعرف بـ: $f(x) = 50x + 400$

نأخذ $1cm$ من أجل 2 وحدات على محور الفواصل و $1cm$ من أجل 100 وحدة على محور التراتيب.

4 ـ إذا أراد هذا العامل أن تكون أجرته الأسبوعية $1200DA$ ما هو عدد المحافظ التي يجب إنجازها في هذا الأسبوع ؟

القسم الثاني:

عادة هذا العامل أجرته الأسبوعية تقدر بـ $1200DA$. لكن في أحد الأسابيع وقع له عائق فلم ينجز إلا 75% من عدد المحافظ المعتادة .

1 ـ ما هو عدد المحافظ التي أنجزها في هذا الأسبوع ؟

2 ـ ما هي أجرته في هذا الأسبوع ؟

وزارة التربية الوطنية. المركز الوطني لإدماج الابتكارات البيداغوجية و تنمية تكنولوجيات الإعلام و الاتصال في التربية ، فيفري 2009

تصحيح الموضوع الأول

الجزء الأول:

حل التمرين الأول:

$A=\sqrt{6}\times\sqrt{6\times5}=\sqrt{6}\times\sqrt{6}\times\sqrt{5}=\left(\sqrt{6}\right)^2\times\sqrt{5}$ و منه $A=6\sqrt{5}$.

$B=3\sqrt{16\times2}-2\sqrt{25\times2}+11\sqrt{2}=12\sqrt{2}-10\sqrt{2}+11\sqrt{2}$ و منه $B=13\sqrt{2}$.

حل التمرين الثاني:

$E=\left(4x^2-4x+1\right)+\left(4x^2-1\right)$ و منه $E=8x^2-4x$.

لدينا الاختيار بين العبارة الأولى و العبارة الثانية:

- $E=(2x-1)^2+(2x-1)(2x+1)=(2x-1)(2x-1+2x+1)=4x(2x-1)$.
- $E=8x^2-4x=4x(2x-1)$.

$4x(2x-1)=0$ يعني $4x=0$ أو $2x-1=0$ وهذا يعني $x=0$ أو $x=\frac{1}{2}$

للمعادلة حلان هما 0 و $\frac{1}{2}$.

حل التمرين الثالث:

عدد تلاميذ القسم هو 40.

ليكن $\overline{x}$ الوسط الحسابي لهذه السلسلة و هو معدل القسم. لدينا: $\overline{x}=11{,}1$

وسيط هذه السلسلة هو: $M_e=11$.

حل التمرين الرابع:

المثلث ABC قائم في B و منه حسب مبرهنة فيتاغورس $AC^2=AB^2+BC^2$

و بالتالي فإن $AC^2=400$. نستنتج أن $AC=20cm$.

المستقيمان (CA) و (CB) متقاطعان في C. النقط C، K و A في استقامية و بنفس ترتيب النقط C، L و B و لدينا بالإضافة إلى ذلك $\frac{CB}{CL}=\frac{CA}{CK}$ لأن:

$\frac{CA}{CK}=\frac{20}{12,5}=1,6$ و $\frac{CB}{CL}=\frac{16}{10}=1,6$

نستنتج بتطبيق عكس مبرهنة طالس أن المستقيمين (KL) و (AB) متوازيان.

لدينا $\tan \widehat{LAB}=\frac{BL}{AB}=\frac{6}{12}=0,5$ و منه $\widehat{LAB}=26°$.

بتطبيق مبرهنة طالس يكون لدينا $1,6 = \frac{AB}{KL} = \frac{CB}{CL} = \frac{CA}{CK}$ و بالتالي

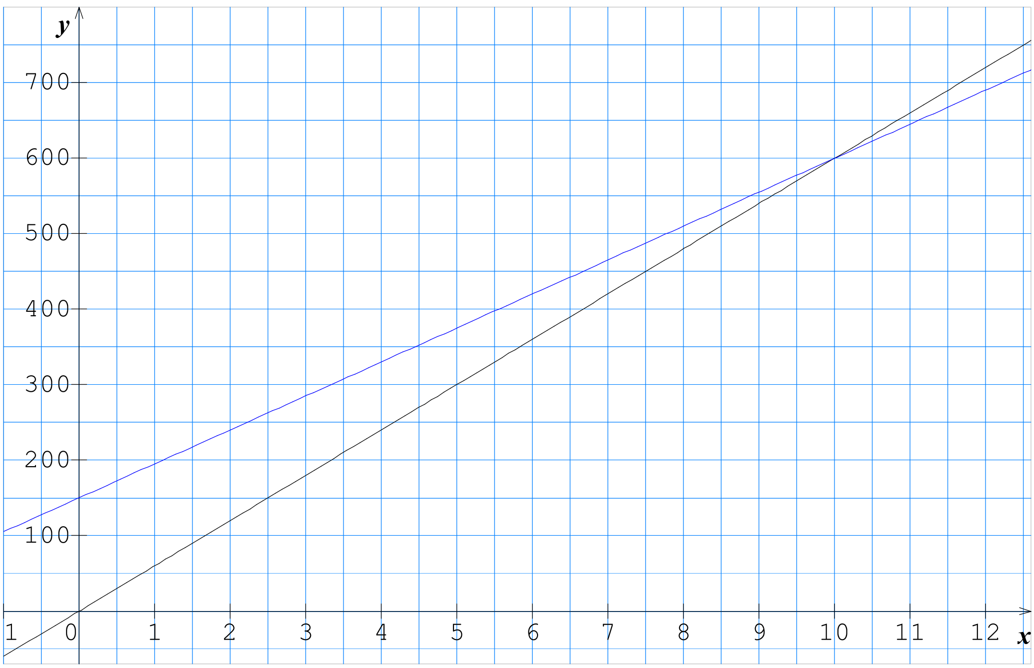
$KL = \frac{AB}{1,6} = \frac{12}{1,6}$ و منه $KL = 7,5cm$.

حل الجزء الثاني مسألة :

يدفع الزبون في حالة الخيار الأول $7 \times 60 = 420\,DA$ أما في حالة الخيار الثاني يدفع $7 \times 45 + 150 = 465\,DA$ و بالتالي فالخيار الأول أكثر فائدة.

يدفع الزبون في حالة الخيار الأول $12 \times 60 = 720\,DA$ أما في حالة الخيار الثاني يدفع $12 \times 45 + 150 = 690\,DA$ و بالتالي فالخيار الثاني أكثر فائدة.

$y_1 = 60x$ ، $y_2 = 45x + 150$.



نلاحظ أن المستقيمين يتقاطعان في النقطة ذات الفاصلة 10 و هذا يعني أنه في حالة الخيارين يدفع الزبون نفس المبلغ و الذي هو $600\,DA$. كما نلاحظ أنه من أجل x اصغر من 10 يكون المستقيم (d_1) أسفل المستقيم (d_2) و بالتالي فإن أفضل الخيارين في هذه الحالة هو الخيار الأول أما من أجل x أكبر من 10 فإن أفضل الخيارين هو الخيار الثاني.

وزارة التربية الوطنية. المركز الوطني لإدماج الابتكارات البيداغوجية و تنمية تكنولوجيات الإعلام و الاتصال في التربية ، فيفري 2009

تصحيح الموضوع الثاني

الجزء الأول :

حل التمرين الأول:

لدينا باستعمال خوارزمية إقليدس

$$500 = 325 \times 1 + 175$$
$$325 = 175 \times 1 + 150$$
$$175 = 150 \times 1 + 25$$
$$150 = 25 \times 6 + 0$$

و منه $PGCD(500;325) = 25$.

$\frac{325}{500} = \frac{13 \times 25}{20 \times 25}$ و منه $\frac{325}{500} = \frac{13}{20}$.

حل التمرين الثاني:

$$E = \left(4x - 2x^2 + 6 - 3x\right) + \left(4x^2 + 12x + 9\right)$$
$$E = 2x^2 + 13x + 15$$
$$E = (2x + 3)(2 - x + 2x + 3)$$
$$E = (2x + 3)(x + 5)$$

$(2x+3)(x+5) = 0$ يعني $2x + 3 = 0$ أو $x + 5 = 0$ وهذا يعني

$x = -\frac{3}{2}$ أو $x = -5$ و منه للمعادلة حلين هما $-\frac{3}{2}$ و -5 .

حل التمرين الثالث:

المستقيمان (BD) و (AC) متقاطعان في O. النقط D ، O و B في استقامية

و بنفس ترتيب النقط C ، O و A كما أن $\frac{OA}{OC} = 2{,}5$ و $\frac{OB}{OD} = 2{,}5$ أي $\frac{OB}{OD} = \frac{OA}{OC}$

و منه حسب عكس مبرهنة طالس فإن المستقيمين (AB) و (DC) متوازيان.

بتطبيق مبرهنة طالس يكون لدينا $\frac{AB}{DC} = \frac{OB}{OD} = \frac{OA}{OC}$ و منه $AB = DC \times \frac{OA}{OC}$

و بالتالي $AB = 4 \times 2{,}5$. نجد هكذا $AB = 10cm$.

حل التمرين الرابع :

لدينا $AB^2 + AC^2 = 100$ و $BC^2 = 100$ و منه $AB^2 + AC^2 = BC^2$

نستنتج حسب مبرهنة فيثاغورس أن المثلث ABC قائم في النقطة A .

وزارة التربية الوطنية. المركز الوطني لإدماج الابتكارات البيداغوجية و تنمية تكنولوجيات الإعلام و الاتصال في التربية ، فيفري 2009

$\tan \widehat{ACB} = \frac{AB}{AC}$ و منه $\tan \widehat{ACB} = \frac{4}{3}$ و بالتالي $\widehat{ACB} = 53°$

بتطبيق مبرهنة طالس يكون لدينا $\frac{AB}{KL} = \frac{CB}{CL} = \frac{CA}{CK}$ و منه $CL = \frac{CB \times CK}{CA}$

نجد هكذا $CL = \frac{20}{3}cm$. لدينا $BL = BC - CL$ و منه $BL = \frac{10}{3}cm$.

حل الجزء الثاني: مسألة

القسم الأول

ثمن 30 علبة حسب النمط الأول هو $25 \times 30 = 750\,DA$.

ثمن 30 علبة حسب النمط الثاني هو $15 \times 30 + 50 = 500\,DA$.

ثمن 50 علبة حسب النمط الأول هو $25 \times 50 = 1250\,DA$.

ثمن 50 علبة حسب النمط الثاني هو $15 \times 50 + 50 = 800\,DA$.

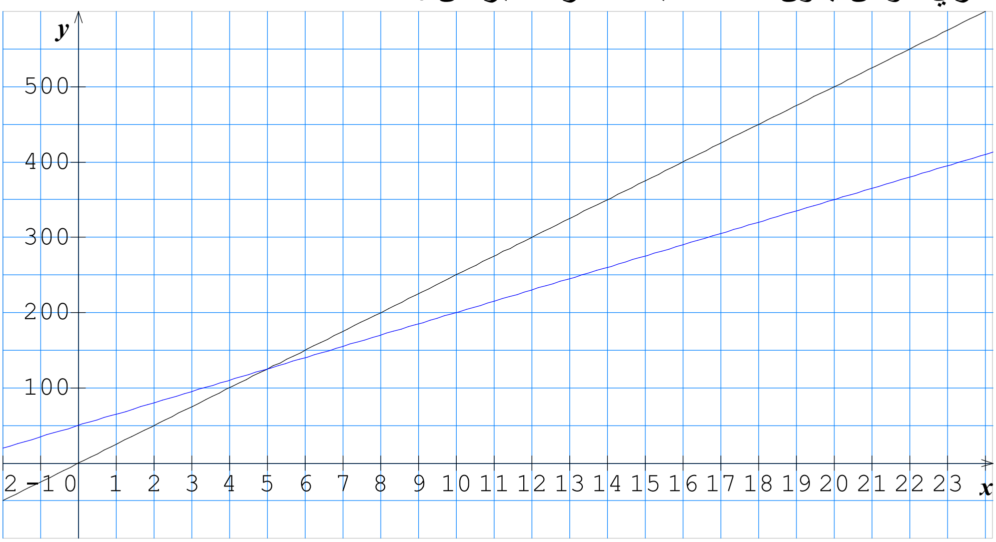
ثمنها حسب النمط الأول هو $25x$ بينما ثمنها حسب النمط الثاني هو $15x + 50$

أنظر الرسم المرفق.

أ) أكبر عدد من العلب التي يمكن شراءها بـ $500\,DA$ هو 20 علبة.

ب) يكون الثمنان متساويين من اجل 5 علب.

جـ) الشرط الذي يكون من أجله النمط الثاني أفضل من النمط الأول بالنسبة للمشتري هو ان يكون عدد العلب المشتراة أكبر من 5.



القسم الثاني:

القيمة المضبوطة لمساحة الورقة الإشهارية هي $2\pi \times 5 \times 20 = 200\pi\, cm^2$ بينما

قيمتها المقربة هي $628cm^2$.

سعة كل علبة هي $\pi \times 5^2 \times 20 = 1570cm^3$ أي $1,57l$.

$50 \times 2 = 100$ و $10 \times 5 = 50$ و منه أبعاد الصندوق هي $40 \times 100 \times 50$.

تصحيح الموضوع الثالث

الجزء الأول (12 نقطة)

حل التمرين الأول

$A = \sqrt{4\times 3} \times \sqrt{3\times 5} = 2\left(\sqrt{3}\right)^2 \sqrt{5}$ و منه $A = 6\sqrt{5}$.

$B = 2\sqrt{4\times 5} - 3\sqrt{16\times 5} + 2\sqrt{25\times 5} = 4\sqrt{5} - 12\sqrt{5} + 10\sqrt{5}$ و منه $B = 2\sqrt{5}$.

$\dfrac{A}{B} = \dfrac{6\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$ و منه $\dfrac{A}{B} = 3$. إذن $\dfrac{A}{B}$ عدد طبيعي.

حل التمرين الثاني

$$E = \left(4x^2 + 20x + 25\right) - \left(x^2 - 4x + 4\right)$$
$$E = 4x^2 + 20x + 25 - x^2 + 4x - 4$$
$$E = 3x^2 + 24x + 21$$
$$E = \left[\left(2x+5\right) - \left(x-2\right)\right]\left[\left(2x+5\right) + \left(x-2\right)\right]$$
$$E = \left(2x + 5 - x + 2\right)\left(2x + 5 + x - 2\right)$$
$$E = \left(x+7\right)\left(3x+3\right)$$

$\left(x+7\right)\left(3x+3\right) = 0$ يعني $x + 7 = 0$ أو $3x + 3 = 0$ أي $x = -7$ أو $x = -1$

للمعادلة حلان هما -7 و -1.

حل التمرين الثالث

نعلم أن قيس زاوية مستقيمة هو $180°$ و منه قيس الزاوية الموافقة لصنف النصف الداخليين هو $180 - 120 - 24$ أي $36°$.

باستعمال العلاقة التالية: التكرار هو $\dfrac{\alpha° \times 630}{180°}$ نتحصل على مختلف التكرارات

وزارة التربية الوطنية. المركز الوطني لإدماج الابتكارات البيداغوجية و تنمية تكنولوجيات الإعلام و الاتصال في التربية ، فيفري 2009

الفئة	داخلي	نصف داخلي	خارجي
الزاوية	$24°$	$36°$	$120°$
التكرار	84	126	420
التواتر	$\frac{84}{630}$	$\frac{126}{630}$	$\frac{420}{630}$

حل التمرين الرابع

بتطبيق مبرهنة مستقيم المنتصفين في المثلث CDG يكون لدينا:

$(DG)//(IJ)$ و $DG=2IJ$ و بما أن $(DG)//(AF)$ و $AF=DG$ فإن

$(AF)//(IJ)$ و $AF=2IJ$ ... (1)

لدينا من جهة ثانية المثلثان ADI و FGJ متقايسان و منه $AI=FJ$ ... (2)

من (1) و (2) نستنتج أن الرباعي $AIJF$ شبه منحرف متساوي الساقين.

الرباعي $AIJF$ هو مقطع المكعب $ABCDEFGH$ بالمستوي (AFI).

لدينا $AF^2=AB^2+BF^2=18$ و منه $AF=3\sqrt{2}cm$ و بالتالي $IJ=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

لدينا كذلك $AI^2=AD^2+DI^2=\frac{45}{4}$ و منه $AI=FJ=\frac{3\sqrt{5}}{2}cm$

لدينا $AF+IJ+2\times AI=\frac{3\sqrt{2}}{2}+3\sqrt{5}$ و منه $AF+IJ+2\times AI=13,06cm$

إذن محيط الرباعي $AIJF$ هو $13,06cm$.

الجزء الثاني: مسألة (8 نقط)

* المبلغ المسدد للحصول على 10 مجلات بالنسبة للخيار 1: $30\times 10=300DA$
* المبلغ المسدد للحصول على 10 مجلات بالنسبة للخيار 2: $20\times 10+300=500DA$
* المبلغ المسدد للحصول على 50 مجلة بالنسبة للخيار 1: $30\times 50=1500DA$
* المبلغ المسدد للحصول على 50 مجلة بالنسبة للخيار 2: $20\times 50+300=1300DA$

$y_1=30x$ ، $y_2=20x+300$

أنظر الرسم المرفق.

أحسن الخيارين في حالة شراء 25 مجلة هو الخيار الأول.

المبلغ المسدد في حالة شراء 60 هو $1800\,DA$ بالنسبة للخيار الأول و هو $1500\,DA$ بالنسبة للخيار الثاني.

عدد المجلات المتحصل عليها بتسديد $1200\,DA$ هو 40 بالنسبة للخيار الأول و هو 45 بالنسبة للخيار الثاني.

- $30x \le 20x + 300$ يعني $x \le 30$ و هذا يعني أن أحسن الخيارين هو الأول في حالة شراء أقل من 30 مجلة أما في حالة شراء أكثر من 30 مجلة فيكون الخيار الثاني الأفضل.

وزارة التربية الوطنية. المركز الوطني لإدماج الابتكارات البيداغوجية و تنمية تكنولوجيات الإعلام و الاتصال في التربية ، فيفري 2009

تصحيح الموضوع الرابع

الجزء الأول (12 نقطة)

حل التمرين الأول

لدينا باستعمال خوارزمية إقليدس

$$147 = 84 \times 1 + 63$$
$$84 = 63 \times 1 + 21$$
$$63 = 21 \times 3 + 0$$

و منه $PGCD(147;84) = 21$.

* إذا رمزنا بـِ n إلى أكبر عدد ممكن من التلاميذ المستفيدين فإن العدد n هو القاسم المشترك الكبر للعددين 147 و 84 . و منه $n = 21$.
* لدينا $147 \div 21 = 7$ و $84 \div 21 = 4$ و بالتالي يستفيد كل تلميذ من 7 كراريس و 4 أقلام.

حل التمرين الثاني

$$E = \left(9x^2 - 12x + 4\right) + \left(3x^2 + 3x - 2x - 2\right)$$
$$E = 9x^2 - 12x + 4 + 3x^2 + 3x - 2x - 2$$
$$E = 12x^2 - 11x + 2$$
$$E = (3x - 2)(3x - 2 + x + 1)$$
$$E = (3x - 2)(4x - 1)$$

$E = 0$ يعني $(3x - 2)(4x - 1) = 0$ أي $3x - 2 = 0$ أو $4x - 1 = 0$ و بالتالي فإن حلول هذه المعادلة هما $\frac{2}{3}$ و $\frac{1}{4}$.

حل التمرين الثالث

$\tan 30° = \frac{OB}{OA}$ و منه $OB = OA \times \tan 30°$ و هكذا نجد $OB = 4\sqrt{3} \times \frac{1}{\sqrt{3}}$

و بالتالي فإن $OB = 4cm$.

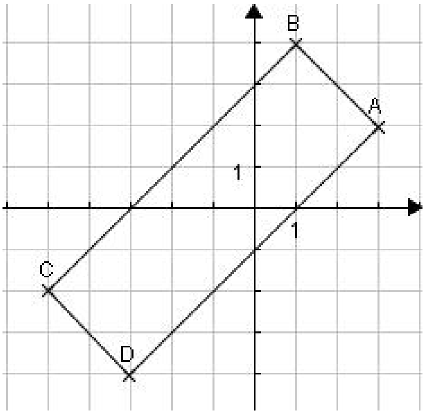
المستقيمان (AD) و (BC) متقاطعان في O. النقط D، O و A في استقامية

وزارة التربية الوطنية. المركز الوطني لإدماج الابتكارات البيداغوجية و تنمية تكنولوجيات الإعلام و الاتصال في التربية ، فيفري 2009

و بنفس ترتيب النقط C، O و B كما أن $\frac{OA}{OD}=2$ و $\frac{OB}{OC}=2$ أي $\frac{OA}{OD}=\frac{OB}{OC}$

و منه حسب عكس مبرهنة طالس فإن المستقيمين (AB) و (CD) متوازيان.

حل التمرين الرابع



أنظر الشكل المقابل.

لدينا $AB=2\sqrt{2}$، $AC=4\sqrt{5}$

و $BC=6\sqrt{2}$.

لدينا $AB^2+BC^2=80$ و $AC^2=80$

و منه $AB^2+BC^2=AC^2$. نستنتج أن المثلث ABC قائم في النقطة B.

لدينا $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{BC}(-6;-6)$

لدينا $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{BC}(-6;-6)$

إذا فرضنا $D(x;y)$ يكون لدينا:

$\begin{cases} x-3=-6 \\ y-2=-6 \end{cases}$ أي $\begin{cases} x=-3 \\ y=-4 \end{cases}$ و منه $D(-3;-4)$.

الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع و بما أن إحدى زواياه قائمة فهو إذن مستطيل.

الجزء الثاني: مسألة (8 نقط)

حل الفرع الأول:

مساحة قطعة أحمد هي $320\,000 \div 200 = 1600\,m^2$ و بما أن القطعة مربعة الشكل فإن $AB=\sqrt{1600}\,m$ و هكذا نجد $AB=40\,m$.

مساحة قطعة بومدين هي $\frac{DE\times DC}{2}=\frac{50\times 40}{2}=1000\,m^2$ و بالتالي فإن ثمن قطعة بومدين هو $1000\times 250=250\,000\,DA$.

حل الفرع الثاني:

أ) $A_{CDM}=\frac{40\times x}{2}=20x$

ب) $F_{ABCM}=1600-20x$ و $G_{CME}=1000+20x$

جـ) $F_{ABCM}=G_{CME}$ يعني $1600-20x=1000+20x$ أي $40x=600$

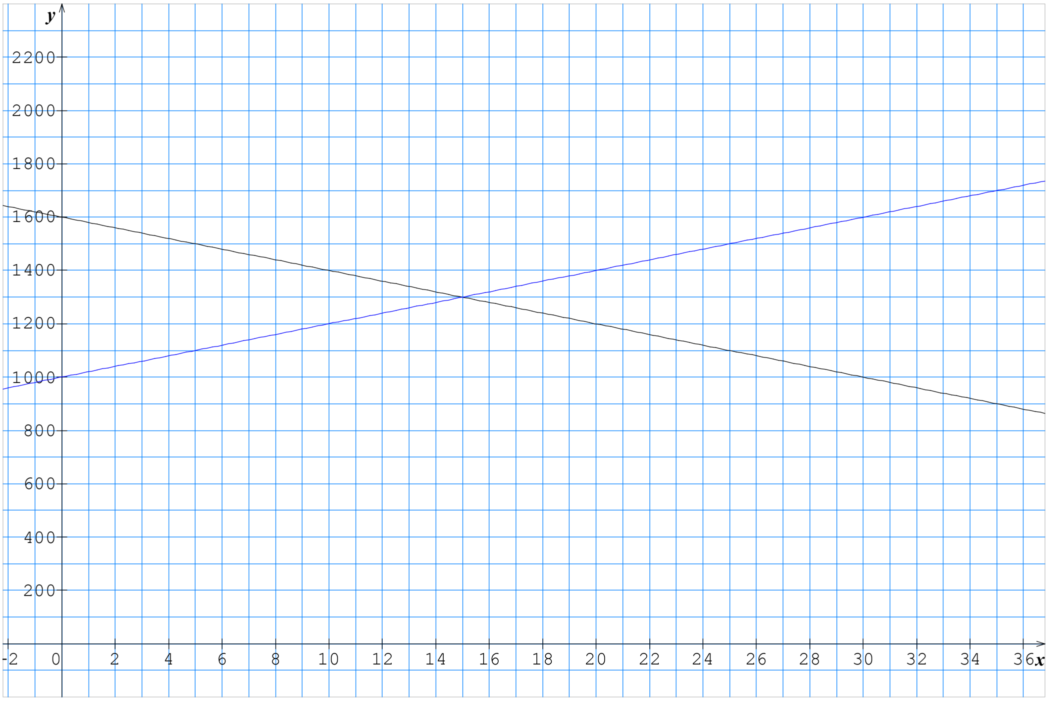
و بالتالي $x=15$.

أنظر الرسم المرفق.

قيمة x في السؤال 1- جـ هي فاصلة نقطة تقاطع المستقيمين الممثلين لِـ f و g.

M * منتصف القطعة $[DA]$ يعني أن $x=20$ و منه فمساحة أحمد هي $1200m^2$ بينما مساحة بومدين هي $1400\,m^2$.

* تكون $F_{ABCM}=1500$ من أجل $x=5$ و يكون لدينا $G_{CME}=1100m^2$.



تصحيح الموضوع الخامس

لجزء الأول (12 نقطة)

حل التمرين الأول:

لحل الجملة $\begin{cases} 2x+5y=185 & (1) \\ 3x+4y=155 & (2) \end{cases}$ يمكننا مثلا استعمال طريقة الجمع. بضرب طرفي (1) في 3 و ضرب طرفي (2) في (-2) نجد: $\begin{cases} 6x+15y=555 & (1') \\ -6x-8y=-310 & (2') \end{cases}$

من $(1')+(2')$ ينتج $7y=245$ و منه $y=35$. بالتعويض مثلا في المعادلة (1) نحصل على $2x+5\times 35=185$ و منه $2x=10$ أي $x=5$.

للجملة حل وحيد هو الثنائية $(x\,;y)=(2;35)$.

إذا رمزنا إلى ثمن القلم الواحد بـ $x\ DA$ و إلى ثمن الكراس الواحد بالرمز $y\ DA$

يكون لدينا: $\begin{cases} 2x+5y=185 \\ 3x+4y=155 \end{cases}$ و حسب السؤال الأول فإن $x=5$ و $y=35$.

و هكذا فإن ثمن القلم هو $5\,DA$ و ثمن الكراس $35\,DA$.

حل التمرين الثاني:

$$E=\left(25x^2-20x+4\right)-\left(4x^2+20x+25\right)$$

$$E=21x^2-40x-21$$

$$E=\left[\left(5x-2\right)-\left(2x+5\right)\right]\left[\left(5x-2\right)+\left(2x+5\right)\right]$$

$$E=\left(5x-2-2x-5\right)\left(5x-2+2x+5\right)$$

$$E=\left(3x-7\right)\left(7x+3\right)$$

$\left(3x-7\right)\left(7x+3\right)=0$ يعني $3x-7=0$ أو $7x+3=0$ و هذا يعني

$x=\frac{7}{3}$ أو $x=-\frac{3}{7}$. إذن للمعادلة حلان هما $\frac{7}{3}$ و $-\frac{3}{7}$.

حل التمرين الثالث:

$\tan 50°=\frac{AC}{AB}$ و منه $AC=AB\tan 50°$. نجد هكذا $AC=4{,}8cm$.

مركز الدائرة المحيطة بالمثلث القائم ABC هي منتصف وتره و بالتالي فالنقطة O هي منتصف القطعة المستقيمة $[BC]$.

بما أن قيس الزاوية $\widehat{ABC}$ هو $50°$ و علما أن المثلث ABC قائم في A فإن قيس الزاوية $\widehat{ACB}$ هو $40°$. في الدائرة المحيطة بالمثلث ABC الزاوية المحيطية $\widehat{ACB}$ و الزاوية المركزية $\widehat{AOB}$ تحصران نفس القوس و بالتالي فإن $\widehat{AOB}=2\times\widehat{ACB}$ نستنتج هكذا أن قيس الزاوية $\widehat{AOB}$ هو $80°$.

حل التمرين الرابع :

$\tan\widehat{ASH}=\frac{AH}{SH}$ و منه $\tan\widehat{ASH}=0{,}66$ و منه $\widehat{ASH}=33{,}7°$.

$SA^2=SH^2+AH^2=208$ و منه $SA=\sqrt{208}\,cm$.

نذكر أن حجم مخروط دوراني هو $\frac{1}{3}\pi R^2h$ حيث h الارتفاع و R نصف قطر القاعدة.

$V = \frac{1}{3}\pi \times AH^2 \times SH$. نجد $V \approx 804cm^3$.

لدينا $k = \frac{SH}{h'}$ و منه $k = \frac{2}{3}$.

$V' = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times V$. نجد $V' \approx 238cm^3$.

الجزء الثاني: مسألة (8 نقط)

القسم الأول:

x	0	2	8	15
y	400	500	800	1150

$y = 50x + 400$

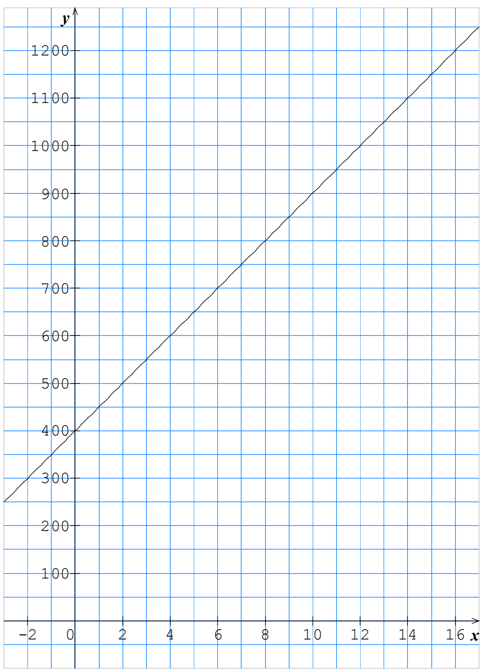
أنظر الرسم المرفق.

من خلال قراءة بيانية فعدد المحافظ التي يجب إنجازها حتى تكون أجرته $1200\,DA$ هو 16 محفظة.

القسم الثاني

عدد المحافظ المنجزة في هذا الأسبوع هو $12 = \frac{16 \times 75}{100}$.

أجرته في هذا الأسبوع هي $12 \times 50 + 400 = 1000\,DA$.



وزارة التربية الوطنية. المركز الوطني لإدماج الابتكارات البيداغوجية و تنمية تكنولوجيات الإعلام و الاتصال في التربية ، فيفري 2009

امتحان شهادة التعليم المتوسط

دورة جوان 2007 **المدة: ساعتان**

الجزء الأول: (12 نقطة)

التمرين الأول: (03 نقط)

ليكن العددان: $A=\sqrt{98}+3\sqrt{32}-\sqrt{128}$ و $B=\frac{3}{2}+\frac{5}{4}\times\frac{2}{3}$

أكتب A على الشكل $a\sqrt{2}$ حيث a عدد طبيعي.

بسط العدد B ثم بين أن: $\frac{A^2}{33}-3B=\frac{1}{3}$

التمرين الثاني: (03 نقط)

لتكن العبارة الجبرية E حيث:

$$E=10^2-(x-2)^2-(x+8)$$

أنشر ثم بسط E.

حلل العبارة $10^2-(x-2)^2$، ثم استنتج تحليل العبارة E.

حل المعادلة: $(11-x)(8+x)=0$

التمرين الثالث: (02.5 نقط)

حل الجملة: $\begin{cases}4x+5y=105\\6x+4y=112\end{cases}$

اشترى رضوان من مكتبة أربعة كراريس و خمسة أقلام بمبلغ $105\ DA$

و اشترت مريم ثلاثة كراريس و قلمين بمبلغ $56\ DA$.

أوجد ثمن الكراس الواحد و ثمن القلم الواحد.

التمرين الرابع: (03.5 نقط)

أرسم المثلث ABC القائم في A حيث: $AB=4,5cm$ و $BC=7,5cm$

أحسب AC.

لتكن النقطة E من $[AB]$ حيث $AB=3AE$ و D نقطة من $[AC]$ حيث

$DC=\frac{2}{3}AC$. عين على الشكل النقطتين E ، D.

وزارة التربية الوطنية. المركز الوطني لإدماج الابتكارات البيداغوجية و تنمية تكنولوجيات الإعلام و الاتصال في التربية ، فيفري 2009

بين أن $(BC)//(DE)$ ثم أحسب DE.

الجزء الثاني: مسألة(08 نقط)

تقترح شركة لسيارات الأجرة التسعيرتين التاليتين:
التسعيرة الأولى: $15\,DA$ للكيلومتر الواحد لغير المنخرطين.
التسعيرة الثانية: $12\,DA$ للكيلومتر الواحد مع مشاركة شهرية قدرها $900\,DA$.

انقل الجدول على ورقة الإجابة ثم أكمله:

المسافة (Km)	60		
التسعيرة الأولى (DA)			5100
التسعيرة الثانية (DA)		3060	

ليكن x عدد الكيلومترات للمسافة المقطوعة.
y_1 هو المبلغ حسب التسعيرة الأولى.
y_2 هو المبلغ حسب التسعيرة الثانية.
عبر عن y_1 و y_2 بدلالة x.
حل المتراجحة $15x > 12x + 900$
في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.
ا- مثل بيانيا الدالتين f، g حيث: $f(x) = 15x$ و $g(x) = 12x + 900$
($1cm$ على محور الفواصل يمثل $50\,Km$، $1cm$ على محور التراتيب يمثل $500\,DA$)
ب- استعمل التمثيل البياني لتحديد أفضل تسعيرة مع الشرح.

الجزء الأول: (12 نقطة)

التمرين الأول: (03 نقط)

ليكن العددان: $A=\sqrt{98}+3\sqrt{32}-\sqrt{128}$ و $B=\frac{3}{2}+\frac{5}{4}\times\frac{2}{3}$

لدينا:

$$A=\sqrt{49\times2}+3\sqrt{16\times2}-\sqrt{64\times2}$$
$$=7\sqrt{2}+3\times4\sqrt{2}-8\sqrt{2}$$
$$=7\sqrt{2}+12\sqrt{2}-8\sqrt{2}$$
$$=(7+12-8)\sqrt{2}$$
$$=11\sqrt{2}$$

و بالتالي $A=11\sqrt{2}$

لدينا: $B=\frac{3}{2}+\frac{10}{12}=\frac{3}{2}+\frac{5}{6}=\frac{9}{6}+\frac{5}{6}=\frac{14}{6}=\frac{7}{3}$

لدينا: $\frac{A^2}{33}-3B=\frac{\left(11\sqrt{2}\right)^2}{33}-3\times\frac{7}{3}=\frac{11\times11\times2}{33}-\frac{21}{3}=\frac{11\times2}{3}-\frac{21}{3}=\frac{22}{3}-\frac{21}{3}$

و منه $\frac{A^2}{33}-3B=\frac{1}{3}$

التمرين الثاني: (03 نقط)

لتكن العبارة الجبرية E حيث: $E=10^2-(x-2)^2-(x+8)$

$$E=100-\left(x^2-4x+4\right)-(x+8)=100-x^2+4x-4-x-8$$

و منه $E=-x^2+3x+88$

لدينا:

$$10^2-(x-2)^2=\left[10-(x-2)\right]\left[10+(x-2)\right]=(10-x+2)(10+x-2)$$

و منه $10^2-(x-2)^2=(12-x)(8+x)$

لدينا: $E=(12-x)(8+x)-(x+8)=(8+x)(12-x-1)$

وزارة التربية الوطنية. المركز الوطني لإدماج الابتكارات البيداغوجية و تنمية تكنولوجيات الإعلام و الاتصال في التربية ، فيفري 2009

و منه $E=(8+x)(11-x)$

$(11-x)(8+x)=0$ يعني $11-x=0$ أو $8+x=0$

أي $x=11$ أو $x=-8$

للمعادلة حلان هما: 11 و -8.

التمرين الثالث: (02.5 نقط)

نلاحظ أنه بالإمكان تبسيط المعادلة الثانية من الجملة للحصول على الجملة

$$\begin{cases} 4x+5y=105 & (1) \\ 3x+2y=56 & (2) \end{cases}$$

لحل هذه الجملة يمكن استعمال طريقة الحل بالجمع أو طريقة الحل بالتعويض.

<u>طريقة الحل بالجمع:</u>

نضرب المعادلة (1) في (-2) و نضرب المعادلة (2) في 5 لنحصل هكذا على الجملة: $\begin{cases} -8x-10y=-210 & (1') \\ 15x+10y=280 & (2') \end{cases}$ و بجمع المعادلتين $(1')$ و $(2')$ طرف لطرف نحصل على المعادلة ذات المجهول x التالية: $7x=70$ أي $x=10$.

بتعويض x بـِ 10 في إحدى معادلتي الجملة، مثلا في (1)، نحصل على المعادلة ذات المجهول y التالية: $40+5y=105$ أي $5y=65$ و منه $y=15$.

إذن للجملة حل وحيد هو $(x;y)=(10;15)$.

<u>ملاحظة:</u> بالطبع نحصل على نفس الحل بإتباع طريقة الحل بالتعويض.

لنرمز بـِ $x(DA)$ إلى ثمن الكراس الواحد و بـِ $y(DA)$ إلى ثمن القلم الواحد

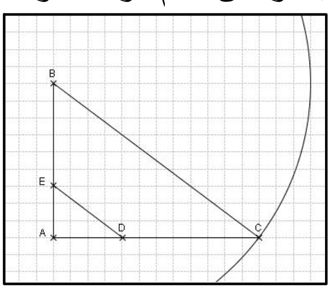
لدينا إذن: $\begin{cases} 4x+5y=105 \\ 3x+2y=56 \end{cases}$

و بالتالي حسب السؤال الأول لدينا: $x=10$ و $y=15$.

إذن ثمن الكراس الواحد هو $10DA$ و ثمن القلم الواحد هو $15DA$.

التمرين الرابع: (03.5 نقط)

أنظر الشكل المقابل



حساب AC:

لدينا حسب مبرهنة فيثاغورس: $BC^2 = AB^2 + AC^2$ ومنه $AC^2 = BC^2 - AB^2$

إذن $AC^2 = (7,5)^2 - (4.5)^2$ نجد هكذا $AC^2 = 36$ أي $AC = 6$

أنظر الشكل أعلاه.

لدينا: $AB = 3AE$ و منه $AE = \frac{1}{3}AB$ و بما أن $AB = 4,5cm$ فإن

$AE = 1,5cm$. كما أن $DC = \frac{2}{3}AC$ و بما أن $AC = 6cm$ فإن $DC = 4cm$.

علما أن $AD = AC - DC$ فإن $AD = 2cm$.

لدينا من جهة $\frac{AC}{AD} = \frac{6}{2} = 3$ و لدينا من جهة ثانية $\frac{AB}{AE} = \frac{4,5}{1,5} = \frac{45}{15} = 3$

أي أن $\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AD}$ و منه حسب المبرهنة العكسية لمبرهنة فيثاغورس لدينا:

$$(BC)//(DE)$$

حساب DE.

بتطبيق مبرهنة فيثاغورس يكون لدينا: $\frac{BC}{DE} = \frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AD}$ و منه $\frac{BC}{DE} = 3$

أي $DE = \frac{BC}{3} = \frac{7,5}{3} = 2,5$ إذن $DE = 2,5cm$.

ملاحظة: كان بالإمكان تطبيق مبرهنة فيثاغورس في المثلث ADE القائم في النقطة A.

الجزء الثاني: مسألة (08 نقط)

المسافة (Km)	60	180	340
التسعيرة الأولى (DA)	900	2700	5100
التسعيرة الثانية (DA)	1620	3060	4980

لدينا $y_1 = 15x$ و $y_2 = 12x + 900$

$15x > 12x + 900$ يعني $15x - 12x > 900$ أي $3x > 900$

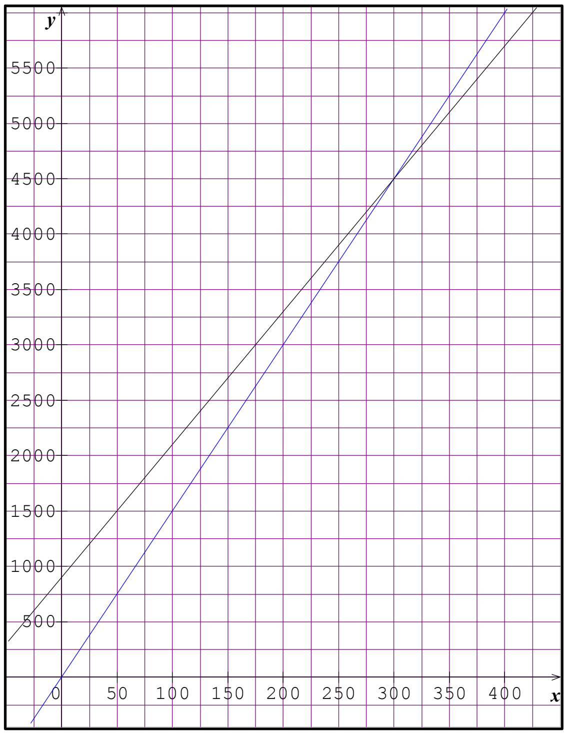
و منه $x > 300$.

إذن كل قيم x الأكبر من 300 هي حلول المتراجحة $15x > 12x + 900$.

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

ا- التمثيل البياني للدالتين f، g حيث: $f\left(x\right)=15x$ و $g\left(x\right)=12x+900$

يكفي تحديد نقطتين من كل مستقيم لرسمه.



ب- نلاحظ أنه كلما كان عدد الكيلومترات أصغر من 300 يكون التمثيل البياني للدالة f (الملون بالأزرق) أسفل التمثيل البياني للدالة g و بالتالي فإن أفضل تسعيرة في هذه الحالة هي التسعيرة الأولى بينما كلما كان عدد الكيلومترات أكبر من 300 يكون التمثيل البياني للدالة g (الملون بالأسود) أسفل التمثيل البياني للدالة f و بالتالي فإن أفضل تسعيرة في هذه الحالة هي التسعيرة الثانية.

أما في حالة $300\,Km$ فتكون التسعيرتان متساويتين.

وزارة التربية الوطنية. المركز الوطني لإدماج الابتكارات البيداغوجية و تنمية تكنولوجيات الإعلام و الاتصال في التربية ، فيفري 2009