1- ماهي الشعبة التي يستهدفها هذا النشاط؟

هذا النشاط يستهدف شعبة الثانية باكالوريا علوم رياضية

المجال الرئيسي التحليل

المجال الفرعي دراسة الدوال

درس الدوال الاسية

2- ما هو موقع الدرس المستهدف من هذا النشاط في المقرر الدراسي؟

يندرج هذا الدرس حسب مذكرة التقويم 142-08 الصادرة ب 16 نونبر 2007 بين درس الدوال اللوغاريتم و المعادلات التفاضلية

نقبل أنه توجد دالة عددية f معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، تحقق العلاقة (α) التالية:

(α) : $f(0)=1$ و $f'(x)=f(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$

1) بين أن: $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)\times f(-x)=1$

لدينا $f'(x)=f(x)$ إذن $f'(-x)=f(-x)$

لدينا $(f(x)\times f(-x))' = f'(x)f(-x) - f(x)f'(-x)$

$= f(x)f(-x) - f(x)f(x) = 0$

إذن $f(x)\times f(-x) = cte$ $\quad \forall x\in\mathbb{R}$

لدينا $f(0)=1$ إذن $f(0)\times f(-0) = cte$

أي $1 \times 1 = cte$

إذن $\boxed{cte = 1}$

إذن $\boxed{f(x)\times f(-x) = 1}$

2) استنتج أن: $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)\neq 0$

نفترض أن: $\exists x_0\in\mathbb{R} \ /\ f(x_0)=0$

لدينا $\forall x\in\mathbb{R} \quad f(x)\times f(-x)=1$

إذن $f(x_0)\times f(-x_0) = 1$

أي $0 \times f(-x_0) = 1$

إذن $0 = 1$

لا يمكن

وبالتالي $\forall x\in\mathbb{R} \quad f(x)\neq 0$

3) نفترض أنه توجد دالة عددية ثانية g تحقق العلاقة (α)

نعتبر الدالة العددية H المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $H(x)=\frac{g(x)}{f(x)}$

أ- بين أن H قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ واحسب $H'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$

لنبين أن H قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

* g دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$
* f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$
* $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0$

إذن H قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ كخارج دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}$

ب - ماذا تستنتج بالنسبة للدالتين f و g ؟

لدينا $H'(x)=0$ لكل x من $\mathbb{R}$

إذن $H(x)=c$

و $H(0)=\frac{g(0)}{f(0)}=\frac{1}{1}=1$

إذن $\forall x \in \mathbb{R} : H(x)=1$

أي $\frac{g(x)}{f(x)}=1$

بما أن $f(x)\neq 0$ فإن $g(x)=f(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$

وإذن $\boxed{f=g}$

4- حدد ثلاثة مكتسبات قبلية ضرورية لإنجاز هذا النشاط

1. قابلية اشتقاق خارج دالتين
2. مشتقة الخارج
3. مشتقة الجداء
4. دالة اصلية للعدد 0

5) انقل الجدول التالي إلى ورقة التحرير وأملأ بدقة الخانتين المتعلقتين بالصعوبات المتوقعة (الاقتصار على تحديد صعوبتين فقط) التي يطرحها إنجاز السؤالين 1) و 2) في النشاط:

السؤال	الصعوبات
بين أن : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \times f(-x) = 1$	• التفكير في اشتقاق الجداء • استعمال العلاقة $(\propto)$ • الرجوع الى الدالة الاصلية
استنتج أن: $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0$	• التفكير في البرهان بالخلف • استعمال العلاقة $(\propto)$

4- لماذا الأستاذ اكتفى فقط بإثبات وحدانية الدالة و قبول وجودها

الوجودية متعلقة بالمعادلات التفاضلية وهذا الدرس يأتي قبل درس المعادلات التفاضلية

7) بعد مأسسة الدالة الأسية النبيرية، قام الأستاذ بإعطاء الخاصية الأساسية التالية:

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x+y)=f(x)\times f(y)$$

تساءل أحد التلاميذ: هل يمكن استنتاج هذه الخاصية من العلاقة (α)؟

فكان جواب الأستاذ: " هذا الاستنتاج ممكن وسنشتغل عليه في حصة التمارين"

أ- اقترح نشاطا يجيب على تساؤل التلميذ.

ليكن ~~a~~ b عددا حقيقيا

نضع

$$g(x)=\frac{f(x+b)}{f(x)\times f(b)}$$

1) بين أن $\forall x\in\mathbb{R} : g(x)=1$

2) استنتج أن $f(a)\times f(b)=f(a+b)$ لكل a و b من $\mathbb{R}$

حل النشاط

لدينا

$$g'(x) = \frac{f'(x+b)\times f(x)\times f(b) - f(x+b)f'(x)f(b)}{(f(x)\times f(b))^2}$$

$$= \frac{f(x+b)\times f(x)\times f(b) - f(x+b)f(x)f(b)}{(f(x)\times f(b))^2} = 0$$

$\left[\begin{array}{l} \text{لأن } f'(x+b) = f(x+b) \\ \text{و } f'(x) = f(x) \end{array}\right]$

أي أن $g(x) = c$ لكل x من $\mathbb{R}$

$$g(-b) = \frac{f(0)}{f(-b)\times f(b)} = \frac{1}{1} = 1$$

أي أن $c = 1$ ومنه $g(x) = 1$

$g(x) = 1 \Leftrightarrow f(x)\times f(b) = f(x+b)$

من أجل $x = a$ نجد $\boxed{f(a)\times f(b) = f(a+b)}$

7) بعد مأسسة الدالة الأسية النيبرية، قام الأستاذ بإعطاء الخاصية الأساسية التالية:

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x)\times f(y)$$

تساءل أحد التلاميذ: هل يمكن استنتاج هذه الخاصية من العلاقة (α)؟

فكان جواب الأستاذ: " هذا الاستنتاج ممكن وسنشتغل عليه في حصة التمارين"

ب– هل الاختياران C_2 و C_3 الواردان في التوجيهات التربوية متكافئان؟ علل جوابك.

C_2 و C_3 غير متكافئتان

$C_3 \not\Rightarrow C_2$

لدينا $f(x+y) = f(x)\times f(y)$

مثلا من أجل $x = 0$ و $y = 0$ لدينا

$f(0) = f(0)\times f(0)$

أي $f(0) - f(0)\times f(0) = 0$

$f(0)(1 - f(0)) = 0$

لدينا $\boxed{f(0) = 0}$ أو $\boxed{f(0) = 1}$

8) برهن، في إطار الاختيار C_2 الذي تبناه الأستاذ، أن:

أ- $\forall x \in \mathbb{R},\quad \forall r \in \mathbb{Q},\quad \exp(rx) = (\exp(x))^r$

* $n \in \mathbb{N}$ طريقتين

(1) الطريقة الاولى بالترجع

الطريقة الثانية

$$\exp(nx) = \exp(\underbrace{x + x + \cdots + x}_{n \text{ مرة}})$$

$$= \underbrace{\exp(x) \times \exp(x) \times \cdots \times \exp(x)}_{n \text{ مرة}}$$

$$= (\exp(x))^n$$

* $n \in \mathbb{Z} \Leftarrow n = -m$ مع $m \in \mathbb{N}$

$$\exp(nx) = \exp(-mx) = \frac{1}{\exp(mx)}$$

$$= \frac{1}{(\exp(x))^m} = \exp(x)^{-m}$$

$$= \exp(x)^n$$

8) برهن، في إطار الاختيار C_2 الذي تبناه الأستاذ، أن:

أ- $\forall x \in \mathbb{R},\quad \forall r \in \mathbb{Q},\quad \exp(rx) = (\exp(x))^r$

$\underline{r \in \mathbb{Q}} \Rightarrow r = \frac{p}{q} \,/\, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*$

$$\exp\left(q \times \frac{p}{q} x\right) = \left(\exp\left(\frac{p}{q} x\right)\right)^q$$

$$\Leftrightarrow \exp(px) = (\exp(rx))^q$$

$$\Leftrightarrow (\exp(x))^p = (\exp(rx))^q$$

$$\Leftrightarrow (\exp(x))^{p/q} = \exp(rx)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{(\exp(x))^r = \exp(rx)}$$

$$\forall r \in \mathbb{Q}^*, \forall x \in \mathbb{R} : \exp(rx) = (\exp(x))^r$$

8) برهن، في إطار الاختيار C_2 الذي تبناه الأستاذ، أن:

ب - $\lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$ ثم استنتج أن $\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$

* لنبين أن $x \mapsto \exp(x)$ تزايدية قطعا

$f(x) = \exp(x)$ و $f'(x) = \exp(x)$

لدينا $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) \neq 0$

نفترض أن $f(x) < 0$ يعني أن $f(x) < 0$

لدينا

$f(x+y) < 0$

و

$f(x) \times f(y) > 0$

بما أن

$f(x+y) = f(x) \times f(y)$

فلا يمكن

وبالتالي $f(x) > 0$ لكل x من $\mathbb{R}$

8) برهن، في إطار الاختيار C_2 الذي تبناه الأستاذ، أن:

ب - $\lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$ ثم استنتج أن $\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$

* لنبين أن $\lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$

نضع $g(x) = \exp(x) - x$ حيث $x \in \mathbb{R}^+$

لدينا $g'(x) = \exp(x) - 1$

$x \geq 0 \Rightarrow \exp(x) \geq \exp(0)$

$\Rightarrow \exp(x) \geq 1$

$\Rightarrow \exp(x) - 1 \geq 0$

$\Rightarrow g'(x) \geq 0$

إذن g تزايدية على $\mathbb{R}^+$

$x \geq 0 \Rightarrow g(x) \geq g(0)$

$\Rightarrow g(x) \geq 0$

$\Rightarrow \exp(x) - x \geq 0$

$\Rightarrow \exp(x) \geq x$

إذن $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty}$

8) برهن، في إطار الاختيار C_2 الذي تبناه الأستاذ، أن:

ب - $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$ ثم استنتج أن $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$

لنستنتج أن $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$

$$\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = \lim_{x\to+\infty} \exp(-x)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\exp(x)}$$

$$= 0$$

الموضوع الثاني: (03 نقط)

يظهر مفهوم المتجهة في عدة محطات من برنامج الرياضيات بسلك التعليم الثانوي التأهيلي.

1) اعط كرنولوجيا (chronologie) تطور مفهوم المتجهة بين مستوى الجذع المشترك العلمي والتكنولوجي ومستويي الأولى والثانية بكالوريا علوم تجريبية محددا الإضافة المميزة في كل مستوى.

2) حدد ثلاثة مشاكل ديداكتيكية مرتبطة بتدريس المتجهة في سلك الثانوي التأهيلي.

3) نعتبر الشكل الهندسي أسفله:

بتوظيف الأداة المتجهية، حدد موقع النقطة G على القطعة $[BQ]$ والقطعة $[AP]$.

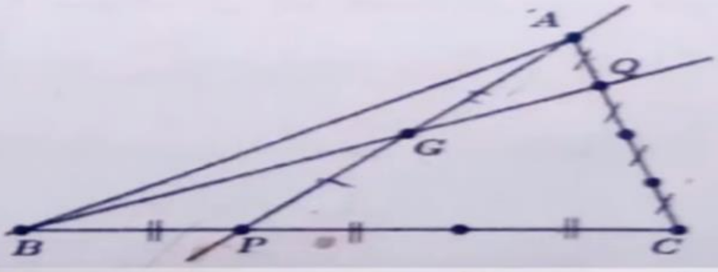
المستوى	كرونولوجيا	الاضافات
جدع مشترك	• استقامية متجهتين • ضرب متجهة في عدد حقيقي • طاليس الصيغة المتحهية • الزوايا الموجهة	• تحديد موقع النقط باستعمال المتجهات • توازي مستقيمات باستعمال المتجهات
اولى باكالوريا	• استعمال المتجهات العلاقة المرجحية • المتجهات في الفضاء(الصيغة المتجهية) • المتجهات في الفضا(الصيغة التحليلية)	• تحديد موقع النقط باستعمال المرجح والمتجهات • البرهنة على استقامية النقط
ثانية باكالوريا	• الجداء المتجهي في الفضاء • المتجهات في المستوى العقدي	• ربط المتجهة بالعدد العقدي • التحول بين المجالين العقدي و المتجهي

2) حدد ثلاثة مشاكل ديداكتيكية مرتبطة بتدريس المتجهة في سلك الثانوي التأهيلي.

- الخلط بين المنحى و الاتجاه
- اختيار المتجهات المناسبة في حل التمرين
- الصعوبة في تغير المجال العقدي الى المجال الهندسي و العكس

3) نعتبر الشكل الهندسي أسفله:

بتوظيف الأداة المتجهية، حدد موقع النقطة G على القطعة $[BQ]$ والقطعة $[AP]$.



لدينا $\overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{AQ}$ و $\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BP}$

إذن $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{BP} - 4\overrightarrow{AQ}$

$$\overrightarrow{BA} = 3\overrightarrow{BP} - 4\overrightarrow{AQ}$$

$$\overrightarrow{BA} = 3\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{AP} - 4\overrightarrow{AQ}$$

$$\overrightarrow{BA} - 3\overrightarrow{BA} = 3\overrightarrow{AP} - 4\overrightarrow{AQ}$$

$$-2\overrightarrow{BA} = 3\overrightarrow{AP} - 4\overrightarrow{AQ}$$

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AP} - 2\overrightarrow{AQ}} \quad (*)$$

ولدينا $\overrightarrow{AG} = a\overrightarrow{AP}$ و $\overrightarrow{BG} = b\overrightarrow{BQ}$

$$\overrightarrow{BG} = b\overrightarrow{BQ} \Leftrightarrow \overrightarrow{BG} - \overrightarrow{AG} = b\overrightarrow{BQ} - a\overrightarrow{AP}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = b(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AQ}) - a\overrightarrow{AP}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = a\overrightarrow{AP} - b\overrightarrow{BA} - b\overrightarrow{AQ}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} - b\overrightarrow{AB} = a\overrightarrow{AP} - b\overrightarrow{AQ}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\overrightarrow{AB} = \frac{a}{1-b}\overrightarrow{AP} - \frac{b}{1-b}\overrightarrow{AQ}} \quad (**)$$

من $(*)$ و $(**)$ نستنتج أن

$$\begin{cases} \frac{b}{1-b} = 2 \\ \frac{a}{1-b} = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2(1-b) \\ 2a = 3(1-b) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{2}{3} \\ 2a = 1 \end{cases}$$

إذن $\boxed{a = \frac{1}{2}}$ و $\boxed{b = \frac{2}{3}}$ ومنه

$$\boxed{\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AP}}$$

$$\boxed{\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BQ}}$$

الموضوع الثالث: (07 نقط)

اقترحت أستاذة لمادة الرياضيات التمرين التالي على تلامذتها في قسم من مستوى الثانية بكالوريا علوم تجريبية:

احسب نهاية المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ المعرفة بما يلي: $u_n = \left(1-\frac{1}{2n}\right)^n$

أجاب ثلاثة تلاميذ A و B و C عن هذا التمرين كما يلي:

جواب التلميذ A :

نضع $q = 1-\frac{1}{2n}$ أي أن $u_n = (q)^n$

بما أن: $0 < q < 1$ فإن: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$

جواب التلميذ B :

نضع $v_n = 1-\frac{1}{2n}$ ومنه $u_n = (v_n)^n$

بما أن : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$ فإن: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (v_n)^n = 1$

جواب التلميذ C :

لدينا: $\ln u_n = n\ln\left(1-\frac{1}{2n}\right)$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 2\times\frac{\ln\left(1-\frac{1}{2n}\right)}{\frac{1}{2n}} = 2$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e^2$

1) أ- هل جواب كل تلميذ صحيح أم خطأ؟ علل جوابك

التلميذ	الجواب	التعليل
التلميذ A	خطأ	• التلميذ أخطأ في استعمال نهاية المتتالية الهندسية q^n حيث الاساس q يجب ان يكون غير مرتبط العدد n
التلميذ B	خطأ	التلميذ أخطأ في استعمال نهاية المتتالية المساعدة v_n و u_n مرتبط العدد n
التلميذ C	خطأ	التلميذ اخطأ فقط في العمليات الحسابية(التعميل بالعدد 2 بدل ½)

ب- ماهي أسباب الأخطاء المرصودة (إن وجدت) لدى كل تلميذ؟

ج - ماهي مصادر هذه الأخطاء؟

التلميذ	ب) الأخطاء الواردة	ج) مصادر الخطأ
التلميذ A	استعمال نهاية المتتالية الهندسية q^nحيث الاساس q يجب ان يكون غير مرتبط العدد n	•**نمائي** التلميذ لم يستوعب استعمال المتتالية الهندسية q^n حيث الاساس q يجب ان يكون غير مرتبط العددn
التلميذ B	التلميذ أخطأ في استعمال نهاية المتتالية المساعدة v_n و u_n مرتبط العدد n	**معرفي** التلميذ استعمال نهاية المتتالية المساعدة v_n و u_n مرتبط العدد n
التلميذ C	التلميذ اخطأ فقط في العمليات الحسابية(التعميل بالعدد 2 بدل ½)	

2) اقترح حلا لهذا التمرين لتقديمه في حصة دراسية.

لدينا

$$\lim u_n = n\ln\left(1-\frac{1}{2n}\right)$$

إذن

$$\boxed{\ln(u_n) = \frac{1}{2}\times\frac{\ln\left(1-\frac{1}{2n}\right)}{\frac{1}{2n}}}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\ln(u_n) = \frac{1}{2}\times\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln\left(1-\frac{1}{2n}\right)}{\frac{1}{2n}}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{N\to 0}\frac{\ln(1-N)}{N}$$

لدينا $x \mapsto \ln(x)$ دالة متصلة على $]0+\infty[$

$$v_n = \frac{\ln(1-n)}{n}$$

نعلم أن $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)}{x} = 1$ إذن $\lim_{n\to 0} v_n = 1$

ومنه

$$\lim_{n\to+\infty}\ln(u_n) = \frac{1}{2}$$

وبالتالي

$$\boxed{\lim u_n = \sqrt{e}}$$

3) اقترح وضعيتين من أجل إبراز الجانب الوظيفي للمتتاليات:

أ- الوضعية الأولى مرتبطة بالحياة اليومية.

- هناك عدة امثلة من بينها الأبناك يمكن استعمال متتالية هندسية او حسابية في هذا الاقتراع سأعطي مثالا يستعمل متتالية هندسية
- يريد شخص وضع مبلغ مالي للتوفير فاقرح عليه الموظف البنكي نسبة 5% لكل سنة
- اذا وضع هذا الشخص مبلغ 10000 درهم فكم سيكون المبلغ بعد n سنة

3) اقترح وضعيتين من أجل إبراز الجانب الوظيفي للمتتاليات:

أ- الوضعية الأولى مرتبطة بالحياة اليومية.

- وضع هذا الشخص مبلغ 10000 درهم بنسبة 5% لكل سنة
- المبلغ بعد n سنة
- U_0=1000 اذن $U_1 = U_0 + U_0 \times (0,05) = U_0 \times (1,5)$
- $U_2 = U_1 \times (1,05)$
- $U_n = U_0 \times (1,05)^n$

ب- الوضعية الثانية مرتبطة بحل المسائل.

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $]1,+\infty[$ ب : $g(x)=\dfrac{x^2-3x+6}{x-1}$.

1. بين أن: $\forall x\in]2.+\infty[;g(x)\geq 3$.

2. لتكن المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة كالتالي:

$$\begin{cases} u_0=\dfrac{7}{2} \\ u_{n+1}=g(u_n)\ ;\quad \forall\in\mathbb{N}\end{cases}$$

a) بين أن: $u_n\geq 3$; $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

b) بين أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. رتيبة و استنتج أنها متقاربة .

c) أحسب $\lim u_n$.