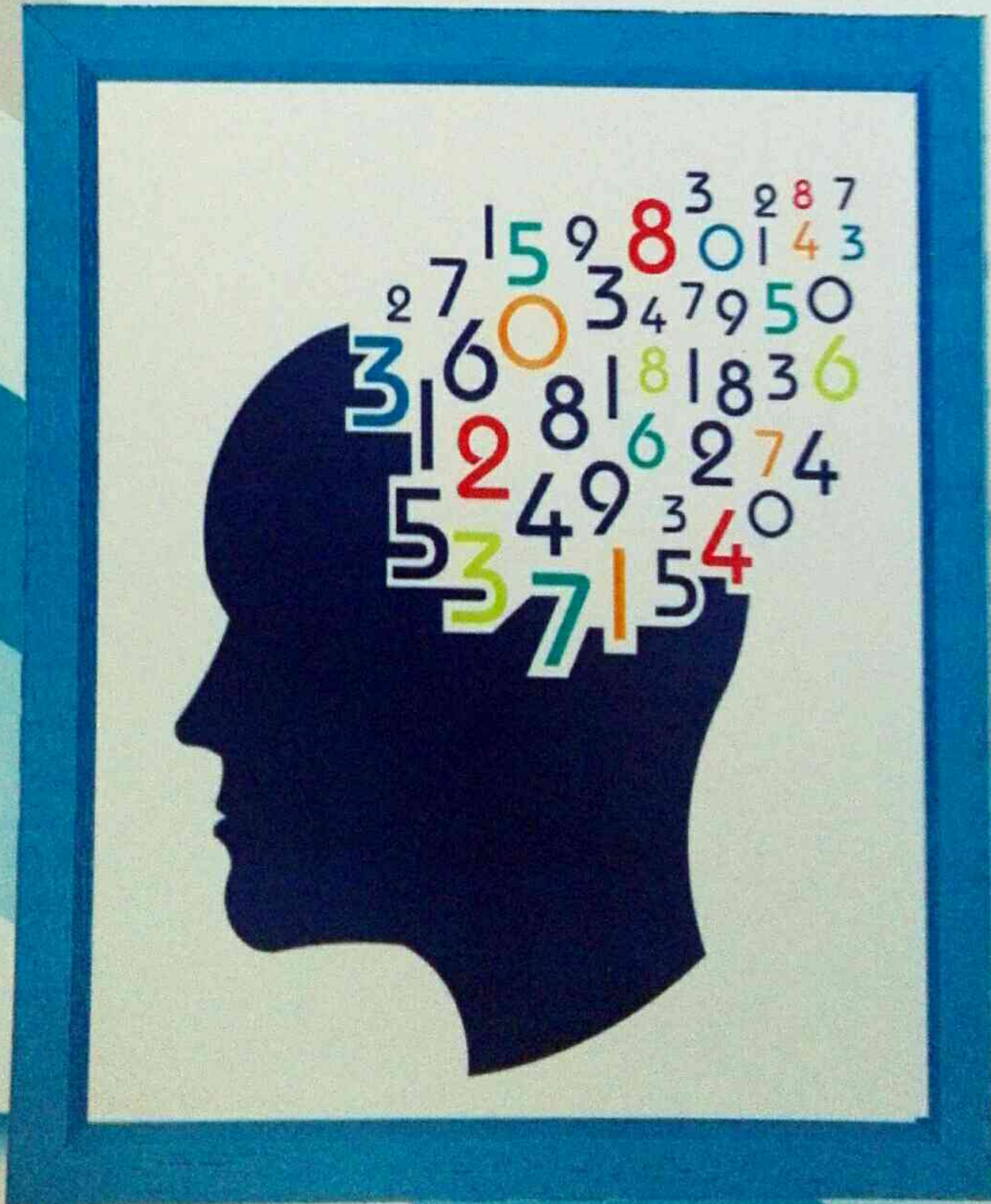
محمد الطالبي
محمد طلبي

نحو تدريس فعال
للرياضيات بالثانوي التأهيلي



نحو تدريس فعال

للرياضيات بالثانوي التأهيلي

محمد الطالبي
محمد طلبي

نحو تدريس فعال للرياضيات بالثانوي التأهيلي

الطبعة الأولى

2017

الكتاب: نحو تدريس فعال للرياضيات بالثانوي التأهيلي

المؤلف: محمد الطـالبي / محمد طلبي

الايداع القانوني:2017 MO 1542

ردمك:8-995-39-9954-978

المطبعة : مطبعة الجسور ش.م.م

40 شارع رمضان الكاضي وجدة

الهاتف/الفاكس: 85 70 31 36 05

Imp_eljoussour@yahoo.fr

نتقدم بجزيل الشكر والعرفان للزميل مصطفى صادقي، الأستاذ الباحث بالمركز الجهوي لمهن التربية والتكوين لجهة الشرق، الذي تفضل بالمراجعة اللغوية لهذا الكتاب.

"Nous avons à former des êtres pensants et non des robots, à amener l'étudiant à comprendre ce qu'il fait et non à lui enseigner des procédés mécaniques."
Jean Alexandre Eugène Dieudonné.

تقديم عام

توجه البيداغوجيات الحديثة عدة مقاربات تعرف التلاميذ على أنهم أفراد يشاركون في بناء تعلماتهم، وأنهم فاعلون تربويون وليسوا مجرد متلقين. ومن أجل تشجيع التلاميذ على المشاركة الفعلية في المهام الموكلة لهم وتعميق فهمهم وتطوير مهاراتهم بشتى أنواعها، تبنى علماء الرياضيات مقاربة حل المسائل في تدريس الرياضيات. وعليه فإن المدرس مطالب، خلال تدبيره للتعلمات، بإتاحة الظروف المناسبة للتلميذ لتوظيف مكتسباته، واستحضار تمثلاته، وتصوراته، وأحكامه المسبقة، وذلك من أجل تحديد سيرورة التفكير لديهم، والربط بين أفكارهم.

إن الإعتماد على وضعيات ديداكتيكية بمواصفات ملائمة، وطريقة معالجتها، ونوعية الحوار الديداكتيكي (أسئلة الأستاذ، استجابات التلاميذ، نقاشات سواء داخل مجموعات مصغرة أو مع المدرس...) كل ذلك يجعل التلميذ في مركز العملية التعليمية - التعلمية، ويساعد بشكل كبير عل بناء التعلمات وتبنيها من قبل التلميذ.

يمكن إعتبار حل المسائل مجموعة من المهارات الرئيسية، التي ينبغي تنميتها من أجل بناء المفاهيم الرياضية. كما أنه من خلال حل المسائل، يمكن للأستاذ هيكلة الأسئلة الملائمة أثناء تنفيذه لمقطع تعلمي والتي تزيد

من نشاط التلميذ وانخراطه في جميع المهمات، وقد تطرق وينكر (D. Huinker) وفريكمان (J. L. Freckmann)، في [38]، إلى عدة نماذج تساعد الأستاذ على هيكلة ملائمة لأسئلة فعالة وذات معنى.

من جهة أخرى، يعتبر تدبير الفصل مكونا أساسيا في تدبير التعلمات، ويقصد به مجموع الأعمال الآنية والمتتالية التي يقوم بها الأستاذ من أجل خلق جو ملائم للعمل، وفضاء مناسب للتعلم والحفاظ عليه، وهو إذن حسب نولت (T. Nault) وفيجالكو (J. Fijalkow)، في [32]، كل ما يحكم تخطيط وتنظيم الوضعيات التعليمية - التعلمية، وبتعبير آخر مجموع الإجراءات (وضح، احترم، راقب، حفز،...) التي تساعد الأستاذ على تطوير البيئة التعليمية.

"La gestion de la classe se définit comme l'ensemble des actes réfléchis, séquentiels et simultanés qu'effectuent les enseignants pour établir et maintenir un bon clémat de travail et un environnement favorable à l'apprentissage".

نشير إلى أنه يجب التمييز بين تدبير الفصل والقيادة داخل الفصل، التي هي جزء لا يتجزأ من تدبير الفصل، مرتبط بسلوكات التلاميذ عندما يرتكز التدبير حول المجموعات، ومن معاييرها فهم تعليمات العمل واحترامها وفهم قواعد الحياة الجماعية داخل القسم. بينما تدبير الفصل يستدعي إعطاء تعليمات العمل، وتنويع الوضعيات البيداغوجية، ورصد أفضل المجموعات، والإجابة على متطلبات التلاميذ، ثم مراقبة الزمن الحقيقي للتعلم. وبالتالي فتدبير الفصل يرتكز حول ثلاثة عناصر من تخطيط للوضعيات البيداغوجية، إلى تنظيم القسم، ثم المراقبة خلال الفعل.

إن تدبير التعلمات يستدعي استحضار مختلف العلاقات التربوية

(المثلث الديداكتيكي)، ومعرفة دور الأستاذ والتلميذ معا، وطبيعة بل مواصفات الوضعية التعليمية - التعلمية (الوضعية المسألة). وبتعبير أعم، الإهتمام بمختلف التعلمات في سيرورتها الديداكتيكية، القائمة على المدخلات (الأهداف، والقدرات المنتظرة، والكفايات ...)، والسيرورة (المضامين، الطرائق والوسائل)، والمخرجات (التقويم، المعالجة ثم الدعم). فالتعلم عندما يرتكز على بناء المعرفة يجعل من القسم مجتمعا للمعرفة (كما ذهبت إلى ذلك دوادي (R. Douady) في [28])، وتطوره مرتبط بمدى مساهمة عناصره في العملية التعليمية-التعلمية. ودور الأستاذ في هذا السياق معقد ومركب، نظرا لكونه المسؤول عن وضع الشروط الملائمة (المناسبة) لخلق فضاء التنسيق والتقاسم بين جميع عناصر القسم. وهذا لا يتأتى إلا في ظل جو من الثقة المتبادلة، فهو إذن مسؤول على وضع التلاميذ في سياقات محفزة تسمح لهم بتطوير مهاراتهم الذهنية الإبداعية والتحليلية وكذا تطوير العلاقة الوجدانية بشتى أبعادها (التلميذ-الأستاذ، التلميذ-التلميذ، التلميذ-المادة).

في ضوء العناصر المكونة لدور الأستاذ في التعلم -التي سبق ذكرها- ذهب مجموعة من الباحثين، في مشروعهم [1]، إلى تبني فكرة أن "العقليات ليس لها معنى إلا إذا كانت في علاقة مع عقلية تكافئها"، واعتبار الأستاذ كعقلية وسيطة مهمتها جعل التلميذ يربط علاقة ذات معنى مع هدف التعلم، هذه العلاقة تعتبر أداة تتدخل في تطوير الأستاذ. فمن خلال ملاحظة وتتبع ما يجري في القسم، فإن الأستاذ يستخلص نتائج ومعلومات تجعله يغني ممارساته ويرفع من إسهامه في تطوير القسم (مجتمع المعرفة). وبناء على هذا فالأستاذ مطالب بالعمل على تحضير وتخطيط وضعيات ديداكتيكية يمكن من خلالها استخلاص معنى،

وذلك بالمشاركة في تنمية المجموعة. في هذا السياق، ومن أجل إنجاح العملية التعليمية-التعلمية وبناء أمثل للمفاهيم، فالتلميذ هو كذلك مسؤول على السير الجيد للقسم وذلك بالمشاركة، والبحث، واحترام بنود التعاقد الديداكتيكي...

إننا نسعى، من خلال هذا العمل، إلى التحاور مع المهتمين بديداكتيك الرياضيات، والذين سبق لهم أن وضعوا شروطا مسبقة على أجرأة بيداغوجيات حديثة، حيث أسسوا طرقا ومقاربات ساهمت في تقدم البيداغوجيات التي لها ارتباط بالقسم، والتي تسعى إلى مساعدة الأستاذ للقيام باختيارات ديداكتيكية ملائمة، واعتماد طرق ومقاربات أكثر فعالية، التي بدورها تضمن انخراط أكبر عدد ممكن من المتعلمين وتسهم في تنمية طرق تفكيرهم وتفاعلاتهم، وتختتم بتعلمهم. فرغم كون برمجة المقررات والاختيارات الديداكتيكية المتنوعة والمتشعبة تعد عائقا أمام التنزيل الأمثل لهذه الطرق والمقاربات، فإننا نعتقد أن اعتماد طرق ملائمة، واختيار وضعيات مناسبة بمواصفات محددة، ورصد العوائق الإبستمولوجية، وتسطير بنود تعاقدية مناسبة، وهيكلة أسئلة فعالة، وتوقع معالجة لإنعكاسات التلاميذ المحتملة واعتماد أدوات ديداكتيكية (TICE)، كلها إجراءات تستلزم إعادة تعريف العلاقة بين مكونات المثلث الديداكتيكي، وتؤطر معظم الإختيارات الديداكتيكية. إن الأستاذ، لكي يتمكن من تنزيل أمثل لهذه الطرق والمقاربات، مطالب باستحضار مجموعة من الشروط والإجابة على مجموعة من الأسئلة نذكر منها:

- هل نجح الأستاذ في انتاج تخطيطات سنوية أو أسدسية محددا فيها النقط المشتركة في المقررات، ورؤيته للسنة التكوينية أو الأسدوس،

وإمكانية إدماج مواد مستعرضة؟

- هل سيساعد هذا التخطيط في وضع تخطيط شهري أو يومي؟
- هل حدد بشكل جيد النتائج المراد التوصل إليها؟
- ما هي المعارف والقدرات الضرورية؟
- ما هي الأنشطة، والمهمات، والموارد المناسبة للوصول إلى الهدف؟
- ما هي التعلمات الرئيسية، وما هي نتائج التعلم؟
- ما هي النقط الأساسية التي يجب فهمها؟
- ما هي التساؤلات الأساسية التي يجب استغلالها؟
- هل حدد بشكل جيد استراتيجية للتعلم؟
- هل استحضر الوسط، الثقافة، الجنس، طريقة التعلم وأنواع الذكاءات في اختياراته الديداكتيكية؟
- هل حدد بشكل جيد مؤشرات التعلم؟
- كيف يثبت التلاميذ اكتسابهم لمعارف ومهارات؟
- كيف يمكن معرفة مدى تحقق الهدف (النتائج، استراتيجية التقويم)؟

إن فكرة إنجاز هذا العمل جاءت بعد أن لاحظنا أنه لاتوجد مراجع باللغة العربية في ديداكتيك الرياضيات تساعد أساتذة الثانوي التأهيلي في أداء مهامهم. وبعد تفحص لعدة أعمال لباحثين غربيين أنجز هذا الكتاب والذي يحوي بين طياته خمس فصول؛ حيث خصصنا الفصل الأول للوضعية الديداكتيكية وتدبيرها مرتكزين في ذلك على أعمال بروسو

(G. Brousseau) ودوادي (R. Douady)، أما الفصل الثاني فتناولنا فيه مفاهيم أساسية في ديداكتيك الرياضيات، ولأهمية حل المسائل في تدريس الرياضيات فقد خصصنا لها الفصل الثالث، وفي الفصل الرابع تطرقنا لمفهوم التدبير الديداكتيكي، بينما خصص الفصل الأخير لإعطاء أمثلة لتدبير دروس في الرياضيات بالثانوي التأهيلي.

الفصل 1

الوضعية الديداكتيكية

تهتم ديداكتيك الرياضيات بدراسة سيرورة النقل والإكتساب لمختلف المحتويات الرياضية وخاصة في الوسط المدرسي أو الجامعي، وتهتم كذلك بوصف وتوضيح التمفصل بين التعليم والتعلم في مادة الرياضيات. فهي لا تقتصرعلى البحث عن الطريقة الملائمة لتدريس مفهوم معين، بل تتدخل في النظام التعليمي من أجل معرفة الطرق والمحتويات التعليمية وتجويدها ووضع الشروط من أجل اشتغال متوازن للنظام الديداكتيكي، الذي يضمن للتلميذ البناء المعرفي القابل للتطور، والوظيفي الذي يسمح بحل المسائل. فمثلا تنظيم نشاط بهدف تعلم معرفة معينة يعتبر موضوعا للدراسة بالنسبة للديداكتيك ولو لم يحقق الهدف المراد منه. و قد ذهب جون بياجي (J. Piaget [1896-1980])، في [49]، إلى اعتبار التوازن هو العامل الأساسي للتطور المعرفي، كنتيجة للاتوازن، وأعطى أهمية كبرى للبنيات الفكرية وقلل من دور المحتويات. موازاة مع ذلك ومن أجل إعطاء تعليلات وتأويلات للسلوكات، اعتبرت ريجين دوادي (R. Douady)، في [29]، أن استحضار المعارف كليا وخصائص الوضعيات أمرا ضروريا وذا أهمية بالغة. وأضافت أن تحليل الوضعيات

والإجراءات والتمثلات تضع رهن إشارة الباحثين والمهتمين عناصر ومعلومات لتوضيح سلوكات الموضوع (les comportements d'objet)، وبالتالي فإن تطوير البنيات الفكرية يتم على أبعد تقدير، ولتعليل تصورها أدرجت أمثلة تمحورت حول التمثلات العددية حول الحجم والمساحة والمحيط في [52] و [53]، ومثالا لبروسو (G. Brousseau [1933-..]) حول تدريس الأعداد العشرية في [15]، وآخر حول مفهوم النهاية في إطار تقارب متتاليات عددية بالنسبة لطلبة جامعيين وتلاميذ من الأقسام التحضيرية.

من خلال هذه الدراسات يتضح أن الديداكتيك تتبنى طرقا تسمح بتصور وضعيات يمكن ملاحظتها وتحليلها واختبارها ووضع المتغيرات التي تضمن الإنتاج المثمر للمعرفة. وخلال حل هذه الوضعيات، ومن أجل شرح إجراءات التلميذ، يبقى رصد سلوكاته والبحث عن دواعي اختيار السلوكات المرئية منها أمرا يكتسي أهمية كبرى.

لدراسة إشكالات التعليم المرتبطة بتدريس الرياضيات، التي لم تكن حديثة العهد بل كانت محل اهتمام العديدين من قبيل لوبيج (H. Lebesgue [1875-1941]) في [43] و التي تمحورت حول شروط للتعليم ولتكوين الأساتذة، أسس بروسو (G. Brousseau) نظرية الوضعيات الديداكتيكية التي تسمح مسبقا بجرد السلوكات المرئية، وفيما بعد تأويل هذه السلوكات وتحليلها. وسنتطرق في هذا الفصل إلى تعريف الوضعيات الديداكتيكية من منظور البيداغوجيات الحديثة، مواصفاتها وطرق تدبيرها مرتكزين في ذلك على أعمال بروسو [18, 19].

1.1 عموميات حول الوضعية الديداكتيكية

إن التعليم والتعلم من منظور الديداكتيك الكلاسيكية يتم وفق منهج عام ووحيد يستوعب اختلاف طبيعة المواد والسياقات المتعددة في الفصل بين المادة والديداكتيك، حيث يعتبر كومنيوس (J. A. Comenius [1592-1670]) رائد هذا المذهب. بينما يعتبر بروسو (G. Brousseau) في نقيض للنظرة الكلاسيكية أن طبيعة المادة تلعب دورا محوريا في صياغة المنهجية الأمثل لتدريسها، ويلغي بذلك الفصل القائم بين المادة والديداكتيك، والرياضيات بصفة خاصة استأثرت بحيز مهم من الإهتمام في دراسات بروسو.

فحسب بروسو (G. Brousseau)، فإن الوضعية الديداكتيكية هي مجموعة الشروط والعلاقات التفاعلية التي تربط بين متعلم أو جماعة من المتعلمين ومحيط اجتماعي ونظام تربوي يضم الأستاذ والمعرفة المراد اكتسابها. وتخضع في إعدادها وتخطيطها وتدبيرها لمجموعة من الشروط والضوابط سيتم التطرق إليها فيما بعد.

أما الوضعية المسألة فهي وضعية ديدايكتيكية تطرح مشكلة مصاغة في نص يتضمن معطيات وأسئلة لا يستطيع المتعلمون حلها بمجرد التكرار أو التطبيق لمعارف سابقة لكنها تسمح بتلمس أولي للحلول ومبادرات وقرارات تحثهم على الإنخراط في المنافسة والتفاوض الجماعي من أجل الوصول إلى الحل. ويمكن حصر مميزات الوضعية المسألة في النقط التالية:

- أنها مرتبطة بكفاية معينة،

- أنها ذات دلالة أي ذات معنى بالنسبة إلى المتعلم (من واقع المتعلم مثلا)،
- أنها تثير التساؤل لدى المتعلم،
- أنها مميزة بعدم الإفصاح عن الموارد المقرر توظيفها في حلها،
- أنها جديدة للمتعلم، وإلا اعتبرت استرجاعا لما تم تعلمه سابقا.

وتهدف الوضعية المسألة إلى:

- تنمية قدرة التلميذ على مواجهة وضعيات جديدة،
- وعي التلميذ بقوة معارفه ولو كانت بسيطة،
- تنمية قدرات التعليل عند التلميذ من خلال فقرات التبادل والحوار،
- تعويد كل تلميذ على الإشتغال فرديا، بالقيام بالمحاولات الأولية لإيجاد سبل للحل،
- تعويد التلميذ على تسجيل النتائج وتداولها، وعرضها للنقاش وللانتقادات،
- حث التلميذ على التعاون المثمر،
- الدفع بالتلميذ إلى الثقة بالنفس والتعبير بكل حرية.

1.1.1 أمثلة لوضعيات مسائل

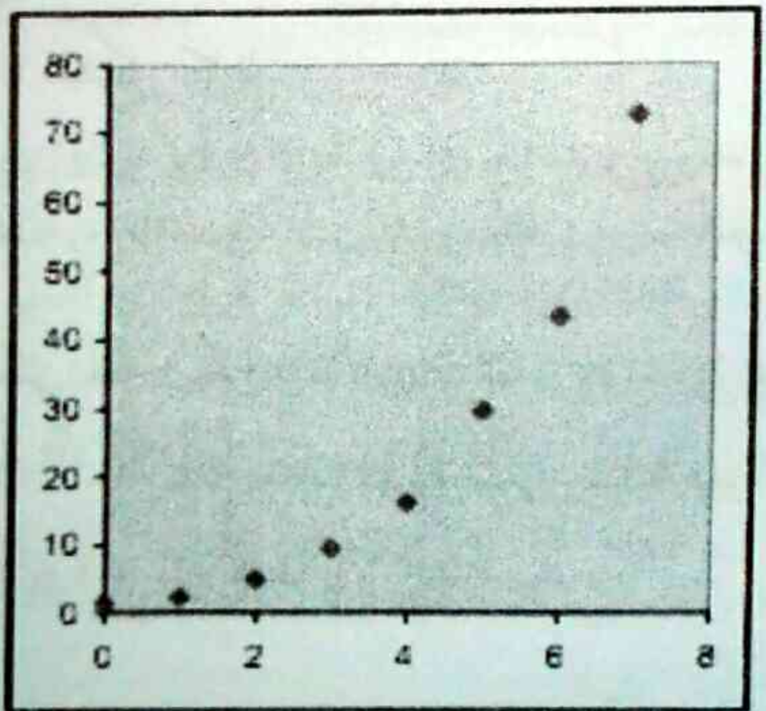
المثال الأول: بناء الدالة الأسية.
الجدول التالي يبين عدد الحواسيب (بالملايين) ذات القدرة العالية في العالم من سنة 1993 وحتى سنة 2000.

التاريخ	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
عدد الحواسيب	$1,313$	$2,217$	$4,825$	$9,472$	$16,146$	$29,670$	$43,230$	$72,398$

نقبل أن تقدم هذه الحواسيب يبقى مستمرا في السنوات القادمة.

نضع $t = 0$ بالنسبة للسنة 1993.

التمثيل المبياني لهذه المعطيات في معلم متعامد هو كالتالي:



1. بين أن منحنى الدالة المقربة لسحابة النقط الممثلة في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ تحقق المعادلة $\begin{cases} y' = \alpha y \\ y(0) = 1,313 \end{cases}$ محددا العدد α.

2. استنتج و جود دالة وحيدة f بحيث $\begin{cases} f' = f \\ f(0) = 1 \end{cases}$.

الدالة f تسمى الدالة الأسية النيبيرية و نرمز لها ب exp.

المثال الثاني: نهاية المتتالية الترجعية $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 = a; \quad a \in \mathbb{R} \end{cases}$ **حيث f تناقصية.**

من بين إشكـالات علم الإحيـاء الرياضي تلك التي أثارهـا فيبوناتشي (L. Fibonacci [1175-1250]) حول نمو ساكنة الأرانب، حيث حاول عد أزواج الأرانب في سنة انطلاقا من زوج أرانب كبار (أرنب ذكر وأرنب أنثى)، إذا كان في كل شهر كل زوج ينجب زوجا جديدا الذي بدوره ينجب زوجا آخر إنطلاقا من شهره الثاني. واستنتج أن ساكنة الأرانب تتكاثر بسرعة.

تم صياغة هذا المشكل كما يلي:

" كم من زوج أرانب يولد كل شهر، إذا بدأنا بزوج واحد، وإذا كان كل زوج ينجب زوجا جديدا الذي بدوره ينجب زوجا آخر انطلاقا من شهره الثاني؟ "

(I) بين أنه يمكن نمذجة هذه المشكلة بالمتتالية (F_n) المعرفة بما يلي:

$\begin{cases} F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \ n \geqslant 2 \\ F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \end{cases}$ هذه المتتالية تسمى متتالية فيبوناتشي.

(II) نعتبر متتالية (a_n) المعرفة بما يلي: $a_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$.

1. بين أن $(\forall n \geqslant 1); \ a_{n-1} = g(a_n)$ مع g دالة يتم تحديدها.

2. أوجد الحدود $a_1, \dots, a_{10}$. ماذا يمكنك أن تقول عن المتتالية (a_n)؟

3. ماذا لو اعتبرنا الحدود الفردية $a_1, a_3, \dots, a_9$ أوالحدود الزوجية $a_2, a_4, \dots, a_{10}$؟

4. نعتبر المتتاليتين (c_n) و (d_n) المعرفتين ب: $c_n = a_{2n-1}$ و $d_n = a_{2n}$.
بين أنه توجد دالة f بحيث $c_{n+1} = f(c_n)$ و $d_{n+1} = f(d_n)$.

5. استنتج أن المتتاليتين (c_n) و (d_n) تؤولان إلى نفس العدد φ.

ثم بين أن المتتالية (a_n) تؤول كذلك إلى φ.

العدد $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ويسمى العدد الذهبي.

6. استنتج طريقة لتحديد نهاية المتتالية: $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 = a; \quad a \in \mathbb{R} \end{cases}$ حيث f دالة تناقصية.

2.1.1 لماذا الوضعية المسألة؟

قد يعمل المدرس على بناء وضعية ديداكتيكية لكنه يفشل في تحقيق تفاعل المتعلمين معه ومع المادة المدرسة، ما دام المتعلمون يفتقدون حسب فيليب ميريو (Ph. Meirieu [1949-..]) إلى الرغبة في التعلم والإرادة في المعرفة اللتين تجعلان المتعلم ينخرط في التعلم ويتحمل أعباءه. وأهم إجراء لإثارة الرغبة هو تحويل المعرفة إلى لغز، وعليه فإنه على المدرس أن يوقظ هذه الرغبة عن طريق تلغيز المعرفة أي عن طريق تصور وضعيات صعبة وقابلة للتجاوز وترفع من احتمال حدوث التعلم الذي لا يتحقق إلا بإزاحة العوائق أثناء إنجاز المهمة.

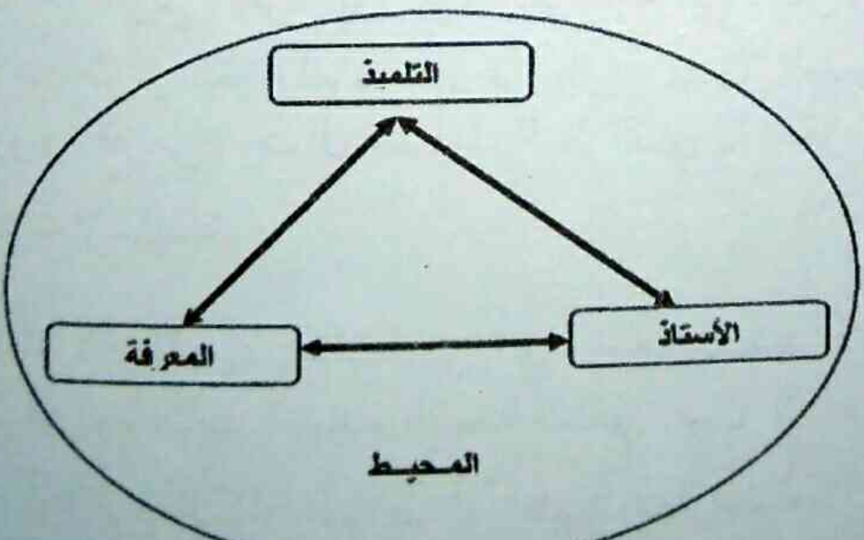
فالقدرات لا تكتسب انطلاقا من أي وضعيات ديداكتيكية وإنما تبنى انطلاقا من وضعيات جديدة بالنسبة للمتعلم حيث لا يستطيع حلها بكل سهولة، أو بمجرد التكرار البسيط أو تطبيق معارف مكتسبة بشكل آلي، لأن المهمة التي يطلب من المتعلم إنجازها تستدعي تجاوز عائق يفرض على المتعلم استنفار موارده، فحصها، وضع فرضيات، إثباتها أو دحضها أو تعديلها، ابتكار الحلول، اتخاذ قرارات وبناء معارف ثم تعبئة موارد قديمة بسياقات ووضعيات جديدة.

2.1 تدبير الوضعية المسألة

1.2.1 الوضعيةالمسألة والمثلث الديداكتيكي

عرف بروسو (G. Brousseau) العلاقات التربوية، عند دراسته لنظرية الوضعيات، على أنها مختلف التفاعلات بين المتدخلين في وضعية التعليم-التعلم. وتلك العلاقات تكمن في علاقة تلميذ/معرفة، معرفة/أستاذ ثم أستاذ/ تلميذ، وهته العلاقات تكون ما يسمى بالمثلث الديداكتيكي.

تبرز الوضعية المسألة في المثلث الديداكتيكي بين التلميذ والمعرفة حيث يتم اكتساب واكساب المعرفة للمتعلم عن طريق وضعيات مسائل وفي تفاعل مع محيطه.



فبالنسبة للتلميذ، فصل بروسو بين ثلاثة تجليات مرتبطة بممارسته الذهنية ولغة الرياضيات واصطلح عليها: الفعل، الصياغة ثم المصادقة، وبناء

على هذا اقترح ثلاثة وضعيات أساسية لتعلم التلميذ وهو ما يطلق عليه الوضعيات الأديداكتيكية، هذه الوضعيات تعتبر من وظائف المعرفة. بينما يعتبر بروسو المأسسة والنقل، اللذين يرتبطان بسيرورة التمفصل [علم-معرفة]، مراحل أساسية للتعلم ومنظمة من طرف الأستاذ. إنها تدبير الوضعية الديداكتيكية من منظور بروسو.

2.2.1 تدبير الوضعية المسألة من منظور بروسو

لقد وضع بروسو نسقا من وضعيات ديداكتيكية (نظرية الوضعيات الديداكتيكية) كان الهدف منها وضع إستراتيجية للتعلم تمكن المتعلمين من بناء معارف رياضية يكون لها معنى عندهم، وتتمثل هذه الإستراتيجية في مجموعة وضعيات أو مراحل يتفاعل فيها التلميذ مع الوضعية المسألة المقدمة حيث ينتقل من مرحلة الفعل إلى مرحلة الصياغة فمرحلة المصادقة ثم مرحلة المأسسة وفقا للتسلسل التالي :

1. **جدلية الفعل (Dialectique de l'action)**
يواجه التلميذ وضعية يسميها " مرحلة الفعل" بحيث:

- تطرح وضعية مسألة يتمثل حلها في بناء المعرفة الرياضية المستهدفة؛
- يؤثر المتعلم في الوضعية ويتأثر بها (تفاعل متبادل)؛
- يواجه المتعلم الوضعية ولديه نماذج معرفية (مكتسبات ومعلومات سابقة) تتيح له التفاعل معها من خلال تبادل للمعلومات بينه وبينها.

إن أفضل مرحلة للفعل هي تلك التي تسمح له بتقييم نتائج أفعاله

وتساعده على ضبطها دون مساعدة خارجية بواسطة تغذية راجعة بينه وبينها حيث يلعب سلوك المحاولة والخطإ دورا فعالا في تلقي المتعلم للمعلومات الراجعة كجزاء أو دعم لعملية الفعل مما يجعله يتخلى عن نموذجه المعرفي أو يطوره ليخلق منه نموذجا آخر يقبل التكيف مع هذه الوضعية.

ومن نتائج هذه المرحلة هو إقامة حوار حقيقي ضمني بين المتعلم والوضعية والذي يؤدي إلى خلق نموذج معرفي ضمني وهو عبارة عن ردود أفعال لم يصل المتعلم بعد إلى صياغتها وتنظيمها في شكل نظريـات.

2. جدلية الصياغة (Dialectique de la formulation)

في هذه المرحلة يتلقى المتعلم معلومات وأنواعا من الجزاء عن الوضعية التي يتفاعل معها، ولكي يتمكن من التصريح بنموذجه الضمني ويكون له معنى لديه تجده يبحث عن صياغة رياضية (شفاهية أو كتابية) يوصل بها ذلك النموذج إلى مستقبل آخر (متعلم أو فريق العمل أو جماعة القسم)، هذا الأخير عند تلقيه الرسالة (النموذج المعرفي المقترح) قد يرفضها أو يقبلها كليا أو جزئيا، ولن يتأتى ذلك إلا إذا توفرت لكل من المرسل والمستقبل قناة وشفرة موحدتين للتواصل. وكنتيجة لهذه المرحلة، يتم خلق نموذج صريح وموحد متفق عليه تم صياغته برموز ومصطلحات رياضياتية في شكل قواعد جديدة أو قديمة معروفة.

3. جدلية المصادقة (Dialectique de la validation)

أثناء مرحلة الصياغة يتم بناء الرسالة الرياضية وفق قواعد ضمنية غير صريحة بين كل من المرسل والمستقبل. غير أن هذه المرحلة تهدف إلى التصريح بهذه القواعد وتحديد الاصطلاحات وتقديم الدليل على

صدق وصلاحية الكتابات الرياضية المصرح بها.
إن صدق وصلاحية النتائج المعبر عنها في هذه المرحلة من طرف المتعلم (المرسل) مرتبطة بالمستقبل (جماعة القسم) الذي قد يراها خاطئة فيرفضها بشكل جزئي أو كلي، كما قد يطلب برهانا على صدقها وصلاحيتها، فعلى المتعلم (المرسل) أن يعطي الدليل أو البرهان على صدق وصحة هذه النتائج عن طريق المواجهة، مواجهة الآخر (المستقبل) وإقناعه بنموذجه الضمني، هذا الأخير قد يقبل هذا النموذج وقد يرفضه، كما قد يقترح تعديلات تجعل منه نموذجا صحيحا وصادقا إلى أن يتم التوصل في النهاية إلى قضايا تصبح قواعد عامة أو مبرهنات يتم الاتفاق عليها لتصبح بدورها أدوات تستثمر للتحقق من صدق وصلاحية نماذج معرفية أخرى.

4. جدلية المأسسة (Dialectique de l'institutionnalisation)
بعد البناء والمصادقة تصبح المعرفة الرياضية الجديدة إرثا جماعيا لكل التلاميذ، ويمكن استعمالها في وضعيات أخرى. إن دور وتدخل الأستاذ في هذه المرحلة يعتبر أساسيا، فهو الذي يعطي للمعرفة الجديدة طابعا ثقافيا واجتماعيا ويدمجها ضمن منظومة بنية المعارف.

3.1 التدريس بالوضعية المسألة

من أجل تدريس فعال بالوضعية المسألة يجب على الأستاذ أن يراعي العناصر التالية:

- تحضير نص الوضعية، المنتوج المنتظر، ظروف العمل، تخطيط دقيق للتعليمات والتساؤلات الواجب تقديمها للمتعلمين؛
- تقدير جيد لعمل المجموعات وذلك بضبط النشاط الأساسي للوضعية؛
- تشجيع المتعلمين على التفكير في تطوير مكتسباتهم المعرفية والمنهجية (أي على المستوى المعرفي)؛
- تشجيع المتعلمين على عادة الرجوع إلى تركيب مكتسباتهم القبلية في ضوء ملاحظات المدرس وكذلك باعتبار المعارف الرياضية الواردة في المقرر الدراسي.

ومن أجل استثمار جيد للوضعية المسألة وجعلها أداة لبناء المعرفة فإنه من الضروري مراعاة ما يلي:

- تحليل قبلي للوضعية المسألة؛
- تدبير الوضعية داخل الفصل؛
- التقويم؛
- التحليل البعدي.

إن أجرأة هذا التصور يتطلب من الأستاذ استحضار المنهجية التي سيتم من خلالها تنزيل الوضعية المسألة، وبالتالي فهو مطالب بتصور حول طريقة تدبير هذه الوضعية داخل الفصل ومن أجل مساعدته فإنه من الأنسب اعتماد ما يلي:

- تقديم المشكل: يمكن تقديم المسألة شفويا أو كتابيا أو باستخدام وسائل ديداكتيكية تساعد التلاميذ على تمثل المسألة؛

• زمن البحث: من المفيد أن يواجه في البداية، كل تلميذ الوضعية المسألة بمفرده لمدة قصيرة نسبيا، وهذه المرحلة تشكل نواة الإشتغال في زمر لاقتراح الحل الموحد فيما بعد. هذا دون أن ننسى الإشارة إلى أن الأستاذ له الحرية في اختيار طريقة العمل (في زمر، فردي ثم في زمر أو فردي) حسب ما تمليه طبيعة الوضعية والظروف؛

• تقاسم ومناقشة ومصادقة: يتعرف الأستاذ على أعمال كل المجموعات، إذ يقدم المنسقون من التلاميذ النتائج المحصل عليها، ويتم تحديد دور المتدخلين من المنسقين عن كل مجموعة. وبعد المناقشة والتحليل من الأفضل أن تتم المصادقة على النتائج بواسطة التحقق من صلاحية هذه الحلول عبر مراقبة المحتوى الحقيقي من طرف المتعلمين أنفسهم؛

• خلاصة: يختتم حل الوضعية المسألة بمبادلات بين الأستاذ والتلاميذ، وبتثمين القيم الإيجابية، ودحض السلبيات، وترسيخ التصرفات الأساسية الناجعة، التي يمكن إعادة استثمارها لاحقا؛

• الامتدادات: قد نجد من بين المجموعات من لم تستطع إنهاء عملها في الوقت المحدد، ومع ذلك، لضمان الاستمرار والتقدم في العمل، يضطر الأستاذ للقفز عن هذا البحث إلى المرحلة الموالية، مع اقتراح أنشطة مماثلة لحل مسألة مكافئة لهاته في وقت لاحق.

ويجب على الأستاذ أن يكون على دراية بأنه أثناء حصة حل وضعية مسألة، لا يقدم أي مساعدة حاسمة للحل، وهذا لايعني غيابه عن النشاط، فهو يتابع الأعمال الفردية عن كثب، ويسجل ويلاحظ المحاولات المتعثرة والصائبة، وهذا يساعده على اتخاذ بعض الإجراءات

المتعلقة بتقاسم وسطي، لتقديم ومناقشة بعض الاختيارات الأكثر أهمية لاستثمارها جماعيا.

أما تدبير الوضعية المسألة، والتي يفترض فيها إثارة فضول المتعلم ومساعدته على بناء تعلماته، فيكون متمفصلا حول مراحل يتم جردها في الجدول التالي، وذلك تماشيا مع تدبير الوضعيات من منظور بروسو، حيث يتم تحديد أشكال العمل وأنشطة كل من الأستاذ والتلميذ مع الأخذ بعين الاعتبار الفروق الفردية في تهييئ الظروف والوسائل اللازمة لتدبير العمل.

أشكال العمل	المراحل	أنشطة التلميذ /الأستاذ	الأهداف
عمل جماعي	التعاقد الديداكتيكي	- يحدد الأستاذ ماهو مسموح به في حل الوضعية، - يحدد الأستاذ أشكال العمل، - يعلن عن المدة الزمنية، - ...	تنظيم العمل.
عمل فردي	الفعل	- يتلمس التلميذ الحل بمفرده، - يستعمل مكتسباته السابقة وتمثلاته الخاصة لتقديم حل مؤقت لهذه الوضعية.	إتاحة الفرصة لكل تلميذ للتعرف عن الوضعية بمفرده، مما يساعده على تقديم مقترحه داخل الزمرة انطلاقا من مكتسباته القبلية.
	الصياغة	- يقدم التلميذ صياغة صريحة للحل المؤقت، - ينتج التلميذ معرفة شخصية خاصة به وحده.	
عمل في زمر	التداول	- تقدم كل مجموعة إنتاجها، - تتم مناقشة كل المقترحات.	تصحيح النتائج المتوصل إليها وتقويتها وإغناؤها
	التقاسم والمصادقة	- يناقش التلميذ مع زملائه في المجموعة الصغيرة الحل المتوصل إليه، - يتلقى الأفكار المساندة أو المخالفة وكذا الإنتقادات.	- تنمية القدرات التواصلية والإجتماعية، - تفادي الملل و الفتور.
عمل جماعي	المأسسة	- تتم مناقشة الحلول المتوصل إليها، - تتم بلورة الحل، - يتم الوقوف على ضبط المصطلحات والرموز الرياضية المستعملة.	- اكتساب المصطلحات والرموز، - استنتاج الخلاصات.
كل أشكال العمل	جميع المراحل	- رصد الأخطاء، والسلوكات المرئية، - تصنيفها و تحليلها.	- تدبير الخطأ باعتباره أساسا للتعلم، - تحليل السلوكات المرئية وتعليلها وتأويلها من أجل معالجتها.

جدول 1.1: مراحل تدبير الوضعية المسألة

1.3.1 عوائق التدريس بالوضعية المسألة

لقد أجمع العديد من الباحثين على أن الحل الأنسب لتدريس الرياضيات هو التدريس بحل المسائل، غير أن هذا الاختيار تعترضه العديد من العوائق نجملها فيما يلي:

- غياب وثائق تتضمن وضعيات مسائل؛
- عائق الوقت؛
- اكتظاظ الأقسام؛
- المقرر (طوله، تنظيم المحتويات، ...)؛
- عدم كفاية الوسائل التعليمية كالموارد الرقمية ووسائل التكنولوجيا الحديثة؛
- ضعف التكوين المستمر للأساتذة؛
- عدم مواكبة المناهج للتدريس بمقاربة الكفايات؛
- ...

2.3.1 الوضعية المركبة (المشكلة)

الوضعية المركبة (أو الوضعية-المشكلة) هي في نفس الوقت الوضعية الهدف والوضعية المشكل ووضعية الإدماج، ومن خاصياتها التركيب (تستدعي تعبئة عدة موارد لحلها). إن الوضعية المركبة تجعل المتعلم:

- يواجه حدثا أو واقعة (ظاهرة فيزيائية، ظاهرة بيئية...)، مما يجعله ينجز مهاما مرتبطة بالحياة والمحيط. وتعتبر بذلك فرصة له لتعبئة مكتسباته وتعلماته في مجالات الحياة؛
- يستحضر موارده ومكتسباته ويعبئها من أجل حل المشكل الذي يواجهه؛
- لا يعيد إنتاج ما اكتسبه بل تجعله ينتج (من إعادة الإنتاج إلى الإنتاج)؛
- يعيد بناء تعلماته ومكتسباته.

أما أهم مميزات الوضعية المركبة فتتمثل في كونها:

- تحيل إلى صنف من المسائل المرتبطة بكفاية محددة وقد تنفتح على مواد أخرى؛
- تعتبر جديدة بالنسبة للتلميذ حيث لم يسبق له أن اشتغل عليها؛
- تشكل تحديا للتلميذ ومحفزا على التعلم الذاتي؛
- تساعد التلميذ على نقل مكتسباته بين سياقات مختلفة؛
- تدفع التلميذ إلى طرح أسئلة عن كيفية بناء تعلماته وأهدافها؛
- تمكنه من الربط بين ما هو نظري وما هو عملي؛
- تمكنه من تحديد حاجاته في التعلم من خلال تعرف الفرق بين ما اكتسبه وما يتطلبه حل الوضعية المركبة.

وللوضعية المركبة وظائف عديدة نذكر منها :

- وظيفة تعلم الإدماج: ويتعلق الأمر بتعلم إدماج الموارد (التعلمات المكتسبة) في سياق خارج سياق المدرسة؛

- وظيفة تقويمية: من خلال اقتراح وضعية جديدة بهدف تقويم قدرة التلميذ على إدماج التعلمات في سياقات مختلفة، ووفق معايير محددة.

ويعتبر النجاح في حل هذه الوضعية المركبة مؤشرا على التمكن من الكفاية، التي هي حسب فيليب ميريو (Ph. Meirieu) وجود ذات أمام وضعية. فأحد العناصر المكونة للكفاية هي التكيف مع الوضعية الجديدة والتصرف فيها بفعالية وهكذا فإن المعرفة لا تشكل نقطة انطلاق المنهجية البيداغوجية، وإنما تشكلها المهام التي تستنفر الموارد التي يتوقف جدواها على مدى صلاحيتها ووظيفتها في تجاوز العائق الذي تتضمنه الوضعية المركبة.

وعند صياغة وضعية مركبة ينبغي مراعاة الخصائص التالية:

- ألا تكون مرتبطة بالمعلومات المدرسة فقط، بل لا بد من انفتاحها على الحياة؛

- أن تدفع المتعلم للعب دور البطل (يجد نفسه معنيا وسط الوضعية)؛

- أن تستحضر القيم؛

- أن تتضمن نقاشا معينا؛

- أن تتأسس على وثائق أصلية وحقيقية (فاتورة، وصل، تصميم، ورقة أو قطعة نقدية، شيك بنكي، صورة، مقال، إنجاز تلميذ...)؛

- ألا توحي بالحل المطلوب وبالمعارف والمهارات التي ينبغي إعمالها (مثل: باستخدامك القاعدة كذا، قم ب...)؛
- أن تكون لغتها واضحة ومباشرة؛
- أن تتضمن عناصر ومعطيات مشوشة.

3.3.1 مفهوم الكفاية

مستويات المقارنة	المقاربة بالأهداف	المقاربة بالكفايات
مفهوم الكفاية	قدرة مكتسبة باعتبارها سلسلة من الاستجابات ترجع إلى مفعول التأثيرات الخارجية.	ملكة تجنيد الموارد المعرفية (معارف + قدرات + مهارات...) لحل وضعية مشكلة من فئة وضعيات.
صياغة الأهداف الإجرائية أو الأهداف التعلمية	وصف وتحديد أفعال سلوكية آنية وعاجلة وجزئية مع تحديد شروط إنجازها والحد الأدنى للنجاح.	وصف وتحديد ما ينبغي على المتعلم عمله وإنجازه لتحقيق أهداف تعلمية تتميز ب: الديمومة، الشمولية، التحويل و التعميم.
تنظيم و تقديم المحتويات	عبارة عن مفاهيم متدرجة ومتصلة، تقدم مجزأة ومرتبة وفق تسلسل خطي ومرتبط بوضعية تعليمية محددة مسبقا.	تنظيم محتويات البرامج وفق التداخل بينها وبين المواد من أجل اكتساب الكفاية.
الطرائق والوسائل التعليمية	- الطريقة سواء كانت حوارا أو مهاما... يغلب عليها الطابع التوجيهي. - الوسائل مختارة ومحددة من طرف المدرس فقط.	- طرائق متنوعة، مرنة ومتفتحة، تستهدف تنمية شخصية المتعلم من جميع جوانبها (حل المسائل، العمل بالمشروع...). - استحضار تقنيات الإعلام والتواصل.

4.1 جدلية الأداة / الموضوع وتغيير الإطار

يعمل الباحث في الرياضيات، عند معالجة وضعيات وإشكاليات رياضية، على خلق مفاهيم جديدة يتم تبريرها وتقييمها بأدوات رياضية، ومن أجل مأسستها وضمها إلى المنظومة المعرفية، يصبح من الضروري إيجاد أفضل الصيغ الممكنة لعزل هذه الأدوات عن سياق نشأتها.

وهكذا يصبح المفهوم الجديد كائنا رياضيا يمكن إعادة تعبئته وتوظيفه كأداة للحل في مجالات أخرى، وقد يتطلب حل الوضعية من الباحث تغيير الإطار المعتمد (مثلا من الجبري إلى الهندسي أو العكس).

هذا التناوب بين الأدوار (كائن - أداة)، (جبري - هندسي) هو ما تطلق عليه الباحثة الفرنسية رجين دوادي (R. Douady) في [28]، صيغة **جدلية أداة - كائن ولعبة تغيير الإطار**. واستندت هذه الباحثة في أعمالها إلى مبادئ نظرية بياجي (J. Piaget) في بناء التعلمات، حيث أكد هذا الأخير أن اكتساب التعلمات لا يكون عن طريق التأثير المباشر للمحيط على الذات، ولا كنتيجة لعمل عقلي خالص حول الموضوع بل كنتيجة لبناءات متتالية للتعلمات يقوم بها الفرد وحده. وأضاف "ثلاثون سنة من البحث سمحت لنا بأن نقول إنه لا يمكن معرفة حالة إنطلاقا من ملاحظات خارجية في غياب صياغة آتية من نشاط الشخص".

“30 ans de recherches nous ont permis de dire qu'il est impossible de connaître un cas à partir des remarques externes dans l'abscence d'une formulation provenant de l'activité de l'individu”.

وكذلك نظريته حول الموازنة، ونقصد هنا أن المعرفة تمر من حالة توازن إلى أخرى عبر أطوار انتقالية حيث يعاد النظر في المعارف السابقة وإذا تمكن الفرد من اجتياز حالة اللاتوازن فمعناه أن هناك إعادة تنظيم المعارف يتم خلالها إدماج المكتسبات الجديدة إلى المعارف السابقة. ونظرية باشلار (G. Bachlard) و فيكوتسكي (L. Vygotsky) والتي تعتبر أن الفرد يتعلم أفضل مع شخص راشد وبالتنسيق مع زملائه وذلك بوضعه في صراع سوسيومعرفي.

وقد تطرقت دوادي (R. Douady) في مقالها [28]، إلى أن الباحث في الرياضيات يواجه مجموعة من المشاكل التي لم يسبق لأحد أن وجد لها حلولا. فتراه يستثمر لهذا الغرض مجموعة من المعارف الرياضية بعضها مؤسسي ومشترك بين جماعة الرياضيين والبعض الآخر مرتبط بالأسئلة المطروحة والطرائق المختارة والممارسات الشخصية. ولحل الوضعية المسألة، التي يقوم فيها بدراسة مفهوم رياضي جديد (الموضوع)، يعبئ الباحث أيضا مجموعة من المفاهيم أو الكائنات الرياضية والتي لها دلالة داخل المجال المدروس، جملة من هذه الأشياء تكون في وضع (الأداة). وقد قامت دوادي (R. Douady) بإسقاط دراستها على التلميذ واعتبرت القسم كمجتمع مصغر من الباحثين، لذلك فإنه عندما يواجه التلميذ مسألة رياضية لم يسبق له أن تعامل مع مثلها، فإنه يقوم باستثمار مجموعة من المعارف الرياضية السابقة، والتي تكون غير كافية لحل الوضعية المسألة، التي يقوم فيها بدراسة مفهوم رياضي جديد (الموضوع)، وهنا يلعب دور الباحث الصغير. في هذه الوضعية اقترحت دوادي (R. Douady) هيكلة تنظيمية جديدة للعملية التعليمية - التعلمية ،مبنية على ثلاثة محاور:

• جدلية أداة - موضوع؛
• جدلية قديم - جديد؛
• لعبة الإطارات (Jeux de cadres) .

1.4.1 جدلية أداة - موضوع

لتطبيق جدلية أداة-موضوع يجب أن تتوفر في المسألة عدة شروط:

• نص المسألة يحمل معنى بالنسبة للتلميذ؛
• قدرة التلميذ على الانخراط في عملية البحث عن حل؛
• عدم تمكن التلميذ من الحل مباشرة بالاعتماد على مكتسباته فقط؛
• ضرورة تمكن التلميذ من أن يقرر هل حله ملائم أم لا من خلال الوضعية؛
• المعرفة التي نريد تعليمها هي الأكثر ملاءمة لحل المسألة.

يتم الإعلان إذن عن المعرفة الجديدة وقد نزع عنها كل ما يحيل على سياق النشأة أوعلى شخصية الباحث. فعادة ما تدمج هذه المعرفة في منظومة معرفية موجودة سابقا بحيث يصبح بإمكانها تغيير الهندسة العامة لهذه الأخيرة. وهكذا تصبح المعارف الجديدة في وضعية الكائن.

يعرف الكائن رياضيا باستقلال تام عن مجالات الاستعمال والتوظيف. وتمكن وضعية الكائن من رسملة المعرفة وتوسيع المنظومة المعرفية، كما

تمكن أيضا من إعادة استثماره في مجالات جديدة وبعيدة كل البعد عن المجال الأصلي. ومن أجل ضرورات البحث، أي حل المسائل، يبتكر الباحثون في بعض الأحيان كائنات رياضية يكون الهدف منها ترتيب الأفكار والمعارف أو تعميم النتائج أو توحيد المسائل التي تحل عن طريق مفاهيم من نفس المجال كالجبر مثلا أو لأجل ضرورات العرض.

أما الموضوع فيقصد به أن الكائن الرياضي أو المفهوم الرياضي يتخذ صفة موضوع عندما يكون هو موضوع الدراسة. بطريقة أخرى هو المفهوم الجديد الذي سنقوم بتقديمه من خلال الوضعية التعليمية - التعلمية التي نحن بصدد القيام بها.

وفيما يخص الأداة فإن المفهوم يكون في وضعية أداة عندما نكون في حاجة لاستعماله لحل مسألة، ونقول إن الأداة ملائمة إذا تمكنا من توظيفها في حل مسألة بفعالية وإذا كان من الضروري استعمالها لحل المسألة وقد نحتاج في مسألة ما أداوت مختلفة لحلها.

مثال: لحل معادلة من الدرجة الثانية في مجموعة الأعداد الحقيقية يمكن استعمال المحددة (الأداة) بفعالية.

ولا بد أن نفصل بين نوعين من "الأداة". فهناك الأداة الضمنية (implicite) حيث أنه في إطار العقد الديداكتيكي مع الأستاذ يجد التلميذ نفسه في مواجهة مسائل رياضية عليه حلها، ويوظف لأجل ذلك تمثلاته الخاصة ومفاهيم وتقنيات يحسن استعمالها دون أن يستطيع تبريرها ودون أن يعرف شروط وحدود توظيفها. فإذا لاحظنا الفرضيات المبررة للتقنيات التي استعملها التلميذ وبالتالي للقرارات التي اتخذها مستوفاة،

فإننا نقول إنه استعمل أدوات ضمنية.

مثال: للبرهنة على وجود مربع مساحته a، فإننا نستعمل اتصال الدالة $x \mapsto x^2$ على المجال $[0, a+1]$ ومبرهنة القيم الوسيطية بشكل ضمني.

مثال: في سياق البحث عن حلول لمعادلة من الدرجة الثالثة وذات معاملات حقيقية، ظهرت الحاجة إلى حساب جذور مربعة لأعداد سالبة (سوف نتطرق لهذا في المثال ٦)، هذه الجذور استطاعت أن تأخذ مشروعيتها من صحة الحلول التي تمكن من إيجادها. في هذه الحالة فإن هذه الجذور تكون أداة ضمنية لحل المسألة.

أما النوع الثاني من الأداة فهو ما يصطلح عليه بالأداة الصريحة (explicite)، حيث إذا كان في مقدور التلميذ صياغة المفاهيم المستعملة وتبرير توظيفها، فإننا نقول أنه استعمل أدوات صريحة (استعمال بشكل فعلي).

مثال: استعمال المتطابقات الهامة في التعميل.

خلاصة : عندما يقترح المدرس مسألة على المتعلمين فإننا نعني بجدلية الأداة - الموضوع، المسلسل المكون من ست مراحل التالية:

المرحلة 1 : القديم
في هذه المرحلة يعبأ التلميذ بعدة مفاهيم رياضية كأدوات معتمدة لحل المسألة جزئيا على الأقل، حيث يتبنى المتعلم هذه المسألة وينخرط في عملية البحث.
المرحلة 2 : البحث
غير أن صعوبة حل المسألة تدفع التلميذ إلى البحث عن وسائل جديدة

ملائمة للحل، ويمكن هنا لعملية تغيير الإطار أن تساعد على توظيف أدوات ضمنية.

المرحلة 3 :الصـــياغة

بعض العناصر التي استعملها المتعلم في المرحلة الأولى والثانية تكون قد لعبت دورا حاسما في المرحلة الثالثة، حيث سيتبناها المتعلم ويقوم بصياغتها، ويمكن أن يتعلق الأمر بقناعات كانت موضوع نقاش وأدت إلى إنتاج صياغات مبررة، كما يتعلق الأمر هنا بأدوات جديدة معلنة يمكن إعادة استعمالها والتعود عليها. غير أن ما يميز هذه المرحلة هو أن أعمال المتعلمين وكذا اقتراحاتهم تكون محط نقاش جماعي.

المرحلة 4 : المأسسة

في هذه المرحلة يعرض المدرس المعارف الجديدة حيث ينظم ويهيكل التعاريف والمبرهنات والبراهين مع تنظيم ما هو أساسي وما هو ثانوي، ومن مسؤوليته إسناد وضع الكائن (statut d'objet) للمفاهيم الجديدة التي استعملت كأدوات لحل المسألة. كما أن الهيكلة الشخصية من طرف التلميذ تعتبر من الأهمية بمكان لكي تكون هناك معرفة فعلية، من أجل ذلك يحتاج إلى أن يختبر هذه المعارف التي يظن أنه اكتسبها بنفسه، ويقف على حصيلة تعلمه.

المرحلة 5 : الإستئناس و إعادة الاستثمار

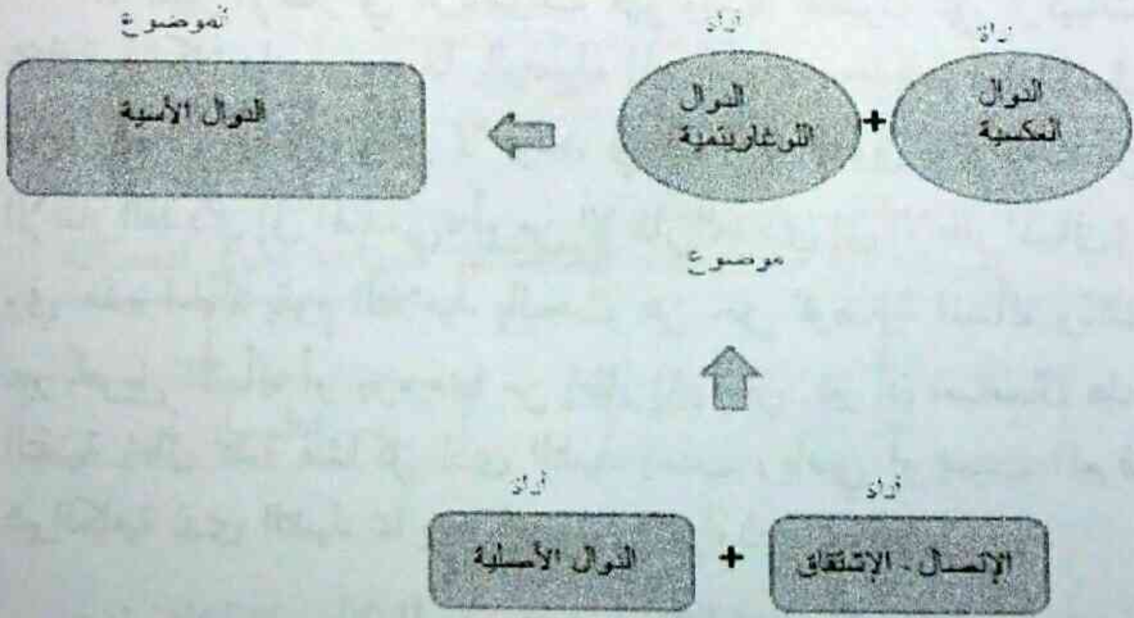
سيكون على التلاميذ حل مسائل متنوعة تستدعي المعرفة الممأسسة (institutionnalisée)، وبالتالي سيعملون على تنمية وتطوير عاداتهم وخبراتهم، كما سيعملون على دمج معارفهم الاجتماعية ومواجهتها بمعارفهم الخاصة، وعلى تنمية تصوراتهم بشكل يسمح لهم بالتعامل مع حقل أوسع من المسائل.

المرحلة 6 : الانفتاح على مسائل جديدة

خلال هذه المرحلة يقترح الأستاذ على التلاميذ مسألة أكثر تعقيدا حيث سيلعب الكائن، موضوع الدرس، دور "القديم المعلن" من أجل الشروع في دورة جديدة لجدلية الأداة - الكائن/الموضوع.

أداة ⟸ كائن رياضي/موضوع ⟸ أداة

مثال: بناء الدالة الأسية باستعمال الدالة اللوغاريتمية.



2.4.1 تغييـــر الإطار

ا) ماذا نقصد بالإطار؟

يتكون إطار ما من مجموعة كائنات رياضية وصيغها المتنوعة التي تنتمي كلها إلى فرع واحد من فروع الرياضيات وكذلك العلاقات التي تجمع بين هذه الكائنات، ومختلف الصور الذهنية التي ترتبط بهذه الأخيرة وعلاقاتها.

أما تغيير الإطار في الرياضيات فهو وسيلة للحصول على تركيبات مختلفة لمشكلة ما، تسمح لنا بالوصول إلى تحديات جديدة نستعمل في حلها أدوات جديدة والتي لا توجد في الصياغة الأولى (الإنتقال من الإطار العددي إلى الهندسي، أو من الإطار العددي إلى الإطار المبياني). وفي هذه الحالة يقوم التلاميذ بالبحث عن حل للوضعية المسألة وذلك عبر تحويل المسألة أو جزء منها من إطار إلى آخر. غير أن استعمال هذه التقنية يخلق عدة مشاكل لدى التلميذ بسبب رياضي أو بسبب المعرفة غيرالكافية لدى التلميذ مما يعتبر مصدرا للاتوازن لدى التلميذ.

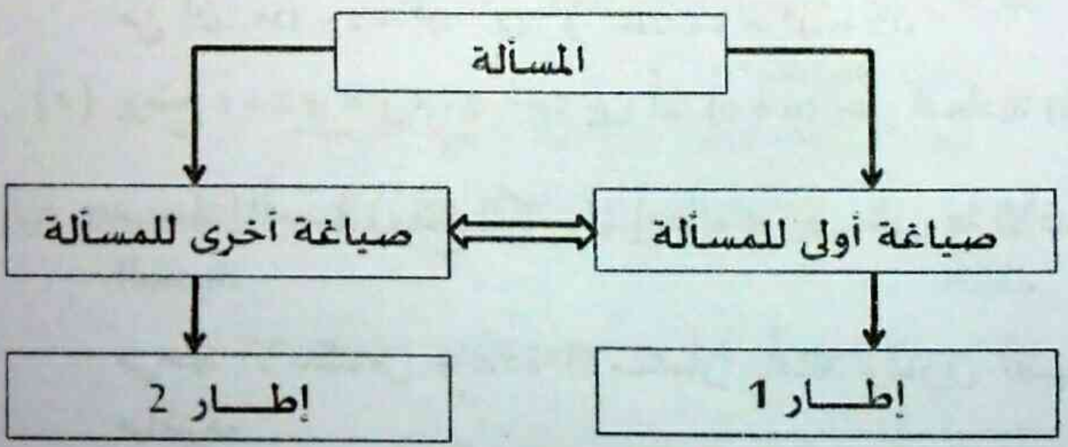
ويتم عادة تغيير الإطار عبر المراحل التالية:

مرحلة النقل والتأويل : تكون المسألة المقترحة على التلاميذ مصاغة في إطار معين (جبري، هندسي، تحليلي...)، وآخذة بعين الاعتبار لمعارفهم وتجاربهم وعاداتهم. ستقودهم دراسة المسألة المقترحة إلى ترجمة نص المسألة أو جزء منه إلى إطار آخر، ثم القيام بتأويل عدد من الأسئلة وبذلك سيعملون على إقامـة عدد من التقابلات أو الترابطات بين الإطارات.

مرحلة التقابلات الناقصة : إن التقابلات التي نسجها التلاميذ بين مختلف الإطارات تظل ناقصة في هذه المرحلة وذلك لأسباب إما رياضية محضة، أو لعدم كفاية معارفهم، فتصبح الوضعية المقترحة مولدة لحالة اللاتوازن المعرفي وتسمح بإعادة هيكلة المعارف.

مرحلة تحسين التقابلات وتقدم المعرفة : إن إقامة تواصل/حوار مناسب بين الإطارات ستشكل عاملا أساسيا في حصول حالة التوازن، كما أن التفاعل ما بين هذه الإطارات يسمح بتقدم وتنمية المعارف المنتمية لكل منها.

الشكل 1.1: خطاطة تغيير الإطار



مثال 1: (الأعداد العقدية)

نعتبر المعادلة: $(E): \quad x^3 - 15x - 4 = 0; \quad (x \in \mathbb{R})$.

1. (ا) أدرس تغيرات الدالة g المعرفة بما يلي: $g(x) = x^3 - 15x - 4$.

   (ب) استنتج أن المعادلة (E) تقبل ثلاثة حلول حقيقية.

2. (ا) بين أنه إذا كان $\left\{ \begin{array}{lcl} u^3 + v^3 & = & 4 \\ v \cdot v & = & 5 \end{array} \right.$ فإن $u + v$ حل للمعادلة (E).

(ب) بين أنه إذا وجد عددان u^3 و v^3 يحققان: $\begin{cases} u^3+v^3 &= 4 \\ v\cdot v &= 5 \end{cases}$،
فإنهما حلان للمعادلة $(F):\quad x^2-4x+125=0$.

(ج) هل تقبل هذه المعادلة الأخيرة حلولا في $\mathbb{R}$؟

3. نقبل أن $i^2=-1$ أداة ضمنية مرتبطة بمفهوم في طور البلورة لم يستوعبه التلميذ بعد.

(ا) بين أن المعادلة (F) تكافيء $(F'):\quad (x-2)^2=-121$.

(ب) باستعمال العدد i تحقق أن المعادلة (F') تقبل حلين هما $(2+11i)$ و $(2-11i)$.

(ج) بتعويض i^2 ب -1 وباستعمال جميع قواعد الحساب في $\mathbb{R}$، تحقق من أن: $(2-i)^3=2-11i$ و $(2+i)^3=2+11i$.

(د) بوضع $u=2+i$ و $v=2-i$، بين أن $(u+v)$ حل للمعادلة (E).

- مرحلة المأسسة (وضع الكائن): إعطاء تعريف لمجموعة الأعداد العقدية.
- مرحلة الاستئناس وإعادة الاستثمار: أمثلة وتمارين تطبيقية مباشرة.
- مرحلة تعقيد المهام: إقامة عدد من التقابلات أو الترابطات مابين الإطارات.

يقترح الأستاذ مسائل أكثر تعقيدا بحيث يكون الكائن الرياضي الجديد مكتسبا قبليا لدى التلميذ ويلعب دور أداة في تقديم موضوع جديد من أجل الشروع في دورة جديدة للجدلية أداة - موضوع.

مثال 2: (بناء مفهوم البرهان بالترجع)

1. نريد أن نبين: $P(n) : (\forall n \in \mathbb{N});\ 6 \mid 7^{2n} + 5^{2n+1}$.

(ا) بين أن العبارة $P(n)$ صحيحة بالنسبة ل $n = 0$.

(ب) بين أن $P(1)$ و $P(2)$ عبارات صحيحة.

(ج) نفترض أن $P(n)$ عبارة صحيحة، بين أن $P(n+1)$ عبارة صحيحة.

(د) ماذا تستنتج؟

2. لتكن $Q(n)$ خاصية لمتغير صحيح طبيعي n.

نفترض أن الخاصية $Q(n)$ تحقق الشرطين:

- $Q(0)$ صحيحة؛
- العبارة $(Q(n) \Longrightarrow Q(n+1))$ عبارة صحيحة.

لتكن A مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية n حيث $Q(n)$ عبارة خاطئة.
نفترض $A \neq \varnothing$ وليكن m أصغر عنصر من A.

(ا) بين أن $0 \notin A$، ثم استنتج أن $m \geqslant 1$.

(ب) نضع $M = m - 1$، بين أن $M \notin A$.

(ج) بين أن $Q(M+1)$ عبارة صحيحة.

(د) استنتج أن $m \notin A$.

هذه الخاصية تسمى "مبدإ الترجع" وهي التي يعتمد عليها الاستدلال بالترجع.

- مرحلة المأسسة: تعريف "مبدأ الترجع" وإعطاء الخاصية.

• مرحلة الاستئناس: أمثلة.

• مرحلة تعقيد المهام: تعبئة الخاصية في وضعيات أخرى أكثر تعقيدا.

مثال 3: (استعمال الإطار الهندسي للتظنن - تغيير الإطار)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي: $\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_{n+1} &= 2+\frac{3}{u_n} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$.

ونعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ ب $f(x)=2+\frac{3}{x}$.

1. (ا) مثل f في معلم متعامد ممنظم ثم مثل النقط ذات الأفاصيل u_1 ، u_2 و u_3.
   (ب) تظنن سلوك المتتالية (u_n).
2. حل المعادلة: $f(x)=x$.
3. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة بما يلي: $(\forall n \in \mathbb{N})$ $v_n=\dfrac{u_n-3}{u_n+1}$.
   (ا) بين أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية، ثم حدد v_n و u_n بدلالة n.
   (ب) تحقق أن: $(\forall n \in \mathbb{N})$ $|u_n-3| \leqslant \dfrac{4}{3^n+(-1)^n}$.
   (ج) استنتج أن: $(\forall n \in \mathbb{N})$ $|u_n-3| \leqslant \dfrac{4}{n-1}$.
   (د) أحسب $\lim u_n$.

مثال 4: (بناء العدد المشتق "الإطار العددي")

عند السقوط الحر لجسم بدون سرعة بدئية، تكون حركته متغيرة بانتظام ومحددة بالدالة الزمنية $d=f(t)=5t^2$ حيث t هي المدة بالثانية و$d=f(t)$ المسافة بالمتر. بين أن السرعة المتوسطة بين اللحظتين t و $t+h$ حيث $h>0$ هي $10t+5h$.

مما لاشك فيه أن حركة الجسم في اللحظة $t=0,5s$ لها سرعة معينة، الجدول التالي يعطينا السرعة المتوسطة.

1. إملأ الجدول علما أن $t = 0,5s$.

$0,01$	$0,001$	$0,0001$	$-0,0001$	$-0,001$	$-0,01$	h
						$t+h$
						السرعة المتوسطة بين t و $t+h$

2. باستعمال الجدول تظن نهاية السرعة المتوسطة عندما يؤول h إلى 0.

3. أحسب $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(0,5+h)-f(0,5)}{h}$ ثم قارن هذه النهاية بنتيجة السؤال (2).

مثال 5: (التأويل الهندسي للتكامل)

لتكن f الدالة المعرفة على المجال $[0;4]$ ب $f(x) = \sqrt{x}$ وليكن (C_f) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

لكل عدد t من $[0;4]$ نرمز ب $\Delta(t)$ للسطح المحصور بين (C_f) ومحور الأفاصيل والمستقيمين اللذين معادلتيهما على التوالي: $x = 0$ و $x = t$
ولتكن $A(t)$ مساحة الحيز $\Delta(t)$.

1. ليكن h عددا حقيقيا موجبا حيث $t < t+h < 4$.
   (ا) ماذا يمثل العدد $A(t+h) - A(t)$.
   (ب) بين أن $h\sqrt{t} \leqslant A(t+h) - A(t) \leqslant h\sqrt{t+h}$.
   (ج) استنتج أن الدالة $t \longmapsto A(t)$ دالة أصلية للدالة f على $[0;4]$.

2. بين أن: $\forall t \in [0;4];\quad A(t) = \int_0^t f(x)\,dx$

3. أحسب $A(t)$ بدلالة t واستنتج $A(4)$.

مثال 6: (التكامل كأداة لحساب نهاية متتالية)

نهدف في هذا النشاط إلى دراسة تقارب المتتاليـــــــــة:

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

1. (ا) ليكن n عددا صحيحا طبيعيا والدالة f_n المعرفة من $[0; \frac{\pi}{2}]$ نحو $\mathbb{R}$ ب:

$$\begin{cases} f_n(x) &= \frac{\sin(2(n+1)x)}{\sin(x)}; \quad x \neq 0 \\ f_n(0) &= 2(n+1) \end{cases}$$

بين أن f_n متصلة على $[0; \frac{\pi}{2}]$.

(ب) لتكن المتتالية: $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)\, dx$.

بين أن $(\forall n \in \mathbb{N});\quad I_{n+1} - I_n = 2 \times \frac{(-1)^{n+1}}{2n+3}$.

(ج) بين أن $(\forall n \in \mathbb{N});\quad I_n = 2U_n$.

2. (ا) أحسب $(\forall k \in \mathbb{N}^*);\quad \int_0^1 x^{2k}\, dx$.

(ب) استنتج أن $(\forall n \in \mathbb{N});\quad I_n = 2\int_0^1 \frac{1+(-1)^n x^{2n+2}}{1+x^2}\, dx$.

(ج) أثبت أن $(\forall n \in \mathbb{N});\quad |I_n - 2\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, dx| \leqslant \frac{2}{2n+3}$.

(د) أدرس تقارب I_n.

الفصل 2

مفاهيم في ديداكتيك الرياضيات

1.2 الإبستمولوجيا والديداكتيك

تساءلت الباحثة أرتيج ([..-1946] M. Artigue) في [2] عن الحاجيات الإبستمولوجية للديداكتيك أي الحاجيات المصوغة بلغة السيرورات التي من خلالها تبنى وتتطور المفاهيم الرياضية، وبصفة عامة حول المعارف وخاصيات النشاط الرياضي كأدوات للتعليم. كما أثارت مفهوم التحليل الإبستمولوجي الذي يساعد الديداكتيكي على قراءة تاريخ ونشأة المفهوم والتمثلات الإبستيمولوجية للرياضيات ونقلها ديداكتيكيا. وبشكل أدق فالتحليل الإبستمولوجي ضروري للديداكتيكي لما يقدمه له من مساعدات، حيث يساعده على مراقبة التمثلات الإبستيمولوجية للرياضيات الناتجة عن التعليم، كما يساعده على إعطاء تاريخ لمفاهيم رياضية، مثلا: "الصرامة الرياضية بالنسبة للتعليم الإعتيادي".

من أجل تأسيس صرامة خالصة للرياضيات، تطرقت أرتيج إلى

مفهوم الصرامة في عالم الرياضيات وأكدت أنها مشفرة بمدخل عالم الهندسة والبرهانِ، والمرجع الضمني أو الصريح للهندسة اللاتينية المرتبطة بهذه التمثلات تتدخل من أجل تمرير وتقوية هذا الربط بالصرامة خارج الزمن. وقد بينت باربين (E. Barbin [1949-..])، في [8]، بوضوح تقدم الصرامة بدلالة الوقت، وارتباطها بمجال الرياضيات وبمستوى بلورة الكائنات التي تستعملها.

أما حساب التفاضل والتكامل (Calcul infinitésimal) والذي له معنى في علاقته بالمجال، فقد بدأ تطوره إنطلاقا من القرن الخامس عشر خاصة في علاقته بطريقة غيرالقابل للتجزيء (Indivisibles)، طريقة الكميات المتناهية الصغر (Infiniment petit) وطريقة المتواليات (Séries). وطبيعة الطريقة وقدرتها على التلاؤم من أجل حل عدد كبير (صنف) من المسائل والمنتوجات المرتبطة بها هي محددات أساسية للمصادقة عليها.

كما أضاف شوفلار (Y. Chevallard [1946-..]) إلى قاموس ديداكتيك الرياضيات مفهوم "النقل الديداكتيكي"، وللإشارة فإن هذا المفهوم قد أثير من قبل من طرف فيري (M. Verret) في [58]. في هذا الإطار، فإن تدخل التحليل الإبستمولوجي أساسي نظرا للمساعدة التي يقدمها والتي تتجلى في إماطة الغموض الذي يشوب شفافية الكائنات التي نتناولها على مستوى المعرفة وتساعد الديداكتيكي من إخراج تمثلات إبستمولوجية خاطئة (زائفة) التي تؤدي إلى التشويش على ممارسته التعليمية، وبتعبير آخر أخذ قياس للفارق بين المعرفة العالمة والمعرفة المدرسية.

إن المهام الموكلة للديداكتيكي تتجلى في بناء المعارف الرياضية في وسط مختار لهذا الغرض مكون من أشخاص، وسائل،... في هذا الإتجاه

فهو يواجه مسائل للبلورة و تحليل نشأة المعرفة. إن الشروط التي تقود هذه النشأة ليست متطابقة مع تلك التي قادت النشأة التاريخية، لكن هذه الأخيرة، حسب أرتيج، تبقى للديداكتيكي، على الأقل، مرسى للتحليل الديداكتيكي.

إن الإبستمولوجيا تتدخل على أعلى مستوى، لأن تعليم الرياضيات لا يقتصر فقط على تقديم معارف رياضية، بل أعم من ذلك فهو ثقافة ويهدف إلى إدخال التلاميذ إلى عالم الرياضيات. فماهو عالم الرياضيات؟ وماهي السيرورات العامة التي تقود الفكر؟ إنها التحليل الإبستمولوجي، فهو المسؤول عن هذه الأسئلة. ترسل إلى الديداكتيك عدد من الأسئلة العامة والأساسية من أجل تيسير إنتاج هندسة ديداكتيكية، فمثلا تحليل التعليم الإعتيادي يتم بالإجابة عن الأسئلة التالية:

- ماذا ننقل في تعليم مكونات هذه الثقافة وعلاقاتها الداخلية؟
- هل هناك نقل أدنى أو مجموعة نقل أدنى يجب احترامه من أجل الحفاظ على طبيعة هذه الثقافة؟
- هل هذا ممكن؟ بأية شروط؟
- على ماذا يرتكز هذا النقل؟
- ما هي الآثار المواكبة له؟

في هذا التصور فإن عمل الديداكتيكي لا يقتصر فقط على إدماج هذه التساؤلات ذات الطبيعة الإبستمولوجية لنشاطه بل هو مطالب أيضا ببناء الإطار النظري الذي يسمح له بالعمل حول هذه التساؤلات ورسملة المكتسبات الديداكتيكية.

وقد أولت أرتيج إهتماما بالغا للعائق الإبستمولوجي، حيث قالت إن نظريات الوضعيات الديداكتيكية التي أنتجها بروسو والمفهوم "أداة-موضوع" ولعبة الإطارات اللذين تطرقت لهما دوادي (R. Douady) ومفهوم الوضعية الديداكتيكية عند أليبرت، لوكران وريشارد (D. Alibert, M. Legrand et F. Richard) تلعب دورا محوريا في بناء التعلمات و القراءة الصحيحة للمعطيات الإبستمولوجية برمتها سواء ذات طبيعة تاريخية أو ثقافية وتحليلها إبستيمولوجيا. لكن من منظورها إذا طلب من الديداكتيكي في وقت وجيز تحديد بصمة الإبستمولوجيا على الديداكتيك فأول شيء يروج بذهنه ليست نظريات الوضعيات ولا جدلية الأداة و الموضوع، فهذه أدوات داخلية للديداكتيك و غير مرئية، بل كلمة العائق المصاحبة للذهن (حسب باشلار) لأن حول مفهوم العائق الإبستمولوجي يرتكز وضوح الإبستمولوجيا في الديداكتيك.

2.2 العائق الإبستمولوجي

قدم الفيلسوف والإبستمولوجي باشلار (G. Bachelard) في [6] سنة 1938، مفهوم العائق الإبستمولوجي وتطرق في [6, ص. 13] إلى أنه لبحث الشروط السيكولوجية لتطور المعرفة، يجب طرح إشكالية المعرفة العلمية بلغة العائق، وأضاف أنه لا يتعلق الأمر باعتبار عوائق خارجية مثل التعقيد، ضعف المعنى، الضعف الذهني، لكن في هذا المضمار، نبين أسباب الجمود (stagnation) والقصور (inértie) والتي أطلق عليها العوائق الإبستمولوجية.

كما أضاف أن المعرفة الحقيقية ليست دائما ما نتوقعه ولكن بالرجوع إلى ماضي الخطإ نجد الحقيقة، وبناؤها يتم على غرار المعارف السابقة، بهدم تلك المعارف غيرالمبنية بشكل جيد وذلك بإثارة الأسباب والعراقيل وتعديلها.

لقد تطرق باشلار إلى أصناف كثيرة من العوائق نذكر منها: عائق التجربة الأولى، عائق المعرفة العامة، العائق الشفاهي، عائق المبالغة في استعمال صور مألوفة، عائق المعرفة النفعية، عائق النهج الموضوعي، العائق الواقعي، العائق الديني وعائق المعرفة الكمية...

ولابد من الإشارة أن باشلار قد أبعد صراحة الرياضيات من هذا السياق، حيث نجد في [6, ص. 22] " تاريخ الرياضيات هو نمط ذو انتظام يثير الإعجاب، فهو يعرف مراحل للوقوف ولم يعرف مراحل للخطأ. إذن فجميع أطروحات هذا الكتاب لا تخص المعرفة الرياضية فهي تعالج المعرفة بصفة عامة. "

ويبقى أول نص ديداكتيكي أثار مفهوم العائق الإبستمولوجي في الرياضيات، حسب آرتيج (M. Artigue) هو الذي قدمه بروسو (G. Brousseau) سنة 1976 في [14]. حيث ارتأى خاصة في مفهوم العائق الإبستمولوجي الوسيلة التي يمكن من خلالها تغيير حالة الخطإ (وضع الخطإ) بالبرهان على أن: الخطأ والرسوب ليس لهما الدور المختصر الذي نريد لهما أن يلعباه في بعض الحالات. فالخطأ حسب بروسو ليس دائما أثرا للجهل، لعدم الدقة أو للعشوائية التي نعتقدها من خلال نظريات تجريبية أو سلوكات التعلم، لكنه أثر لمعرفة سابقة كانت قد قدمت دورها بنجاح لكنها أصبحت الآن خاطئة أو باختصار غير ملائمة.

الأخطاء من هذا النوع ليست غير منتظمة وغير مرئية، فهي مكونة من عوائق، فهي في عمل الأستاذ، بدل عند التلميذ، مكون لمعنى المعرفة المكتسبة. وقد فصل بروسو بين ثلاثة مرجعيات أساسية للعوائق (مصادر) التي تعترضنا في تدريس الرياضيات:

- مصدر نمائي ويخص العوائق التي لها علاقة بحدود وقدرة التلميذ الذهنية على استقبال المعرفة؛
- مصدر ديداكتيكي ويرتبط بعوائق ناتجة عن اختيار النظام التعليمي؛
- مصدر ابستمولوجي ويخص العوائق المرتبطة بالمقاومة للمعرفة غير الملائمة (mal adapté) أي العوائق من منظور باشلار.

كما ركز أيضا على أهمية التحليل الابستمولوجي للديداكتيكي وتحديد العوائق التي تسمح بتصنيف الصعوبات الاعتيادية التي تعترض تعلم مفهوم ما، ففي نظره هذا الأمر لا مفر منه لأنه مكون أساسي لتطوير المعرفة. ومن أجل تسليط الضوء على هذا التنظير، ضرب بروسو المثل بالأعداد العشرية وحدد عائقا ابستمولوجيا أساسيا: "هو الذي يسعى إلى معالجة الأعداد العشرية كأعداد صحيحة بفاصلة"، وعائقين ابستمولوجيين يتمثلان في مشكل تقابل $\mathbb{N}$ بالنسبة للضرب، وبناء $\mathbb{D}$ كأداة لتقريب $\mathbb{Q}$ من جهة، وتمثل الأعداد الجذرية والعشرية على أساس أنها خارج وأنها دالة خطية على $\mathbb{Q}$ من جهة ثانية.

وقد اعتبر كلايزر (G. Glaeser [1918--2002]) في [34]، العوائق الإبستمولوجية التي لها علاقة بتاريخ المفهوم والتطور المفاهيمي للأعداد السالبة، حيث استعمل الكلمات عوائق (obstacles)، صعوبات (difficultés)، أعراض (symptômes)، وعتبة (seuil). كما أن تحليله

للنص التاريخي قاده إلى رصد عدة عوائق في تاريخ الأعداد السالبة صنفها إلى عوائق خاصة بفهم مقنع لخاصية الإشارة وخاصيات "زائفة" في حسابيات ديوفانت (Diophante). ثم قام بجردها كما يلي:

- عدم القدرة على تناول كميات سالبة معزولة؛
- صعوبة إعطاء معنى لكميات سالبة معزولة؛
- صعوبة جمع المستقيم العددي الذي يتجلى في جعل المستقيم كجمع (superposition) نصفي مستقيمين متقابلين؛
- الغموض المطلق للصفرين (الصفر الأصل والصفر المطلق)؛
- صعوبة الابتعاد من المعنى "الملموس" المسند (attribué) إلى الأعداد؛
- الأمل في نموذج جامع مثلا: الأمل في صلاحية نماذج الجمع بالنسبة للضرب.

وللإشارة فإن، حسب كلايزر (G. Glaeser)، العدد السالب كان موجودا منذ القرن الثالث بعد الميلاد، رغم عدم وجود مراجع حول ذلك. وكتب أنه أنذاك كان تناول الأعداد السالبة بالصيغة التالية:

“Ce qui est de manque multiplié par ce qui est de manque donne ce qui est positif. Tandis que ce qui est de manque multiplié par ce qui est positif donne ce qui est de manque”.

ومن وجهة نظر مخالفة، قام ديرو (A. Duroux [1945-..])، في [30]، خلال عمله حول القيمة المطلقة بنقد كلايزر (G. Glaeser) فيما يتعلق بالصعوبة والعائق وخاصة الصياغة (1) و(2) وتساءل حول الوسيلة التي يمكن بها مواجهة المسائل التي تتطلب تناول كميات سالبة معزولة:

• هل نطرح هذه المسائل؟
• كيف يتم حلها؟
• هل نؤمن بحلها؟
• هل ما يتضح لنا اليوم "صعوبة" قد اعتبر من قبل "صعوبة"؟
• ما هي الايجابيات المجنية من "رفض" تناول كميات سالبة معزولة أو ما هي السلبيات التي سيتم تفاديها؟
• لماذا المحاولات من أجل التغيير أو التحديد باءت بالفشل في ذلك الوقت؟
• ربما كان سبب الفشل عدم وجود شروط أخرى أو ضرورة القيام بعمل آخر فما هو؟

وأضاف ديرو أن رصد المعرفة أو الإمكانية الناقصة والتي حالت دون إعطاء الحل "الصائب" أو الصياغة المناسبة، قد غطت على ضرورة فهم بأية وسائل سيتم حل الإشكالات التي تستدعي ضرورة استعمال الكميات السالبة المعزولة.

ومن أجل أن تكون صعوبة معينة، ومحددة تاريخيا، مؤهلة لأخذ صفة "العائق" يجب أن تتجلى في معرفة موجودة في مجال ذي صلاحية أوسع، ذات فعالية وذات مقاومة. فعند التحليل التاريخي لهذه المقاومة يمكن الاقتناع بضرورة البحث عن العناصر التي تحدد الصعوبات لدى التلميذ والبحث أيضا عن الحجج وذلك من أجل بناء وضعية تعليمية تسمح باختراق هذه المقاومة.

وقد عرف ديرو (A. Duroux) العائق على أنه:

- معرفة، تصور، وليس بصعوبة أو نقص معرفة؛
- هذه المعرفة تنتج أجوبة ملائمة لسياقات نتعرض لها باستمرار؛
- تولد أجوبة خاطئة خارج السياق. جواب صحيح وعام (universel) يفرض رأي مخالف؛
- معرفة تقاوم التناقضات التي تعترضها، وتؤسس لمعرفة أحسن. إنه غير كاف تملك معرفة أحسن من أجل هدم المعرفة السابقة، فإظهار السابقة ضروري ليتم تذويبها في المعرفة الجديدة؛
- رغم الوعي بعدم دقة المعرفة، فإنها تواصل المقاومة.

وبتعبير آخر يمكن رؤية العائق على أنه:

- معرفة تعمل في مجال صلاحية أوسع؛
- معرفة عندما نريد ملاءمتها لوضعيات تنتج أخطاء ذات مقاومة أكبر، يمكن تحديد مصدرها ويمكن تحليلها؛
- يقاوم عندما نريد ملاءمته محليا؛
- ينتج معرفة جديدة عند التخلص منه وتعديله.

في أطروحة أخرى لكورنو (B. Cornu)، ومن أجل تسليط الضوء على مفهوم العائق الابستمولوجي وإيجاد الوسائل الديداكتيكية لمساعدة التلميذ على تجاوز العائق، قام بملاحظة زوجين من التلاميذ في مهمتين: حيث كلف الزوج الأول بتحديد المماس كنهاية (sécante) متغيرة، أما الثاني فكلف بإيجاد معادلة المماس للمنحنى الممثل لدالة الجيب (Sinus)

في الأصل. ووضع لائحة من العوائق الابستمولوجية المرتبطة بالنهاية تتكون في خمس عوائق كما يلي:

- العائق المرتبط بمالانهائية (horror infiniti)، ويحتوي على العوائق المرتبطة برفض وضع العمليات الرياضية عند المرور إلى النهاية، النقل الأتوماتيكي لطرق الجبر لتناول الكمية المحدودة للكميات غير المحدودة، ثم نقل خاصيات حدود متتالية متقاربة لنهايتها وأخيرا العائق الذي يتجلى في ربط المرور إلى النهاية بحركة فيزيائية أو بتقريب؛
- العوائق المرتبطة بمفهوم الدالة: تواري مفهوم الدالة المدروسة، الاقتصار على قيم متتالية معلومة، الاختصار الرتيب وعدم الفصل بين النهاية ومفهوم المحد القصوى والمحد الدنيا؛
- العوائق الهندسية: الحدس الهندسي هو "عائق جدي من أجل صياغة تعريف دقيق، يحول دون تحديد ما الذي يجب فهمه حول التمييز بين كميتين عوض ربط مفهوم النهاية بمفهوم محد مجموعة"؛
- العوائق المنطقية: مرتبطة بتغييب المكممات أو بترتيبها؛
- عوائق الترميز: مرتبطة بمقاومة تقديم ترميز خاص من أجل المرور إلى النهاية.

أما بروسو ،في كتابه [17]، فقد أعاد تحليل المقاربة بالعائق في ديداكتيك الرياضيات وحدد الخطوات التي يجب أن يتتبعها الباحث الديداكتيكي، ونلخصها فيما يلي:

- إيجاد الأخطاء الشائعة والبرهان على أنها تتجمع حول تصورات؛

• تحديد العوائق في تاريخ الرياضيات؛

• مواجهة العوائق التاريخية مع عوائق التعلم وتحديد طبيعتها الإبستمولوجية.

يلعب إعتماد مقاربات ذات بعد إبستمولوجي دورا فعالا في تدبير التعلمات، وخاصة تدبير الفصل وتخطيط وضعيات ديداكتيكية تحترم نشأة المفهوم ومراحل تطوره، ويمكن من خلالها تملك الوضعية وبالتالي تحقيق البعد الأديداكتيكي (a-didactique) من منظور بروسو. ويعتبر باشلار من الأوائل الذين اشتغلوا على تحليل تطور المعرفة وذلك بإثارة أهمية القطيعة الإبستمولوجية، فحسب باشلار فإن بناء المعرفة العلمية تستدعي القطيعة مع المعارف القديمة والتي اصطلح عليها "المعارف المشتركة".

إن المعارف الأولية لدى التلميذ والتأويلات المحتملة في كل سياق توقعه غالبا في أخطاء، لكن بمجرد إعادة التأمل فيها، من طرف المتعلم، وانعكاساته حولها، يتمكن من تعديلها.
وللتوضيح نستحضر المثال التالي: **"نصف الشيء أصغر من الشيء".**
وصياغة هذا النص رياضيا تكتب على الشكل التالي: $(\forall x);\ \frac{1}{2}x < x$.
فبالنسبة للتلميذ هي عبارة رياضية صحيحة وذات معنى لأنها تتطابق مع الواقع الملموس، غير أن التلميذ على دراية تامة بكون $-3 > -6$. ومن ثم، فوضع التلميذ أمام عبارتين متناقضتين (situations-conflits):

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x < x;\ \ \forall x \\ \\ -3 > -6 \end{cases}$$

يمكن أن تقود التلميذ إلى الشك في المتفاوتة الأولى وإعادة الصياغة على

الشكل التالي:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x < x; & (\forall\ x > 0) \\ \frac{1}{2}x \geqslant x; & (\forall\ x \leqslant 0) \end{cases}$$

وتعتبر هذه النظمة الأخيرة معرفة جديدة تم التوصل إليها بتعديل الأولى وتعويضها بأخرى ملائمة. هذا المثال يوضح كيف يمكن للمعارف الأولية المرتبطة بتجارب ملموسة (experiences pratiques) أن تشكل عائقا لاكتشاف المعرفة، والتساؤل الجديد الذي ساهم في تعديل المعارف الأولية (المشتركة) يتجلى في وضعيات تبدوا متناقضة وتنتج ما يسمى بالنزعة المعرفية (conflit de connaissances) أو (conflit cognitif).

لإثارة دور هذه المقاربة في التدريس، لابأس أن نذكر أن جل أساتذة الثانوي التأهيلي (أو التعليم العالي) يشتكون صعوبات التعلم لدى تلامذتهم، وصعوبة تناول المفاهيم والعمليات والتجريد والأدوات المنطقية. فمثلا إذا تطرقنا لمفهوم النهاية، فالصعوبة غير معزولة عن سياقها التاريخي حيث نذكر في هذا السياق أن عالم الرياضيات أولير (L. Euler [1707-1783]) لم يكن ليدرك مفهوم النهاية، وقد انتظر الرياضيون قرونا من أجل التأسيس لمفهوم النهاية مع فييرستراس (K.Weierstrass[1815-1897]) وكوشي (A-L.Cauchy[1789-1857]).

لقد عرف مفهوم النهاية بالثانوي التأهيلي نقاشا، وخاصة في مقرراتنا بالمغرب، وتم اختزاله حتى يتسنى للتلميذ استيعابه، لكن هذا الإختزال قد يوقظ لدى التلميذ تمثلات ومعارف تقاوم المعارف الجديدة لأن جل التلاميذ بالثانوي التأهيلي يعتبرون أن مفهوم النهاية هو فقط "عملية تعويض!!!". وقد ذهب بعض الديداكتيكيين إلى تغيير الإطار إسوة بنظرية دوادي واعتماد وضعيات ترتكز بشكل أكبر على مبيانات يمكن

من خلالها تلمس مفهوم النهاية، إلا أن هذا الطرح يضعنا أمام تساؤل جديد، هل الإطار الهندسي يمكننا من بناء مفهوم الاتصال الذي هو مرتبط ارتباطا وطيدا بمفهوم النهاية؟ بطبيعة الحال لا. ومن بين الأخطاء الشائعة لدى أساتذة الثانوي التأهيلي "الدالة المتصلة هي الدالة التي يمكن رسم منحناها بدون رفع اليد"، غير أن دالة فييرستراس (K. Weierstrass)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cos(4^n x)$$

هي دالة متصلة ولا يمكن رسمها باليد. ونفس التساؤل نطرحه فيما يخص قواعد الإشارة بالنسبة لتلامذة الثانوي الإعدادي، الثانوي التأهيلي وحتى طلبة التعليم العالي، والذي سلط عليه الضوء كلايزر (G. Glaeser) في [34]. حيث أوضح في أعماله أن تطور الأعداد السالبة مر بعدة حقبات أنتجت خلالها استدلالات غير متوقعة تظهر في انتاجات المتعلمين اليوم. فمثلا: "بما أن $1 \neq -1$ فإن $\frac{1}{-1} \neq \frac{-1}{1}$" أو كذلك "لدينا $-4 < 3$ إذن $9 < 16$". كما أن هيكلة الأعداد السالبة تطلبت حوالي خمسة عشر قرنا، حيث انتظرنا حتى القرن التاسع عشر لتأسيس الأعداد الموجبة والأعداد السالبة مع كوشي (A-L. Cauchy).

إن وضع العائق الإبستمولوجي خلال مرحلة استقرار المعرفة، والذي اعتبره كلايزر (G. Glaeser) تصورا للأشياء يعرقل بدوره إنتاج معارف جديدة، حيث أضاف أن المعرفة العلمية تتطور بتجاوز الأخطاء وذلك بتحديد العوائق وتجاوزها بهدم المعارف غيرالمبنية بشكل جيد، وأكد أنه لا نصحح الخطأ ولكن نعيد بناء النظام المعتمد للوصول إلى مصدر الخطإ. ويمكن القول إن تاريخ العلوم يوفر لنا بيانات لتحليل تمثلات التلاميذ وأخطائهم واستثمارها يؤدي إلى بناء معارف أخرى.

إن التمثلات اللحظية ومبدأ الرأس المملوءة -بغض النظر عن الفئة العمرية- يعتبران متدخلان أساسيان في بناء المعرفة، وقد تطرق باشلار إلى هذا الطرح في العديد من أعماله. فعندما نريد لأول مرة أن نطلب من تلميذ مقارنة $\sqrt{x}$ و x، فبالنسبة له هذا ليس موضوعا جديدا، فهو يعلم مثلا أن $5 \geqslant 25$ و $4 \geqslant 16$، ومنه يقوم بتعميم النتيجة $x \geqslant x^2$؛ وعليه فإن بعض التلاميذ (إذ لم نقل جلهم) يظنون بأن $0,2 \geqslant 0,2^2$، حيث أنه في مخيلتهم أن $0,2^2 = 0,4$، وفي هذه الحالة يجب وضعهم أمام وضعية متناقضة (متنازعة): $0,1^2 = 0,1$؟، ثم نتسائل متى يمكن لعدد أن ينطبق مع مربعه؟ وبالتالي تصبح المعرفة الأولى محل نقاش. فيمكن أن نقول إذن أن العمل العلمي يبتدأ من المعرفة التجريبية غيرالدقيقة إلى أخرى مماسسة. فمن منظور بروسو فإن تمثل التلميذ حول العدد العشري هو أنه زوج عددين صحيحين $(0,3) = 0,3$ وبالتالي يجري العملية التالية: $(0,3)^2 = (0^2,3^2) = (0,9)$ ذهنيا، حيث أن العدد الصحيح الطبيعي والعمليات عليه حاضرة بشكل أوفر في الأنشطة الذهنية للطفل نظرا لملامستها للواقع. في نفس الإتجاه ذهب بريتور (Y. Preteur) إلى أنه لبلورة مفهوم من لدن تلميذين مختلفين، ليس من الضروري ضبط أحدهما لهذا المفهوم، لكن يكفي أن يباشراه من وجهتي نظر متنازعتين.

"Pour que deux élèves puissent élaborer ensemble une notion, il n'est pas nécessaire qu'un d'entre eux la maîtrise. Il suffit qu'ils l'abordent avec des points de vue conflictuels".

كما أن من المعارف الأولية التي تؤثر في بناء معارف جديدة لدى التلميذ، نذكر "طول العدد"، فبالنسبة للتلميذ يمكن أن ينقل نموذج طول الأعداد بالنسبة للأعداد الصحيحة مباشرة إلى الأعداد العشرية كأن

يقول $12,8997 < 13,1$. ومن الأمثلة الأخرى التي توضح "خرافة العقل الفارغ" (le mythe de l'esprit vierge)، نذكر عملا للويس شالو (L. Chalouh) ونيكولاس هيرسكوفيكس (N. Herscovics)، حيث طلبوا من تلاميذ لم يتلقوا أي تكوين في الجبر ماذا يعني لهم "$3a$"، فكانت الأجوبة مختلفة: فقد أجاب بعضهم أن $3a$ هو ثلاثة أشياء و a يقصد به الشيء؛ في حين قال آخرون بأن $3a$ هو السؤال الأول من التمرين 3؛ وظن آخرون أن $3a$ هو 31؛ في حين أجاب أحدهم أن $3a$ هو 3. ثم طلب منهم أيضا ماذا يعني لهم "$3n$". فظن بعض التلاميذ أن $3n$ يخالف $3a$؛ في حين أن آخرون أجابوا بأن n يعوض شيئا ناقصا، وكتب أحدهم بشكل عمودي العملية $3n = 652 - 681$؛ وكان جواب تلميذ آخر 314. بعد ذلك طلب منهم تعويض a و n ب 2 فكانت الأجوبة كالتالي: $2 + 3$؛ 2×3؛ 3^2؛ و أجاب آخر 32 والذي أجاب في المرة السابقة ب 314 أجاب ب 316 (أضاف 2 إلى 14). وبعد مرور عدة سنوات أعيدت نفس التجربة مع تلامذة جذع مشترك من البكالوريا الدولية "خيار فرنسية"، فكانت الأجوبة لاتختلف كثيرا عن سابقاتها. حيث كانت من بين الإجابات على السؤال المتعلق ب "$3a$"، 3×1؛ السؤال الأول من التمرين الثالث؛... بينما نجد أن جل الإيجابات على السؤال المتعلق ب "$3n$"، كانت "مضاعفات العدد 3"، وقد فسرنا هذه النتيجة على أنها نتيجة أن الأستاذ كان قد انهى درس الحسابيات. أما بالنسبة للسؤال المتعلق بالتعويض فجل التلاميذ عوضوا n ب 2 وكتبوا 32، في حين رفضوا تعويض a بدعوى أنه ليس عددا صحيحا طبيعيا.

وتساءل هيرسكوفيكس (N. Herscovics)، عن أجوبة التلاميذ الذين تلقوا تكوينا في الجبر عن نفس السؤال السابق، وبعد التجربة

كانت أجوبتهم العفوية لا تختلف عن السابقة، وهذا يبين أن التمثلات الأولية رهن إشارة النشاط الذهني للفرد كلما توفرت الشروط الملائمة لذلك. فالعائق الأهم الذي يعترض الفرد ليس هو إكتساب إستراتجيات جديدة بقدر ما هو التخلي عن التصورات التي سبق تبنيها.

وبالعودة إلى فكرة "سلطة العدد الصحيح والعدد الموجب"، فتجلياتها عديدة في الإعدادي والتأهيلي والجامعي، فمثلا إذا طلب من التلاميذ تحديد مجموعة تعريف الدالـــة: [illegible] فعدد منهـم سيكتب [illegible]، وإذا طلب منهم بعد ذلك حساب صورة 2، فسيكتشفون بأنه لا يمكن وعليه سيغيرون مجموعة التعريف إلى [illegible] وكذلك طلب من طلبة جامعيين تأطير [illegible] علما أن [illegible] و [illegible] فكانت جل الأجوبة [illegible]. ثم طرحنا أسئلة أخرى من نفس هذا الصنف، فاكتشفنا أن الطلبة يقلدون تقنيات التأطير بالنسبة للأعداد الموجبة، وسنعرض أيضا تجربة أخرى أجريت مع تلاميذ جذع مشترك من البكالوريا الدولية "خيار فرنسية"، حيث طلب منهم إيجاد الأعداد [illegible] بحيث [illegible] فكانت الأجوبة:

(1, 36); (2, 18); (4, 9); (3, 12); (6, 6); (36, 1); (18, 2); (9, 4); (12, 3)

ولم يتطرق أي منهم للأعداد السالبة.

نستخلص من ذلك أن نماذج التلاميذ وأشكالهم وتمثلاتهم تختلف بشكل كبير عن تصورات الأستاذ ونماذجه، وأن استحضارها وإدراك التصورات التي سبق تبنيها تلعب دورا أساسيا في بناء تعلمات التلاميذ وتطوير المعرفة الرياضية. وبالإضافة إلى العوائق التي لها علاقة ببناء المفهوم، توجد عوائق أخرى تؤدي إلى صعوبات في تعلم التلميذ، خلال

وضعية تقويمية لتلاميذ البكالوريا علوم الحياة والأرض تبين أن مشكل الترجمة يمكن أن يوقظ تمثلات لدى التلاميذ من شأنها أن تعرقل السير العادي للعملية التعليمية - التعلمية، وبالخصوص عندما يتعلق الأمر بمهمات لها علاقة بمتغيرات ديداكتيكية قد تشوش على ذاكرة التلميذ (طول الأعداد، صياغة مركبة للوضعية، رموز متعددة في الصياغة...)، فمثلا "الجذر مربع" بالنسبة للتلميذ قد يفيد عددا جذريا أما الرمز $\sqrt{}$ فهو يخص الأعداد اللاجذرية.

3.2 التعاقد الديداكتيكي

إن تدبير الوضعية الديداكتيكية يستلزم تحديد قواعد العمل وتقسيم الأدوار وتحديد المهمات وكذلك الالتزامات المتبادلة بين الأستاذ والتلميذ من جهة وبين التلاميذ فيما بينهم وهو ما يصطلح عليه التعاقد الديداكتيكي حسب شوفالار (Y. Chevallard) وبروسو (G. Brousseau).

"Le contrat didactique est l'ensemble des règles qui fixent le fonctionnement, la définition des rôles et la répartition des tâches. Qui peut faire quoi ? Qui doit faire quoi ? Quels sont les enjeux ?"

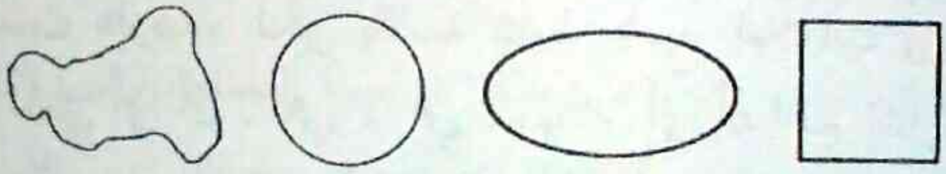
حيث يسعى الأستاذ، من خلال هذا التعاقد، إلى تبليغ تلاميذه بالأشياء والسلوكات التي يوليها أهمية أكبر، وما ينتظره منهم، وماهو مسموح به وماهو محرم عليهم القيام به.... ويتضمن التعاقد الديداكتيكي قواعد صريحة نذكر منها: كيفية تذكير الصيغ، كيفية استعمال الأدوات المنطقية وأهميتها في حل المسألة أو الإجابة على سؤال، طريقة الحساب، تنظيم الورقة، الدروس التي سيمتحن فيها التلميذ، الوقت المحدد للدرس،

احترام الوقت، إجابة الأستاذ على جميع أسئلة التلميذ... وأخرى ضمنية نذكر منها: ماذا تعني "برهن"، "تحقق"... (التأويلات الممكنة للأفعال التدخلية)، ماذا نستنتج؟، ماذا نلاحظ؟، ماذا نستعمل؟، بديهي أن؟، وكتابة الحروف a، x، n و m والتي لها دلالة عند التلميذ...

فمثلا عند دراسة الأعداد الصحيحة الطبيعية، طلب الأستاذ من تلامذته إيجاد العدد الموالي ل 1، فكانت الإجابة 2، ثم طلب منهم العدد الموالي ل 2، فكانت الإجابة 3، ونفس الشيء بالنسبة للعدد 5، فكانت الإجابة 6، ثم طلب منهم تحديد العدد الموالي ل a، فكانت الإجابة b !!!

إن التعاقد الديداكتيكي قد ينتج معارف غير ملائمة تتجلى في أخطاء يرتكبها المتعلم. فمثلا في جل الحالات فإن غياب رمز الإشارة هو إشارة موجبة (+)، فالعدد 6 مثلا يعني (6+)، وعليه فإن التلميذ قد يعتبر العدد x عددا موجبا. كما أن العدد ab يعني $a \cdot b$ أو $a \times b$، وعليه $15 = 1 \times 5 = 5$. وكذلك بما أن الضرب تبادلي فإن $-5x = -x \times 5 = x - 5$. ويمكن أيضا أن يكتب التلميذ $-10 = (-4)(-6)(-)$، لأنه خلال عملية الضرب قد يزيل التلميذ الأقواس عندما يكون ما بداخل الأقواس عددا واحدا... إذن ماذا نقصد ب "اختزل"، "احسب"، "انشر"، "عمل"، "عوض"،... وما هي مؤشرات نهاية المهمة لدى التلميذ؟ فمثلا إذا طلب منه تعميل التعبير $3a^2 + 5a$. فيمكن أن تكون الإجابة كالتالي: $3a^2 + 5a = 11a$، حيث أن التلميذ فكر بالطريقة التالية: $3a^2 + 5a = a(3 \times 2 + 5) = a(6 + 5) = 11a$. إذن، فهل التعليمة "عمل" أو "بسط" مرتبطة بطول الصيغة، عدد الأرقام والحروف الموجودة في الصيغة أم التخلص من العلامة "+".

من جهة أخرى فإن التمثيل المبياني هو إطار يمكنه التدخل في حل المسألة وتعليل بل توضيح أدوات جبرية مجردة، لكن بالنسبة للتلميذ هو جزء لايتجزأ من العقدة الديداكتيكية ليس له أية علاقة بسياق الوضعية أو بحلها، فمثلا إذا طلبنا من تلاميذ الثانية باكلوريا تحديد طبيعة الأشكال الهندسية التالية:



(1) (2) (3) (4)

فإن الجواب هو مربع بالنسبة للشكل (1) وإهليليج بالنسبة للشكل (2) ودائرة بالنسبة للشكل (3) ومجموعة من النقط بالنسبة للشكل (4). وقد يسبب نقاشات حول بنود العقدة الديداكتيكية، غير أنه للتوضيح فهذا الخلل أصله عدم التركيز على طبيعة المعلم في درس "دراسة تحليلية للدائرة"، فالدائرة تأخذ الشكل (3) عندما يكون المعلم متعامدا ممنظما بينما تأخذ الشكل (2) في حالة المعلم المتعامد الغير ممنظم، مما يجعل البنود المتفق عليها مسبقا محل نقاش.

نطرح تساؤلا آخر، ماذا يفهم التلميذ عندما نطلب منه "إنجاز مهمة ما". فالتلميذ يمكن اعتبارها مهمة جديدة، تعمل على إيقاظ تمثلات لتفعيل بنود من العقدة المبرمة مع الأستاذ غالبا ما تكون تخدم طرحه ويتخذها ذريعة لفشله في القيام بالمهمة. فمثلا عندما طلب أستاذ من تلامذته مقارنة المجموعتين:

$A = \{800 - 600,\ 750 - 50,\ 220 - 200\}$ و $B = \{700,\ 20,\ 200,\ 100\}$

وبالضبط طلب منهم هل A ضمن B، فكان الجواب أن A ليست ضمن

B. فالعلامتين "-" و "," لهما دلالات بالنسبة للتلميذ. وعندما طلب الأستاذ من التلاميذ ملاحظة أن 600 - 800 = 200... وجدوا أنفسهم في وضعية متنازعة فدخلوا في حوار مع الأستاذ على أساس أنه هو الذي لم يحترم ما تم الاتفاق عليه. إن وضعية الكائنات الرياضية تتضح بشكل جيد للمتخصص فمثلا في حالتنا هذه "," لها نفس معنى ";"، في حين أن "-" ليست عارضة. لكن بالنسبة للتلميذ فجميع العلامات والرموز لها نفس المعنى أي أن "," هي ";" هي نفسها "-" أي أنه اعتبر إشارة ناقص كعارضة. ومنه فإن تبليغ قواعد العمل للتلميذ تتم عبر رسائل مباشرة أو غير مباشرة من الأستاذ، وتنتج غالبا حوارا حول الأدوار والمهمات...

من جهة أخرى يمكن لبعض البنود أن تعرقل الإنتاج المعرفي وتصبح في خدمة الأستاذ فقط، لأن التلاميذ يقدمون عملهم على شكل تم الإتفاق عليه مع الأستاذ، ويمكنها أن تساعد الأستاذ عند تصحيح منتوجات التلاميذ، وبالتالي تضع عملية التقويم وتحقيق الأهداف التعليمية المسطرة والقدرات المراد تنميتها والكفايات التي نسعى لاكتسابها محل نقاش. فمثلا:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\frac{1}{0^+}=+\infty\ ;\ \lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{+\infty}=0$$

مما يؤدي ببعض التلاميذ إلى اعتبار ∞ و 0^+ أعدادا، وهذا يشكل عائقا من أجل اعتماد التلميذ النموذج السليم لتعريف النهاية واستحضاره مستقبلا.

من بين تجليات التعاقد الديداكتيكي استحضار السلطة عندما يتعلق الأمر بتعليمة لم يتم احترامها، وتصبح العلاقة الديداكتيكية مختزلة في علاقة تراتبية والقسم هو حقل خصب لممارستها. فصيغة "برهن أن" بالنسبة للتلميذ لا تعني إعطاء معارف جديدة، لكن هو مطالب بتوضيح

قدرته على تطبيق مبرهنات وخاصيات لها علاقة بالدرس الذي هو بصدد القيام به أو ضمن الدروس المتفق على إدماجها في امتحانه. ونتسائل في هذه الحالة، ما هو نوع العقدة التي أنتجت هذا الفعل؟ هذا السؤال يصعب الإجابة عنه إذا كانت المهمة تستدعي استحضار معطيات وأدوات أخرى تم التطرق لها سابقا وليست ضمن ماتم الإتفاق عليه.

نخلص إذن إلى أنه خلال السنة الدراسية فإن العقدة الديداكتيكية هي محل نقاش يمكنها أن تجدد وذلك بتغيير بنودها من أجل التعلم ويتم هذا كلما أدت هذه البنود إلى عوائق لتقدم المعرفة (تساؤلات غير منتظرة، مبرهنات التلاميذ، إنتاجات غير ملائمة...)، ومن أجل استمرار تقدم المعرفة، يصبح الأستاذ مضطرا، في بعض الحالات، إلى إظهار بعض القواعد الضمنية من العقدة ووضعها محل نقاش من أجل تجديدها وتعديلها، هذه الظاهرة ينتجها ما يصطلح عليه "خرق العقدة الديداكتيكية" (la rupture du contrat didactique).

1.3.2 بعض آثار التعاقد الديداكتيكي

• أثر طوباز : (Effet Topaze)
ويتمثل في الحالة التي يهيئ فيها المدرس أسئلة الدرس على مقاس الأجوبة التي يريد سماعها، وهكذا يضع المدرس الجواب الذي يريده، ويشرع في صياغة الأسئلة على ضوئها، لطرحها على المتعلمين. وقد يتجلى هذا الأثر في حالات أخرى، ومنها الحالة التي يقف فيها المتعلم أمام صعوبة لمواصلة حل وضعية، ويقتضي الأمر أن يواجه تلك الصعوبة في حينها، ولكنه،

عوض ذلك قد يتلقى مساعدة حاسمة من طرف المدرس، الشيء الذي يفوت عليه فرصة لبناء تعلماته وبلوغ مستوى أعلى من التعلم.

♦ **أثر جوردان : (Effet Jourdain)**

وهو عبارة عن سوء تفاهم عميق، يحدث أحيانا عندما يتفادى المدرس عن قصد كل نقاش مع المتعلمين حول معلومة أو مفهوم معين، ويكتفي بتقبل أدنى مؤشر سلوكي صادر عنهم، معتبرا إياه دليلا على الاستجابة لما طلب منهم إنجازه، حتى وإن كان ذلك المؤشر عاديا وغير مقنع. وقد يتجلى هذا الأثر أيضا عندما يعتبر المدرس أن إشارة بسيطة يبديها المتعلم، دليل على فهمه واستيعابه لما قدم له. كأن يجيب التلميذ مثلا ب " C_n^p عدد التطبيقات"، فيقاطعه الأستاذ "نعم جيد". أو أن يوجه الأستاذ التلاميذ ب"يكفي تطبيق ..."، لتفادي النقاش ليمر لشيء آخر.

♦ **الإنزلاق الميتامعرفي : (Glissement métacognitif)**

قد لا يتوفق المدرس أحيانا، في إبلاغ ما يريد إبلاغه للمتعلمين، فيعجز بالتالي، عن دفعهم نحو تحقيق الهدف المتوخى، فيلجأ (كتعويض عن فشله) إلى تبريرات متعددة، ويتحول إلى موضوعات أخرى، مستبدلا بذلك الموضوع الذي يشكل المحور الفعلي للدرس، أو قد يركز شرحه على طريقة أو تقنية معينة ويتوقف عندها كبديل عن الموضوع المرغوب فيه. فمثلا لحساب نهاية خارج دالتين بحيث نهاية البسط هي نفسها نهاية المقام وتساوي 0، يلجأ الأستاذ إلى استعمال قاعدة Hospital، رغم أنها خارج المقرر.

- **الاستعمال المفرط للمماثلة : (Usage abusif de l'analogie)**

لا شك أن المماثلة تعتبر من "التقنيات" الجديدة في الشرح والتفسير كما تلعب دورا فعالا في حل المسائل، إلا أن الإفراط في استعمالها قد يؤدي إلى نتيجة عكسية أو غير متوقعة. وقد لاحظ الباحثون أن هذا الاستعمال المفرط للمماثلة على مستوى التعاقد الديداكتيكي، أمر غير مفيد، بل بالعكس، يمكن أن يفضي إلى السقوط في ما يعرف بأثر طوباز مما يؤدي إلى تباطؤ في الفهم وتأخر في اكتساب المعرفة.

- **شيخوخة الوضعيات التعليمية :**
(Vieillessement des situations d'enseignement)

إن مرور الزمن والتغيرات المستمرة للبرامج والمناهج، قد يؤدي إلى نوع من التقادم في الوضعيات الديداكتيكية، فيصبح المدرس غير قادر على إعادة إنتاج نفس الوضعيات لتؤدي الغرض المنتظر منها. وهذا الإحساس بالتقادم أو التقادم الفعلي، في أغلب الأحيان، يطرح إشكالية ديداكتيكية أساسية خاصة إذا انتبهنا إلى أن بعض التغييرات التي تطرأ على المناهج قد لا تمليها ضرورات تربوية بقدر ما تترجم نوعا من اتباع الموضة. بل أكثر من ذلك، يجد الأستاذ دائما صعوبات في إعادة نفس الدرس رغم أن التلاميذ مختلفين لأن إعادة ما قاله سابقا ليس له نفس الأثر دائما، فغالبا ما تكون النتائج أقل تأثيرا والمدرس يكون أكثر ترددا لإعادته، لذلك فهو يحتاج إلى مجهود أكبر لتغيير الصياغة، التعليمات والأمثلة، على الأقل.

4.2 النقل الديداكتيكي في الرياضيات

إن التصور النقدي للمعارف الرياضية المستنبط من تاريخ الرياضيات يسمح بفهم الوضعية الحالية لهذه المعارف، وكذلك لماذا ندرس هذا الفصل أو ذاك في هذا المستوى أو ذاك؟ وبدونه تصبح الرياضيات المدرسة يوما بعد يوم كائنات خالصة، وبالتالي مع مرور الزمن ستفسد، إنها فقط كائنات تدريسية. فمثلا لا ندرس المتطابقات الهامة من أجل تعلم المتطابقات الهامة، ونفس الشيء بالنسبة للمسافة ومفاهيم أخرى، نحن إذن نتكلم عن الظاهرة التي يطلق عليها الديداكتيكيون النقل الديداكتيكي. حيث عرف شوفلار (Y. Chevallard) النقل الديداكتيكي على أنه الانتقال من محتوى معرفي محدد إلى صيغة ديداكتيكية لهذا الموضوع المعرفي.

"Le passage d'un contenu de savoir précis à une version didactique de cet objet de savoir."

وبتعبير آخر: هو الانتقال من موضوع للتعلم إلى موضوع للتعليم، هذا الانتقال "من موضوع للتعلم إلى موضوع للتعليم" يتم بخلق كائنات جديدة (مواضيع) تسمح بتجاوز عوائق لدى التلاميذ الذين يحاولون اكتساب معارف مرتقبة لأول وهلة. ومن بين الأمثلة لهذه العوائق نذكر التمارين التي تهدف إلى تحديد الفرق بين الانتماء والاحتواء ($\subset$ و $\in$) وكذلك التمارين التي لها علاقة بمجموعة الأجزاء $\mathcal{P}(E)$. فمثلا كيف نوضح للتلميذ بأن $\varnothing \subset E$ أو $\varnothing \in \mathcal{P}(E)$ وكيف نوجهه؟ وكذلك كيف نوضح للتلميذ نهاية دالة بجوار ما لانهاية (∞)، وكيف نوجهه؟
وقد عرف بوفيي (A. Bouvier [1943-..]) الكائن التدريسي على أنه

نتيجة عزل المفهوم عن سياقه التاريخي، وأضاف على أنه مفصول عن الإشكالية التي أنتجته، والتي بدورها تجعله يعيش في خضم المعرفة العالمة. إن هذا التحليل يستوجب معرفة متى ظهر المفهوم؟ ولماذا؟ وماهي أنواع المسائل التي يتدخل في حلها؟ هذه السيرورة، التي تتجلى في عزل السياق التاريخي (Désihistorisation) للمعرفة وعدم تشخيصها (Dépersonnalisation) هي خاصية النقل الديداكتيكي.

إن عملية النقل الديداكتيكي تتطلب الوقوف عند أربعة أزمنة هي:

الزمن الأول: مسائل غير روتينية وصعبة، ووضعيات صادمة (Surprenantes) ومعطيات متناقضة وغير ملائمة للإطار النظري.

الزمن الثاني: ظهور أفكار جديدة (قطعية)، ومفاهيم جديدة تظهر بالتدريج "كائنات معرفية" وتسمح للمهتمين ملاءمتها بسرعة.

الزمن الثالث: تنظيم المعارف الجديدة في نسق وجعلها كائنات للتدريس.

الزمن الرابع: خلق "كائنات تدرس" تتيح بناء المعارف الجديدة.

ونلخص هذه الأزمنة في الخطاطة التالية:

مسائل ← كائنات معرفية ← كائنات للتدريس ← كائنات مدرسة.

لتسليط الضوء أكثر على هذه الظاهرة، نستحضر العمل الذي قمنا به مع الأساتذة المتدربين على مثالين. فالمثال الأول يرتكز حول تعريف "علاقة تكافؤ على مجموعة E" وأنه يمكن تعريفها إنطلاقا من أصناف تكافؤها وهذه الأصناف تتطبق مع المجموعات التي تكون تجزيئا للمجموعة E. فمثلا:

$$A = \{10, 20, 12\}$$
$$B = \{552, 333, 422, 633\}$$
$$C = \{4342, 1321\}$$

المجموعات A، B و C أصناف تكافؤ لعلاقتي تكافؤ مختلفتين "نفس عدد الأرقام" و"نفس باقي القسمة على 3". و في المثال الثاني، نعتبر الدالة f المعرفة من المجموعة $A = \{a, b, c, d\}$ نحو المجموعة $B = \{1, 2, 3, 4\}$ بما يلي:

$$f(a) = 4,\ \ f(b) = 3,\ \ f(c) = 1,\ \ f(d) = 2.$$

وطرحنا السؤال التالي: هل الدالة f تقابل؟

وكأن المطلوب في المثالين معا هو كتابة الجواب الذي ينتظره الأستاذ من تلاميذه، وقد تبين أنه ليس هناك توافق بين الأساتذة المتدربين حيث استعملت مصطلحات وتأويلات مختلفة.

وبالتالي يمكن القول إن النقل الديداكتيكي لا يقتصر فقط على تجاهل الإشكالات البدئية التي يمكن حلها باستثمار الكائنات الجديدة، بل يعمل في بعض الأحيان على نقل حقل (مجال) استعمالها.

وقد تطرق أيضا شوفالار (Y. Chevallard) وجوسوا (M. A. Johsua)، في [22]، إلى نفس الظاهرة حول "مفهوم المسافة"، فقد وضحا أن هذا المفهوم ظهر في بداية القرن العشرين من خلال أعمال حول "الفضاءات الدالية" (Espaces fonctionnels) في التحليل، بينما في أواسط نفس القرن أصبحت أداة مهمة في الهندسة، وحاليا فإن مفهوم المسافة يدرس في الهندسة. وأيضا كتابة معادلات في $\mathbb{R}^n$ تفرض تقديم رموز المتجهة والموتر (Tenseur)، اللذين يؤديان إلى إنتاج مفاهيم في الجبر الخطي، وجعل تدريس الفضاءات المتجهية يغيب المتجهات الهندسية الشيء الذي يحرم الفيزيائي والميكانيكي من أدوات ملائمة وفعالة.

إن جل الاختيارات في المقررات (المقرر الرسمي المغربي) أدت إلى انزلاق عدة معارف من مستويات إلى أخرى ومن شعب إلى أخرى، واعتماد مقاربات عدة هندسية أو تحليلية (القيمة المطلقة، الحساب

المثلثي، اعتماد المتتاليات أوعدم اعتمادها في التكامل).

وبالرجوع إلى المثال الثاني، حول التقابل، نجد أنه إذا تمت عملية التصحيح وأخذنا بعين الاعتبار تصورات الأساتذة المتدربين، فيمكن أن تعطى نقطة "الصفر" للعديد من التلاميذ. وكما سبق ذكره فقد اعتمدت عدة مصطلحات ورموز في الإجابة من بينها "صورة، سابق، تقابل، تطبيق، الانطلاق، الوصول، السهم...". نتساءل إذن متى وكيف ظهرت هذه الرياضيات وهذه المصطلحات والرموز المتعددة. وبالعودة إلى تاريخ الرياضيات نجد أنه في بداية القرن التاسع عشر أثيرت "إشكاليات التحليل" وأدت إلى إنتاج "المجموعات، الرئيسي، الترتيب" ثم "الطبولوجيا نهاية القرن التاسع عشر" ثم إلى إنتاج "العلاقات، التطبيقات والدوال المتصلة" وحتى حوالي (1960-1970) تأسست "المجموعات، المخططات، الجداول، الأشكال..." كمفاهيم رياضية حيث تجسدت كل الأزمنة التي سبق ذكرها. فمثلا مخططات أولير (Euler) والخطاطات الأقليدية والأشكال التي استغلت كمساعدات أوريستيكية (Heuristiques) للعلماء، أصبحت معارف يجب اكتسابها وخصصت لها مقاطع تعليمية خاصة، وهذه التعددية في المصطلحات تفرض تعلم الانتقال من مفهوم إلى آخر حيث يخصص لهذا الغرض وقت لايستهان به.

إن الفرضية التي تقول "تقديم جميع المفاهيم الجزئية تسهل مستقبلا تعلم المفهوم المرتقب (التقابل، الدوال المتصلة، الترتيب، علاقة التكافؤ) أصبحت لاغية والممارسات الصفية للأساتذة بينت أنه من الواجب إعادة صياغتها أو تركها (إبعادها).

مثلا: نتساءل لماذا وفرة الأمثلة خلال الوضعيات التي تعتمد فيها

مجموعات منتهية، تساعد على الإنتقال من "النهائي إلى اللانهائي" أو من "القابل للعد إلى غيرالقابل للعد"؟.

من مكونات النقل الديداكتيكي "الرياضيات المدرسية" التي أصبحت في القرن التاسع عشر مكونة من الرياضيات الأساسية الضرورية للحياة اليومية للأشخاص ولمستقبلهم العلمي، إلا أن هذه الرياضيات أصبحت مجالا خاصا ولم تنسج علاقة مع الرياضيات الحديثة التي هي في طور التكوين أو حتى مع العلوم الأخرى وهذا الطرح أصبح صعب التصور للغاية. فهل بإمكاننا في كل مرحلة وكل زمن، أن ندخل محتويات جديدة في كتب التدريس ويتم التخلي عن أخرى؟

إن دراسة التطور التاريخي للمحتويات التدريسية، ودراسة تأثير مختلف المحتويات التعليمية على تطور الرياضيات عبر التكوينات المقدمة للرياضيين الجدد والتركيز على تيارات محددة تكتسي أهمية بالغة وتساعد على إيجاد الصيغة الملائمة لتدريس الرياضيات. ويمكن إذن أن نتكلم عن التحويل الديداكتيكي عوض "النقل الديداكتيكي" نظرا لطبيعة الاختيارات الديداكتيكية التي يسببها النظام التعليمي، وبالتالي فمن الضروري في أية عملية التركيز على الأستاذ وتكوينه بصفته الوسيط الأساسي لهذا التحويل (أو النقل).

5.2 المتغير الديداكتيكي

هو عنصر من المسألة، يكون قابلا للتغيير من طرف الأستاذ، وكل تغيير فيه يؤدي إلى إحداث تغيير على طرق واستراتيجيات الحل من حيث الكلفة والصلاحية ودرجة الصعوبة. المتغير الديداكتيكي إذن هو عائق يحدث لدى المتعلم اختلالات تكون ضرورية للتعلم، ولذلك يصبح ضروريا وصف هذا العائق وتحديد الدور الذي يؤديه، وحدود نجاعته في حل المسألة.

ومن الأمثلة على ذلك نذكر:

• متغير مرتبط بالمحتوى:

• حجم الأعداد وطبيعتها: (حجم الأعداد من حيث عدد الأرقام والرموز الحاضرة في العدد؛ طبيعة الأعداد: طبيعية، عشرية، جذرية، لاجذرية...)؛

• الشكل الهندسي: (الصورة: نوعية الصورة؛ طبيعة الشكل: مربع، دائرة، فلكة، مجموعة أشكال...؛ موقع الشكل: درجة الميلان...).

• متغيرات مرتبطة بتدبير الوضعية:

• صياغة المسألة؛

• شكل العمل: فردي، زمر أو جماعي...

6.2 الحقل المفاهيمي

من منظور فيرنيو (G. Vergnaud [1933-..]) فإن الدراسة المثمرة للديداكتيك واكتساب مفهوم معين، تستدعي تقسيم المعرفة إلى مجالات أكبر، حيث كتب: "إنه من غير المعقول دراسة إكتساب الضرب، القسمة، الكسور، التناسب، الأعداد الجذرية، الدوال الخطية و"الخطية بالنسبة لكل متغير"، الفضاءات المتجهية والتحليل البعدي، بشكل منفصل لأن العلاقات التي يواجهها التلاميذ في مسائل الضرب والقسمة تتدخل في كل هذه المفاهيم".

"Il serait pas raisonnable d'étudier séparément l'acquisition de la multiplication, de la division, des fractions, rapports, nombres rationnels, des fonctions linéaires et multilinéaires, des espaces vectoriels et de l'analyse dimensionnelle, car les relations rencontrées par les élèves dans des problèmes de multiplication et de division participent de tous ces concepts."

هذا التداخل بين المفاهيم و طول مدة تطور البنيات الوراثية (psychogénétique) لدى التلميذ دفعت بفيرنيو (G. Vergnaud) إلى إدخال مفهوم الحقل المفاهيمي، والذي عرفه بما يلي: "الحقل المفاهيمي هو فضاء مسائل أو وضعيات مسائل، تؤدي إلى إنتاج مفاهيم وإجراءات متنوعة مترابطة فيما بينها". ولتعليل هذا الاختيار، قام فيرنيو بدراسة مثالين أساسيين متمثلين في البنيات الجمعية (Strucures additives) والبنيات الجدائية (Structures multiplicatives).

الفصل 3

حل المسائل الرياضيــة

1.3 المسائل

تعرف المسألة على أنها: كل ما من شأنه أن يقود إلى بناء إجابة أو فعل ينتج أثرا معينا؛ كل وضعية تتطلب الكشف عن علاقات وتطوير أنشطة الاستكشاف ووضع فرضيات والتحقق منها من أجل إيجاد الحل؛ أو مجموعة معلومات تصبح موضوع تساؤل أو تعليمات تتطلب تعبئة مفاهيم وأدوات لحلها. وبالنسبة للرياضيات نفصل بين أنواع عدة من المسائل:

1. المسائل التي حلها يستدعي تعبئة عدة موارد ومعلومات تهدف إلى بلورة مفهوم واكتساب معرفة؛
2. المسائل والتمارين التطبيقية التي تلي مباشرة نهاية مقطع تعلمي من أجل تثبيت أو استعمال مفهوم أوخاصية...؛
3. المسائل والأسئلة ذات الاختيارات المتعددة (روائز) التي تهدف إلى تقويم التعلمات؛

4. المسائل التي تهدف إلى ترييض وضعية استصوابية؛

5. الوضعيات الإدماجية.

أما العناصر المحددة للمسألة فهي: الصعوبة وتعني أنه خلال مباشرة المسألة من طرف التلميذ، يدرك بوضوح أن هذه الأخيرة تتضمن صعوبة، ثم معارف ومهارات التلميذ غير كافية ولاتسمح بتجاوز هذه الصعوبة، ثم ضرورة البحث الجاد عن الأدوات من أجل القيام بالحل. ونشير إلى أن هناك عدة معلومات تساعد على تدليل الصعوبات، وطبيعة المسألة مرتبطة بالعناصر المحددة لها، فغياب العنصرين الثاني والثالث يجعل من المسألة تمرينا أوما يطلق عليه "مسألة روتينية". أما الصفة "روتينية" فهي مرتبطة بمعرفة المتعلم وخبراته وبظروف المسألة (الوقت والسياق الذي طرحت فيه)، ومن مميزاتها: أنه من أول وهلة يكون التلميذ على دراية بفحوى المسألة وطريقة الحل؛ تطبيق أوتوماتيكي لموارد ومهارات مكتسبة سابقا؛ لاتتطلب وقتا كبيرا لحلها؛ التلميذ لايأخذ بعين الاعتبار الجوانب الوجدانية من أجل الحل (التحفيز، تحمل المسؤولية)؛ وتكون غالبا مغلقة (طريقة الحل هي نفسها بالنسبة لجميع المتعلمين). بينما المسألة "غير الروتينية" أو ما يصطلح عليها بالمسألة الحقيقية فلها مميزات منها: أن التلميذ لا يعرف كيف يباشر الحل (لايعرف كيف يتدخل) في الوهلة الأولى، وفي بعض الحالات لايستطيع تأويل المسألة وصياغتها بشكل صحيح؛ أنه باعتماد الحدس والإلهام والقيام بمجهودات (المثابرة)، يمكن للتلميذ أن يحل المسألة مرتكزا على معلوماته وتجربته؛ أن وقت الحل أطول؛ أنها تخلق لدى التلميذ في أول وهلة نوعا من الخوف والعجز والإحباط، وكل ذلك يمكن تجاوزه بتوظيف العزيمة والمثابرة (العامل الوجداني)؛ ويمكنها أن تكون مفتوحة أو مغلقة.

ومن بين المسائل "غير الروتينية" نجد مسائلا تسمى: **المسألة المولدة** (Problème générateur)، وهي كل مسألة حلها ينتج مسائل أخرى، وهي مسألة صعبة وغنية تسمح بالبحث عن أسئلة أخرى وبناء مفاهيم أخرى وقد اصطلح ديفلاي (M. Develay)، على تسمية هذه السيرورة "الجذع المفاهيمي". ومن بين المسائل المولدة الشائعة نجد:

- معادلة فيرما (Équation de Fermat):

$$x^n + y^n = z^n; \quad (x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$$

والتي لا تقبل حلولا بديهية وأنتجت عدة مسائل نذكر منها: الأعداد الجبرية، المثاليات، الإستسلام، المنحنيات الإهليليجية،...

- إشكالية تربيعية الدائرة "La quadrature du cercle" والتي أنتجت بدورها مسائل أخرى نذكر منها: هل العدد π عدد لاجذري، جبري أم غير جبري؟ هل العدد π يمكن رسمه بالبركار ومسطرة (غير مدرجة)؟ ماهي القيم المقربة للعدد π؟ حساب المساحات، طبيعة الأعداد، حساب التكامل، المعادلات، الكسور المتتالية، المتتاليات، والأعداد اللاجذرية.

1.1.3 تصنيف المسائل الرياضية

لقد قام عدة باحثين، من معهد البحث في تدريس الرياضيات بستراسبورغ بفرنسا، بتصنيف المسائل في [60]، وذلك بإعتماد أفكار كلايزر (G. Glaeser)، مرتكزين حول الأهداف المتوخات من المسألة، وقد تم تقديمها في ستة أصناف: مسألة للعرض، مسألة ديداكتيكية،

مسألة حلها يتطلب عدة أدوات، مسألة تطبيقية، مسألة يتطلب حلها تنفيذ تقنية معينة، مسألة ذات اختيارات متعددة (روائز) ومواضيع الإمتحانات والمباريات.

- مسألة للعرض: الهدف منها تقديم مفهوم أو تقنية جديدة في بداية الدرس أوخلاله، وتساعد التلميذ على المشاركة في بناء الدرس ويمكنها التطرق لجوانب تكميلية في الدرس؛
- مسألة ديداكتيكية: الهدف منها تثبيت المفاهيم والتقنيات، واكتساب طرق العمل وتخدم مباشرة الدرس؛
- مسألة حلها يتطلب عدة أدوات: تهدف إلى تطوير وتنمية المهارات الذهنية والحركية والحدس والإستدلال الإستقرائي وغالبا ما تكون مرتبطة بالهندسة؛
- مسألة تطبيقية: تسعى إلى تعويد المتعلم على استثمار معارفه الرياضية في وضعيات حقيقية، التي تجد مكانا لها في الحياة اليومية للفرد وتسمح للتلميذ بالاهتمام والتفكير إيجابيا تجاه الرياضيات وتصبح أداة مجدية للحل؛
- مسألة يتطلب حلها تنفيذ تقنية معينة: تهدف إلى تطوير القدرات الذهنية للمتعلم وفي بعض الحالات يمكنها أن تكون دعامة للتعلمات اللاحقة، وتتطلب من التلميذ تفكيرا عميقا وبحثا فعليا مستحضرا العمليات الذهنية من تحليل، تطبيق، إستنتاج، إستقراء، حس، تعميم وتحقق؛
- مسألة ذات إختيارات متعددة (روائز) ومواضيع الإمتحانات والمباريات: تهدف إلى إعطاء الإمكانية للمتعلم من أجل إختبار

فعالية تعلماته الرياضية والتحقق من قدراته وكفاياته من أجل النجاح.

بينما نجد أن بوليا ([1887-1985] G. Polya) قد فصل بين صنفين من المسائل: المسائل من أجل البرهنة ومسائل للبحث. حيث عرف المسائل من أجل البرهنة كأنها مسائل على شكل إقتراض يستلزم إستنتاج عبارة بحاجة إلى إثبات صحتها، ولحلها فصل بين نوعين من البرهان: البرهان بأن الإستنتاج نتيجة منطقية للإقتراض أم لا؛ والمصادقة أو الرفض لقيمة حقيقة العبارة. أما بالنسبة لمسائل البحث فيمكنها أن تكون روتينية أو غير روتينية، والعناصر المحددة لها هي: المعطيات، المجاهيل والشروط ويقصد بها العلاقات بين المعطيات والمجاهيل والتي يمكن تقسيمها إلى ثلاثة أنواع: صريحة، ضمنية ومضمرة وتعني العلاقة التي يضيفها التلميذ ولا تندرج ضمن نص المسألة.

2.3 استراتيجيات حل المسائل

يقصد باستراتيجية حل المسألة، المقاربة أو الفكرة التي يتناول بها المتعلم المسألة بقصد حلها، أي أنها تعني نوعية الاشتغال الذهني الذي يعالج به المتعلم المسألة من خلال خطة أو خطوات تمكنه من الحل، وتحديد العلاقة بين عناصر المسألة. ويتضمن حل المسائل عنصرين أساسيين:

- إكتشاف استراتيجيات،
- إكتشاف الحل أي بلوغ الهدف.

إن عملية "حل المسائل" هي عملية مركبة يمكن للشخص من خلالها الحصول على منتوج إنطلاقا من معطيات وذلك بتنسيقها وإحكامها داخل خطة عمل لإيجاد العلاقة بين عناصر المسألة؛ وكذلك هي نشاط ذهني ذو جانبين: فالأول فني ويتجلى في الطريقة والاستراتيجية المتبعة، والثاني علمي ويرتكز على المنطق والإستدلال ومن خصائص هذه العملية نذكر:

- الفن والمهارة،
- استعمال أنواع التفكير اللفظية وغير اللفظية، المنطق والحدس،
- استعمال مختلف أنواع الإستدلالات التي ترتكز على البرهان والإستدلالات الإستصوابية،
- تهدف إلى تحقيق الأهداف الإجرائية، المعرفية والمنهجية،
- تتأثر بالحافزية والتجربة في حل المسائل.

1.2.3 حل المسائل الرياضية

أ) الخوارزمية (Algorithme)

وهي عمليات متتالية في نسق منطقي بهدف الوصول إلى نتيجة محددة، ومن مميزاتها أنها تتعلق بحل المسألة، وأنها مغلقة، وتؤدي حتما إلى الحل، ومحددة (عدد العمليات والمراحل محددة مسبقا).

من بين الأمثلة، نذكر خوارزمية إقليدس (Algorithme d'Euclide)، والتي تهدف إلى تحديد القاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين معلومين،

هذه الأخيرة ترتكز على القيام بعمليات متوالية تعتمد فيها القسمة الإقليدية وتقدم كالتالي:

نعتبر عددين صحيحين طبيعيين a و b، بحيث $a > b$.

نقسم a على b ونكتب $a = q_0 b + r_1;\ 0 \leqslant r_1 < b$،

ثم نقسم b على r_1 ونكتب $b = q_1 r_1 + r_2;\ 0 \leqslant r_2 < r_1$،

ثم نقسم r_1 على r_2 ونكتب $r_1 = q_2 r_2 + r_3,\ 0 \leqslant r_3 < r_2$،

$$\vdots$$

ثم نقسم r_{k-2} على r_{k-1} ونكتب $r_{k-2} = q_{k-1} r_{k-1} + r_k,\ 0 \leqslant r_k < r_{k-1}$.

$$\vdots$$

هذا الإجراء ينتهي عندما يصبح باقي القسمة الإقليدية منعدما، وآخر باقي غير منعدم هو القاسم المشترك الأكبر للعدين a و b.

```
Algorithme : %pgcd(a, b)
entier pgcd(entier a ; entier b) ;
début :
entier r := 0 ;
r := a (mod b) ; % reste de la division euclidienne de a par b
Si (r = 0) retourner b ;
sinon
retourner (pgcd(b; r)) ;
écrire pgcd(a, b) ;
```

تساعد الخوارزمية على التظنن، وتلعب دورا هاما في التعلم بحل المسائل، فمثلا لتقديم مفهوم القاسم المشترك الأكبر، نطرح على التلاميذ السؤال التالي:

"ما هو العدد الأكبر الذي يقسم العددين 6 و 15 في نفس الوقت؟".

أكيد أن التلاميذ سيجيبون بشكل صحيح، لأنهم يعرفون قواسم العددين

6 و 15 وتتم كتابة الترميز $3 = (6;15)$، ونفس الشيء بالنسبة للأعداد التي يتمكن التلميذ من تفكيكها إلى جداء عوامل أولية. سيقول التلاميذ، أنه عندما تكون الأعداد صغيرة فإيجاد القاسم المشترك الأكبر ممكن، لكن عندما يتعلق الأمر بأعداد كبيرة فلا يمكن. وبالتالي الحاجة إلى إجراء منهجي من أجل إيجاد القاسم المشترك الأكبر. ومنه يتم تنزيل مراحل الخوارزمية خطوة بخطوة.

ومن أجل التأكد من صحة الخوارزمية نقوم بتطبيق مراحلها على أمثلة ملموسة، وهذا ما يطلق عليه التنفيذ خطوة بخطوة. هذا الإجراء يحمل في طياته مفهوما آخر له دور فعال في حل المسائل يصطلح عليه بالأورستيكية.

ب) الأورستيكية (Heuristique)

عقلية ومنهجية وهي مبدأ أو قاعدة إستصوابية أو تجريبية قابلة للتطبيق في حل عدة مسائل رياضية وذلك باختزال المراحل في البحث، ومن مميزاتها أنها تتعلق بحل المسائل، فهي إجرائية، مفتوحة، عامة (تتعلق بعدد كبير من المسائل)، غير محددة، إستصوابية أو تجريبية.

فمثلا لتقديم البرهان على صيغة هيرون (Héron) المعروفة ب:

ليكن (ABC) مثلث و a، b و c أطوال أضلاعه و A مساحته.
إذن:

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \text{حيث} \quad s = \frac{a+b+c}{2}$$

يمكن للأستاذ أن يقول، عند تقديم البرهان، لتلاميذه:
"اليونان يعرفون خاصية مهمة تخص مساحة المثلث تسمى صيغة هيرون:

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \text{حيث} \quad s = \frac{a+b+c}{2}.$$

والبرهان على هذه الصيغة ليس بالسهل، ولا أرغب في القيام به الآن. بل أكثر من ذلك لسنا متأكدين بأن هذه الصيغة صحيحة ، وذاكرتي تضطرب عند كتابتها. نتسائل إذن، هل يمكننا التحقق منها؟ وكيف؟
سأتحقق بالنسبة لمثلث متساوي الأضلاع، في هذه الحالة لدينا:

$$A = \frac{\sqrt{3}a^2}{4} \text{ و } s = \frac{3a}{2} \text{ و } a = b = c$$

ومنه فإن الصيغة صحيحة.
هل يمكننا التحقق بالنسبة لحالات أخرى؟
يمكن المحاولة بالنسبة لمثلث قائم وكذلك بالنسبة لمثلث متساوي الساقين.
في الحالة الأولى لدينا $a^2 = b^2 + c^2$، بينما في الحالة الثانية لدينا $b = c$.
و في كلتا الحالتين وبعد عمليات جبرية غير معقدة يتضح أن الخاصية صحيحة."

الشيء الذي يدفع التلاميذ للتساؤل عن حالات أخرى تحقق الخاصية، وكم من مرة يجب التحقق لكي نثبت صحتها، وبالتالي يتم إنخراط التلاميذ في الحل مما يساعد على حل المسألة. هذا الإجراء يوضح الأورستيكية وكذلك دورها في التعلم بحل المسائل.

ج) نموذج بوليا لحل المسائل

تعتبر الخطوات أو الإستراتيجية التي قدمها جورج بوليا لحل المسائل من أهم المقاربات المعتمدة والمستعملة، حيث يمكن تقديمها في أربع خطوات رئيسة:

1. **فهم المسألة** : فهم المسألة يعد الخطوة الأولى في عملية حلها، إذ إنه

من الخطإ الإجابة على سؤال لا نفهمه، ففهم المشكلة ووضوحها شرط ضروري قبل التفكير في حلها، ولفهم المسألة يمكن القيام بما يلي:

- قراءة المسألة،
- إعادة صياغة المسألة،
- فهم وإدراك المدلولات الرياضية للألفاظ والرموز الواردة في المسألة،
- تحديد المعطيات والمطلوب والشروط،
- استعمال رموز مناسبة للتعبير عن عناصر المسألة،
- رسم شكل للمسألة التي تتطلب رسماً، وتوضيح المعطيات والمطلوب،
- تحديد مدى كفاية المعلومات المعطاة لحل المسألة،
- تحديد المعلومات الزائدة أو غير الضرورية.

2. **وضع خطة لحل المسألة**: تعد هذه المرحلة أهم وأصعب مراحل حل المسألة، فالهدف الرئيس هو الوصول إلى فكرة أو خطة الحل. ويمكن الاستعانة بالموجهات التالية في هذه المرحلة:

- هل رأيت مسألة مماثلة لهذه المسألة من قبل؟
- هل تعرف مسألة ذات صلة أو علاقة بالمسألة الحالية؟
- هل يمكن تبسيط هذه المسألة ؟
- أنظر إلى المجهول وحاول أن تتذكر مسألة مألوفة لك، ولها نفس المجهول أو مجهول مشابه له؛
- هل يمكن تعديل المجهول ليصبح في صورة أخرى قريبة من المعطيات؟

- هل يمكن تعديل المعطيات لتصبح في صورة قريبة من المجهول؟
- هل تعرف مبرهنة أو خاصية أو قانوناً يمكن استخدامه لحل المسألة ؟
- هل استخدمت كل المعطيات، كل الشروط؟
- إذا لم تستطع حل هذه المشكلة فحاول أن تحل مشكلة ذات علاقة بها.

وفي هذه المرحلة الثانية من مراحل جورج بوليا لحل المسألة (مرحلة إبتكار أو وضع خطة للحل) قدّم المتخصصون عدداً من الإستراتيجيات أو الأساليب التي يمكن استخدامها لحل المسألة. ويتوقف تحديد الإستراتيجية المناسبة لحل المسألة على نوعية أو طبيعة المسألة وخبرة الطالب الذي سيقوم بحلها. وبالرغم من التداخل بين بعض تلك الإستراتيجيات، إلا أنه يمكن تمييز الإستراتيجيات التالية :

- التخمين والتحقق : يُطلق عليها المحاولة والخطأ "المنـظّمة"، ويتم من خلالها تخمين الإجابة الصحيحة، ولكن التخمين لا يكون بطريقة عشوائية، بل إنه تخمين ذكي يعتمد على المنطق،حيث يُستفاد من كل محاولة من المحاولات التي سبقتها، فالمحاولة الموالية يجب أن تكون أقرب إلى الحل من المحاولة السابقة. فمجرد المحاولات العشوائية غير المرتبطة ببعضها تؤدي إلى إطالة الزمن المستغرق في الحل، وقد لا تؤدي إلى الحل نهائياً، وتعدُّ مهارة التقدير من المهارات المهمة واللازمة لهذه الإستراتيجية.
- الرجوع للخلف (الحل عكسياً): يتم في هذه الإستراتيجية البدء من نهاية المشكلة والسير نحو مقدمتها، ومن الحالات التي يفضل فيها استخدام هذه الإستراتيجية الحالة التي يكون فيها ناتج المسألة

معروفاً ولكن طريقة الوصول إليه ليست معروفة، ويتم في هذه الإستراتيجية عكس العمليات التي تُجرى عندما يتم البدء من مقدمة المسألة.

- البحث عن نمط: الأنماط عبارة عن تكرارات منتظمة، حيث يتم في هذه الإستراتيجية ملاحظة وفحص البيانات المعطاة، والتنبؤ بالبيانات الناقصة أو المجهولة، كما أنها تستخدم في اكتشاف وتكوين التعميمات. والأنماط قد توجد في الأعداد أو الأشكال...
- إنشاء قائمة منظّمة : يطلق عليها أيضاً تكوين جدول، ويتم في هذه الإستراتيجية جدولة البيانات أو تنظيمها في قوائم لتسهيل دراستها، وتنظيم التفكير والسير بخطة مناسبة نحو حل المشكلة، ويفضّل استخدام هذه الإستراتيجية عندما يكون لمسألة ما عدد من الإجابات، حيث يمكن من خلالها إيجاد جميع الإجابات الممكنة للمسألة، بينما تستخدم إستراتيجية التخمين والتحقق غالباً عندما يكون للمسألة حل واحد. كما يمكن استخدام إستراتيجية إنشاء قائمة منظّمة لاستنتاج بعض التعميمات من خلال إعداد جدول وتنظيم المعلومات عليه، مما يسهّل اكتشاف التعميم.
- حذف بعض الحالات : تستخدم هذه الإستراتيجية عندما يكون للمسألة أو المشكلة عدد محدد من الإجابات المحتملة، فيتمّ دراسة هذه الحالات، واستبعاد الإجابات الخاطئة للوصول إلى الإجابة الصحيحة.
- حل مشكلة أبسط (أسهل): يتم من خلال هذه الإستراتيجية حل مسألة مشابهة للمسألة الأصلية، ذات علاقة بها. ويكون تبسيط المشكلة من خلال استخدام أرقام أصغر أو أرقام أسهل

في الحسابات، وقد يتم تبسيط المشكلة من خلال إهمال بعض الشروط مؤقتاً. كما أن تبسيط المشكلة قد يكون من خلال دراسة حالات خاصة ثم محاولة الإستفادة من حل هذه الحالات الخاصة في حل المشكلة الأصلية. ويمكن استخدام هذه الإستراتيجية مع استراتيجيات أخرى لحل المشكلة ، بمعنى أنها قد تكون خطوة مساعدة في حل المشكلة.

- التمثيل أو المحاكاة : يتم في هذه الإستراتيجية تمثيل الموقف عملياً، حيث يقوم الطلاب بتأدية أدوار تجسد المسألة في الواقع وقد تستخدم المحاكاة بدلاً من التمثيل الواقعي. وتعد هذه الإستراتيجية مناسبة بشكل كبير لطلاب المراحل الأولية.

- تكوين معادلة أو معادلات (جملة مفتوحة: معادلة أو متراجحة): وهي من أكثر الإستراتيجيات استخداماً خاصة في المسائل والمشكلات الجبرية، ويتم فيها ترجمة معطيات المسألة إلى معادلات، حيث يعبّر عن المجاهيل في المسألة أو المشكلة باستخدام الرموز (المتغيرات). وبالرغم من أن عملية ترجمة المسألة أو المشكلة من صورتها اللفظية إلى معادلات تعدُّ أهم خطوة في هذه الإستراتيجية، إلا أن مجرد حل المعادلات بطريقة روتينية دون محاولة توظيف الإستراتيجيات الأخرى قد يؤدي إلى عمليات صعبة أثناء الحل. كما أن هذه الإستراتيجية قد تستخدم كاستراتيجية مساعدة أثناء حل المشكلة.

- التبرير المنطقي: تدخل هذه الإستراتيجية غالباً مع معظم استراتيجيات حل المشكلات، كما أنها تستخدم في حل المسائل

والقضايا المنطقية، وتستخدم كثيراً في حل التمارين الهندسية وإجراء البراهين الرياضية.

3. **تنفيذ خطة الحل** : بعد إيجاد فكرة الحل ورسم الخطة، تعتبر عملية تنفيذها من الأمور السهلة. يجب التأكد من أن كل خطوة من خطوات الحل صحيحة، مع محاولة إثبات صحتها.

4. **المراجعة و التحقق من صحة الحل** : غالبا ما يتم إهمال هذه المرحلة من قبل التلاميذ، لأنهم يعتقدون أن حل المسألة انتهى بمجرد الحصول على الحل. ويمكن الاستعانة بالنقاط التالية في هذه المرحلة:

- هل يمكن أن تحقق من صحة النتيجة؟
- هل الحل يحقق شروط المسألة ؟
- هل الحل معقول ويتفق مع طبيعة المسألة؟
- هل تمَّ استخدام جميع المعلومات؟
- هل يمكن حل المسألة بطريقة أخرى؟
- هل يمكن استخدام هذه الطريقة أو الإستراتيجية في حل مسائل أخرى؟

د) نموذج هدمارد - بوانكاري لحل المسائل

نقطة انطلاق نموذج هدمارد - بوانكاري لحل المسائل، الذي استحدث من طرف العالمين هدمارد ((J. S. Hadamard [1865-1963]) وبوانكاري ((H. Poincaré [1854-1912])، هي أن "العلماء متفقون على إمكانية حل

المسائل التي يرغبون في حلها"، ويمكن تقديم هذا النموذج في ثلاثة مراحل:

المرحلة الأولى : هي مرحلة التحضير، حيث يكون فيها المتعلم واعيا بما يجري بداخله من أجل حل المسألة، وهي مرحلة للتركيز والجمع. وتتجلى أهميتها في كونها تحضيرا للمرحلة الموالية، بل توجهها وتحدد الهدف، كما أنها مرحلة لحشد الأفكار وتعبئتها وتركيبها.

المرحلة الثانية : يكون فيها المتعلم غير واع بما يجري لديه لحل المسألة، والعمل في هذه المرحلة تركيبي ويتضمن خطوتين، حيث تمثل الخطوة الأولى في التركيز، التحقق وتفعيل الأنشطة الذهنية؛ بينما تمثل الخطوة الثانية في الإلهام، حيث يتوقع الباحث الحل بشكل عام وغير منتظر.

المرحلة الثالثة : يكون فيها الباحث واعيا بما يجري وبالتالي يتحقق من صحة إلهامه من أجل عرض الحل؛ ثم يقوم بتتمة الحل من أجل عرضه بطريقة مدققة.

خلاصة : المسألة تفيد البحث، التنظيم والتنسيق بين عدة معارف، ومن وظائفها تنقيح المعارف، التطبيق، التثبيت، التقوية والتقويم ثم تحضير التلميذ لمواجهة وضعيات غير منتظرة.

3.3 التعلم بحل المسائل

من أجل توضيح دور المسائل في التعلم نستحضر تعريف ميريو (Ph. Meirieu) للوضعية المسألة، حيث عرفها على أنها مسألة لايمكن للتلميذ حلها دون اكتساب معارف جديدة. وأضاف إنها وضعية يكون التلميذ خلالها مطالبا بالقيام بمهمة لايمكنها أن تؤدي إلى شيء دون تعلم

محدد.

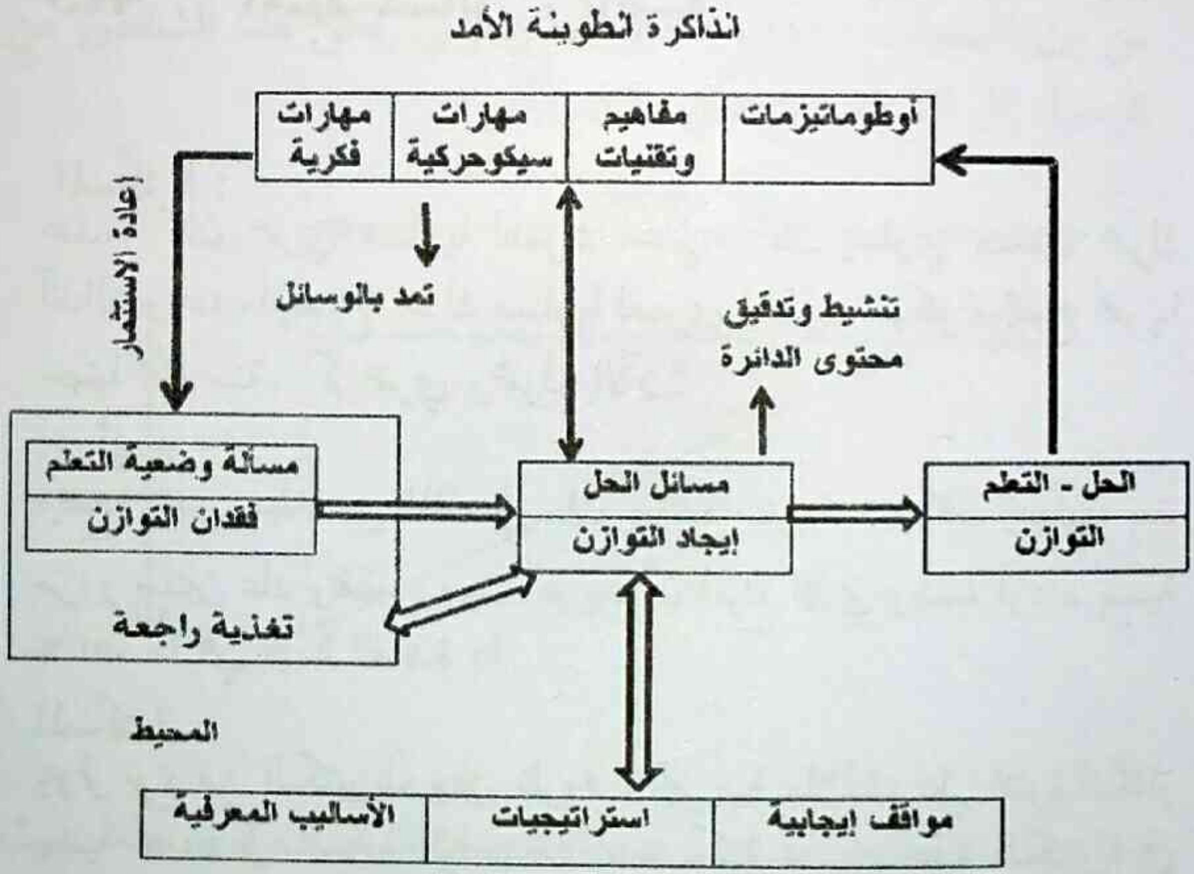
"La situation-problème est un problème que l'élève ne peut pas le résoudre sans acquérir de nouveaux savoir".
"... C'est une situation dans laquelle il est proposé à l'élève une tâche qui ne peut mener à rien sans effectuer un apprentissage précis".

من جهته أكد بياجي، أحد مؤسسي المدرسة السوسيوبنائية، أن التعلم يتم بالفعل. والفعل بالنسبة لبياجي هو حل المسائل، وليس الفعل على أشياء ومواضيع فقط، فالتعلم حسب بياجي عملية ذهنية لاخطية وهو بناء فكري يقوم به الفرد والفرد وحده. وأضاف أن المعرفة تمر من حالة توازن إلى أخرى عبر أطوار إنتقالية حيث يعاد النظر في المعارف السابقة، والقول بأن المتعلم تمكن من اجتياز حالة اللاتوازن معناه أن هناك تنظيما وإعادة صياغة للمعارف، حيث يتم خلاله إدماج المكتسبات الجديدة مع القديمة. وحسب فيكوتسكي وباشلار فإن التلميذ يتعلم أفضل بالمشاركة مع أقرانه ومساعدة شخص راشد. إذن من أجل تسهيل اكتساب المعرفة، يجب وضع التلميذ في حالة صراع معرفي. ويمكن القول إننا نتحدث هنا عن صراع سوسيومعرفي، لأن داخل كل صراع هناك جزء من الإجتماعي، وجزء من المعرفي وموضوع الصراع هو المعرفة.

وبصفة عامة فإن المسائل الروتينية أو غير الروتينية تسمح للمتعلم باكتشاف استراتيجيات. هذه المسائل تقود المتعلم إلى اكتساب أوتومتيزمات وتقنيات ومهارات تمكنه من تملك الدقة والسرعة واكتساب معرفة جديدة خلال الحل، بتعبير أدق فإن المتعلم ينمي قدراته الذهنية، التي تسمح له باعتماد طرق متعددة لحل المسائل، وبالتالي تطوير عدة مهارات واكتساب المعارف. يتعلق الأمر إذن بالتعلم المرتكز على حل

المسائل. ونلخص دور حل المسائل في التعلم في الخطاطة التي وضعها مارسيل هاميل (M. Hamel).

الشكل 1.3: خطاطة M. Hamel



للتعلم بحل المسائل وظائف عدة، بعضها مرتبط بأهداف معرفية وأخرى بأهداف منهجية، فبالنسبة للوظائف ذات الطابع المعرفي فإنها تتجلى في إنتاج مفاهيم وأدوات رياضية (دور تكويني وبنائي)، تنمية الجانب المعرفي، استعمال وتعبئة مفاهيم وأدوات رياضية، ثم التدريب وتطبيق الرياضيات في إطار له معنى بالنسبة للتلميذ. أما بالنسبة للوظائف ذات الطابع المنهجي فتتمظهر في اكتساب توجيهات، اكتساب طرق

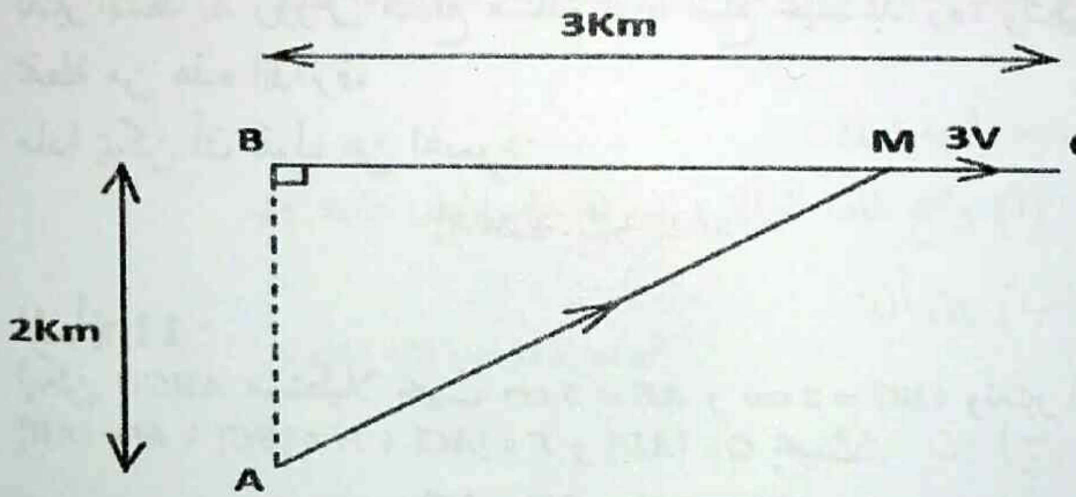
رياضية (الإستدلال الرياضي)؛ ثم التعود على تحمل المسؤولية...

4.3 أمثلة لمسائل رياضية

المسألة 1 :
عندما كان عمري مساويا لعمرك الحالي، كان يساوي ضعف عمرك آنذاك و عندما يصبح عمرك مساويا لعمري الحالي، سيكون مجموع عمرينا حينها 84 سنة. كم عمري وعمرك الآن؟
المسألة 2 :
وضع شخص مبلغا من المال في بنك بفائدة سنوية $t\ \%$ كان يجهلها، بعد مرور سنتين عاد وتفقد رصيده فوجد أن المبلغ الذي وضعه ازداد بنسبة $21\ \%$. ما هي قيمة الفائدة t؟
المسألة 3 :
يتوفر نوع من البكتيريا، وفق ظروف تجريبية ملائمة، على قدرة للتكاثر بنسبة $50\ \%$ في الساعة الواحدة. نضع كمية m من هذه البكتيريا في الظروف الملائمة لتكاثرها.

ما هو عدد الساعات اللازمة والكافية لكي تصبح كمية البكتيريا أكبر أو تساوي خمسة أضعاف الكمية m؟ (وللتحقق من النتيجة يمكن أن نأخذ $m = 200\ g$).
المسألة 4 :
يوجد شخص في نقطة A على ضفة بحيرة عرضها $2\ km$. نعتبر النقطة B المقابلة ل A على الضفة الأخرى للبحيرة، والنقطة C التي توجد على نفس الضفة معها وتبعد عنها ب $3\ km$.
يعتزم هذا الشخص الوصول إلى النقطة C كما يوضح الشكل أسفله.

حيث يقوم انطلاقا من النقطة A بالسباحة عبر البحيرة وفق مسار نعتبره مستقيمي، وبسرعة ثابتة V للوصول إلى النقطة M من الضفة الأخرى تنتمي إلى القطعة $[AB]$ ثم يقوم انطلاقاً من M بالركض نحو النقطة C بسرعة ثابتة تساوي $3V$.
من بين المسارات AMC، ما هو المسار الذي يمكن هذا الشخص من الوصول إلى النقطة C في أقل وقت ممكن؟



المسألة 5 :
بالاعتماد على التعداد، حدد عدد أقطار مضلع محدب له n ضلعا حيث $n > 3$.
المسألة 6 :
خذ عددا مكونا من ثلاثة أرقام ثم كون عددا آخر باستعمال الفرق بين أكبر عدد وأصغر عدد يمكن تكوينه انطلاقا من الأرقام الثلاث.
أتمم:

$$342 \longrightarrow 455 \longrightarrow 654 \longrightarrow \dots$$

المسألة 7 :
ما هو أصغر مربع صحيح طبيعي بحيث كتابته العشرية تنتهي بالأرقام الأربعة 9009.

المسألة 8 :

اعتبر ثلاث دوائر لها نفس المركز، كيف يمكن اختيار على كل واحدة منهم نقطة للحصول على رؤوس مثلث مساحته قصوى.

المسألة 9 :

ليكن ABC مثلثا متساوي الأضلاع محيطا بالدائرة (Γ)، ولتكن $M \in (\Gamma)$ أوجد علاقة بين المسافات: MA، MB و MC.

المسألة 10 :

نعتبر النقط A_i رؤوس مضلع منتظم له n ضلع محيط بدائرة، ولتكن M نقطة من هذه الدائرة.

ماذا يمكن أن نقول عن المجموع:

$$MA_1^2 + \ldots + MA_n^2$$

المسألة 11 :

ليكن $ABCD$ مستطيلا بحيث $AB = 5\ cm$ و $BC = 3\ cm$، ونعتبر النقط $M \in [AB]$ ، $N \in [BC]$ ، $P \in [AC]$ و $Q \in [AD]$ بحيث:

$$AM = BN = CP = DQ = x$$

1. إلى أي مجال تنتمي x؟
2. أحسب مساحة الرباعي $MNPQ$ بدلالة x.
3. نعتبر الدالة f المعرفة ب:

$$f(x) = 2x^2 - 8x + 15$$

(أ) مثل هندسيا الدالة f.

(ب) أدرس تغيرات الدالة f.

(ج) من أجل أي قيمة ل x تكون مساحة $MNPQ$ دنيا.

المسألة 12 :

نعتبر $ABCD$ مربعا مركزه O وضلعه 2 و M نقطة من القطعة $[AC]$ تخالف

A و C و (d) المستقيم الموازي للمستقيم (BD) والمار من M.

نعتبر $[PQ]$ القطعة من المستقيم (d) والتي توجد ضمن المربع $ABCD$، حيث:

- إذا كانت $M \in [AO]$ فإن $P \in [AD]$ و $Q \in [AB]$،
- وإذا كانت $M \in [OC]$ فإن $P \in [DC]$ و $Q \in [BC]$.

نضع $x = AM$ ونرمز ب $f(x)$ لمساحة المثلث APQ.

1. حساب $f(x)$:
   (ا) وضح لماذا الدالة f معرفة على المجال $]0;\ 2\sqrt{2}[$.
   (ب) بين أن:
   $$x \in]0;\ \sqrt{2}] \Longrightarrow f(x) = x^2$$
   (ج) بين أن:
   $$x \in [\sqrt{2};\ 2\sqrt{2}[\Longrightarrow f(x) = -x^2 + 2\sqrt{2}x$$
2. دراسة الدالة f:
   (ا) بين بطريقتين مختلفتين (جبرية ثم هندسية) أن الدالة f تزايدية قطعا على المجال $]0;\ \sqrt{2}$.
   (ب) بين أن:
   $$x \in [\sqrt{2};\ 2\sqrt{2}[\Longrightarrow f(x) = -(x - \sqrt{2})^2 + 2$$
   (ج) بين أن f تزايدية على $[\sqrt{2};\ 2\sqrt{2}[$، ثم أنشئ المنحنى الممثل للدالة f على $]0;\ \sqrt{2}[$ ثم على $[\sqrt{2};\ 2\sqrt{2}[$.
3. (ا) لماذا الدالة f تقبل قيمة قصوى على المجال $]0;\ 2\sqrt{2}[$.
   (ب) حدد محل النقطة M التي من أجلها تكون $f(x)$ قصوى.

(ج) بين أنه يوجد موضعين M_1 و M_2 ل M على $[AC]$ بحيث مساحة المثلث APQ تساوي 1.

(د) وضح لماذا النقطة O توجد بين M_1 و M_2.

(هـ) ليكن $M_1 \in [AO]$ و $M_2 \in [OC]$. وضح لماذا $OM_1 < OM_2$؟

الفصل 4

التدبير الديداكتيكي

1.4 مفهوم التدبير الديداكتيكي

يتعلق التدبير الديداكتيكي بتدبير العملية التعليمية-التعلمية على مستوى المدخلات (الكفايات والقدرات المنتظرة)، والعمليات (المحتويات، الطرائق ووسائل الإيضاح)، والمخرجات (التقويم، الفيدباك، المعالجة والدعم)، ولا ننسى أيضا تدبير التعلمات، تدبير الإيقاعات الزمنية، تدبير الفضاءات الدراسية، ثم تدبير عملية المراقبة والتقويم.

ينبني التدبير الديداكتيكي على مجموعة من المرتكزات المنهجية، التي يمكن حصرها في أنشطة المعلم وأنشطة المتعلم، وهي تقدم عبر مجموعة من المقاطع التعلمية، الإنطلاق من الكفايات المسطرة والقدرات المرتبطة بإنمائها، تحديد فضاء التدبير، التركيز على الإيقاع الزمني تشخيصا وتكوينا ومعالجة، رصد الوضعيات الديداكتيكية بما فيها الوضعيات المسألة والوضعيات المشكلة، وتنظيمها في شكل جذاذة دراسية تخطيطا وتطبيقا وتنفيذا، واختيار أنواع الطرائق البيداغوجية والوسائل الديداكتيكية التي

تسعف المدرس والمتعلم معا على التعامل مع الوضعيات المقدمة له.

ويراعى في التدبير الديداكتيكي مجموعة من الشروط الأساسية، يمكن حصرها في الشروط السوسيوتربوية؛ خصوصيات التلاميذ النفسية والاجتماعية والاقتصادية؛ الفوارق الفردية؛ الإمكانيات البشرية والمادية والمالية والعدة الإدارية؛ بيئة التلاميذ ومحيطهم النفسي، والاجتماعي، والثقافي، والديني، والسياسي ثم الاقتصادي؛ الإيقاعات الزمنية والتنظيمات المكانية والصفية؛ الإلتزام بالمقررات الرسمية والتوجيهات التربوية؛ ثم العمل على تحقيق الجودة كما وكيفا.

2.4 تدبير الفصل الدراسي

يعد تدبير الفصل الدراسي من أهم مكونات التدبير الديداكتيكي، ويقصد به كل ما يحكم تخطيط الوضعيات التعليمية-التعلمية وتنظيمها. وهو إذن حسب فيجالكاو (J. Fijalkow) ونولت (T. Nault)، في [32]، مجموع الأعمال الآنية والمتتالية التي يقوم بها الأستاذ من أجل خلق جو ملائم للعمل وفضاء مناسب للتعلم والحفاظ عليه.

“La gestion de la classe se définit comme l'ensemble des actes réfléchis, séquentiels et simultanés qu'effectuent les enseignants pour établir et maintenir un bon clémat de travail et un environnement favorable à l'apprentissage”.

ويمكن التميز بين مفهومين أساسيين في هذا الإطار: قيادة القسم وتدبير الفصل، و تمثل قيادة القسم في سلوكات التلاميذ وانعكاساتهم حول تعليمات العمل وقواعد الحياة الجماعية داخل القسم والمجموعة. إن

هذا المفهوم لا يمكن فصله عن طبيعة العلاقة الوجدانية التي يربطها التلميذ مع الأستاذ وكذلك مع جميع زملائه والمادة المدرسة (الرياضيات) ونوع العقد الديداكتيكي الذي أبرمه الأستاذ مع تلاميذه والعقود الديداكتيكية الأخرى. أما تدبير الفصل فيرتكز على ثلاثة محاور أساسية تتمثل في تخطيط الوضعيات البيداغوجية، وتنظيم القسم، ثم المراقبة خلال الفعل. كما يستدعي إعطاء تعليمات العمل، تنويع الوضعيات البيداغوجية (وضعيات مسألة بمواصفات مناسبة)، رصد أفضل المجموعات، ثم مراقبة الزمن الحقيقي للتعلم ...

وبتعبير أعم فإن تدبير الفصل الدراسي يعني توفير جميع الشروط اللازمة لحدوث التعلم لدى التلاميذ بشكل فعال، ومن المهارات المرتبطة به نذكر:

- مهارة تنظيم الفصل الدراسي،
- مهارة حسن التصرف مع المستجدات،
- مهارة تنظيم الأنشطة التعليمية،
- مهارة التموقع داخل الفصل،
- مهارة توظيف الأسئلة في بناء التعلمات.

3.4 هندسة مقطع تعليمي - تعلمي

يمثل تحضير الدروس منهجا وأسلوبا وطريقة تحقق الإرتقاء بعملية التعليم والتعلم، ويعين الأستاذ على مواجهة المواقف التعليمية والتغلب على صعوباتها بثقة وروح معنوية عالية، كما يعينه في تنظيم ما يقوم به من جهود من أجل مصلحة التلاميذ لاستيعاب الدرس وفهم عناصره وإعطاء معنى للتعلمات. وتتجلى أهمية التحضير القبلي في كونه يجعل عمل الأستاذ منظما ومرتبا، يجعل أداء الأستاذ بعيدا عن الارتجالية والعشوائية، يقود الأستاذ إلى تنظيم عناصر درسه وشرحها وتوضيحها بطريقة منظمة وميسرة، ويجعل الأستاذ واعيا ومدركا للصعوبات والمشكلات التي تواجهه أثناء الدرس أو يتنبأ بها، ومن ثم يعمل على إيجاد الوسائل الملائمة لتعديلها. وعليه فإن التحضير القبلي للدروس يسهم بشكل أساسي في بناء الكفايات الأساسية والمتمثلة في التخطيط، والتدبير والتقويم.

إن هندسة مقطع تعليمي-تعلمي تستوجب من الأستاذ الإجابة على التساؤلات التالية:

- هل قام بتحليل وضعية الإنطلاق؟
- هل قام بتحديد مكتسبات المتعلمين؟
- هل أعد الموارد المادية المتوفرة؟
- هل أعد ونظم المكان الذي ستجرى فيه الحصة؟
- هل ضبط القدرات المنتظرة من الحصة؟

- هل ضبط معايير تحقق هذه القدرات؟
- هل قام بتحليل المحتوى؟
- هل ضبط المعارف التي ستكون موضوع الدرس؟
- هل حدد محتوى الحصة بارتباط مع المنهاج الدراسي؟
- هل كيف المحتوى مع المستوى الفعلي للفصل الدراسي وذلل الصعوبات؟
- هل قام بموضعة الحصة في إطار تدرج المفاهيم المرتبطة بالمادة؟
- هل توقع تنظيم الحصة أو المقطع التعليمي-التعلمي وجميع السيناريوهات الممكنة؟
- هل هيكل الأسئلة الفعالة المناسبة؟
- هل له تصور حول تطوير الإجراءات؟
- هل أخذ المهام المطلوبة من المتعلمين في الاعتبار (من حيث الكم والكيف)؟
- هل توقع طريقة الاشتغال، بارتباط مع مختلف مراحل الحصة أو المقطع التعلمي-التعليمي (فردي، جماعي، بالمجموعات)؟
- هل توقع تعليمات واضحة ومضبوطة؟
- هل توقع استعمال الوسائل؟
- هل اختار وسيلة تقويم ملائمة وتوقع استراتيجية للدعم؟

4.4 أهمية الجانب الوجداني في تدبير التعلمات

إن كلمة "وجدان" في تدريس مادة الرياضيات تحيلنا على طرح عدة أسئلة نذكر منها:

- هل يمكن تحفيز التلميذ في مادة الرياضيات؟
- هل عزوف التلميذ عن الرياضيات والفشل في الرياضيات يمكن إرجاعه إلى عوامل وجدانية؟
- لخدمة الجانب الوجداني، هل هناك خصوصية بالنسبة للرياضيات أم أن الأمر لا يتعلق بطبيعة المادة؟
- هل تقتصر مهمة الأستاذ فقط على إخبار التلميذ بمعلومات مرتبطة بالمفهوم الذي هو بصدد تقديمه ووضع أدوات تقنية رهن إشارته تسمح له باستيعاب المعلومات ومراقبة المسار؟
- هل الأستاذ مسؤول عن تربية التلميذ أم هو مسؤول عن معرفته؟
- هل الأستاذ مطالب بالتحاور مع التلميذ على مستوى مخيلته وأوهامه وتمثلاته حول الرياضيات؟ وبالتالي هل هو مطالب باختيار الوقت المناسب لتقديم "الجمل الرياضية" (بسرعة، إعطاء مهلة، في الوقت الذي تكون فيه رغبة لدى التلميذ...)، اختيار الطريقة (سهلة، صعبة ...)، الصرامة، الصياغة، التمثيل؟
- ...

لتعليل أجوبتنا على هذه التساؤلات، التي تظهر أهمية العامل الوجداني في تدريس الرياضيات، نستحضر أعمال بياجي (J. Piaget)، في [49]،

حول نظريات التعلم وعلاقتها بالجانب الوجداني، وكذلك عدة أبحاث تدخلية للأستاذة لويز لافورتين (L. Lafortune)، في [47]، حول العلاقة الوجدانية التي يربطها الأستاذ مع تلامذته من جهة ومع المادة من جهة أخرى وأيضا حول نوعية العلاقة التي يربطها التلميذ بالمعرفة.

يعرف الوجدان على أنه مجموع الأحاسيس والإنفعالات والعواطف والإتجاهات والميولات التي يتفاعل معها الشخص ويتأثر بها من حب وكراهية وتعاطف ولذة وألم وميل ونفور وبصفة عامة كل الأحاسيس الإنسانية (معجم المعاني).

يتضمن الوجدان مكونات متنوعة، غير أننا سنتطرق إلى تلك التي لها ارتباط بالرياضيات، والتي تتمثل في الحالات، والإنفعالات، والدافع (الحافز)، وأسناد السببية ثم الثقة في النفس.

الحالة: هي تصرف داخلي مكتسب لدى الشخص فيما يتعلق بنفسه أو بعنصر من بيئته وقد يخص شخصا، شيئا، حالة أو إيديولوجية أو طريقة تعبير... ينتج عنه سلوك إيجابي أو سلبي. فالمتعلم الذي يعتقد أن الرياضيات لن تكون مفيدة له في حياته ومهنته المستقبلية يجد صعوبة في استثمار طاقته في تعلم المفاهيم المتصلة بالمادة.

الانفعالات: هي رد فعل عاطفي إيجابي أو مؤلم، ويتجلى بطرق مختلفة. ويتجلى القلق-الإنفعال المرتبط بصعوبات التعلم في الرياضيات في الاحساس بالتوتر وانعدام الأمن، اضطرابات جسدية نتيجة الإحساس بتهديد من مصدر غير معروف يشعر معه الشخص بالعجز عن مواجهته. هذا القلق غالبا ما ينتقل من مجرد توتر إلى إحساس بالخوف ينتج عنها اضطرابات يصعب تجاوزها.

الحافز: هو الرغبة والإرادة التي تدفع الشخص لأداء مهمة أو تحديد

هدف يتطابق مع حاجة معينة، حيث يقتنع المتعلم أن النجاح حليفه وبالتالي يبادر بالقيام بالإجراءات اللازمة لبلوغه، ويرى أن بإمكانه تجاوز المهمات التي كلف بها.

أسناد السببية: هناك موقفان في هذا الشأن، الأول يقول بأن المتعلمين الذين ينجحون في الرياضيات لا يعزون النجاح والفشل لنفس الأسباب التي يعزو إليها المتعلمون الذين لهم صعوبة في هذا التخصص، وكذلك يمكن التمييز بين الجنسين في هذا الصدد، فيما يقول الثاني إن التلاميذ لا يدركون هل فشلهم راجع إلى التذرع بأسباب داخلية يمكن السيطرة عليها أم إلى نسبة الجهد المستثمر.

الثقة بالنفس: وهي التمثلات والأفكار التي يكونها الشخص عن ذاته حول مدى قدرته على إنجاز مهمة محددة. وهو مفهوم يرتبط بتقدير الذات، وفي الرياضيات هي شرط أساسي لمواصلة البحث عن حلول بالرغم من وجود صعوبات أثناء مواجهة المسألة.

بالرجوع إلى [48]، نجد أن بياجي وضح أن دور الوجدان في علاقته بالعمل الفكري ينحصر فقط في التحفيز والإزعاج والتشويش؛ ومنه، حسب بياجي، فإن الجانب الوجداني يتدخل فقط لتسريع أو إبطاء التطور المعرفي دون المساس بالتركيبات الفكرية في حد ذاتها. وبالتالي يمكن إرجاع تعذر اكتساب بعض المهارات الرياضية بالنسبة للمتعلمين إلى العائق الوجداني والإحساس بالنقص. في المقابل فإن تشجيع المتعلم داخل الفصل يعطيه حافزا أكبر في التعلم ويشحنه داخليا بشحنات موجبة تسهل عليه بشكل أكبر عملية الإكتساب. وبصفة عامة، فبالنظر إلى أعمال بياجي وآخرين فإن الحياة العاطفية تعتبر محددات إيجابية للتقدم الفكري. إن العوامل العاطفية حاضرة بشكل دائم في بناء المعرفة العلمية

ولو تعلق الأمر بالأشكال المجردة، فعندما يحل الطالب مشكلة في الجبر، أو حتى عندما يكتشف عالم رياضيات نظرية جديدة، فإنه في بداية بحثه تكون هناك مصلحة أو حاجة، داخلية أو خارجية، تحثه أو تدفعه للقيام بهذا العمل، وتكون مصحوبة إما بمتعة أو خيبة أمل، أو أحاسيس ومشاعر تختلف بين التعب والإجهاد... وفي نهاية بحثه تخلل الطالب أو العالم مشاعر النجاح أو الفشل، كما يمكن أن تضاف إليها مشاعر متنوعة تكون متصلة بجمالية النتائج التي توصل إليها وجودة الحل أو الإستدلال.

من جهة أخرى فقد أثارت لويز لافورتين وكذا بيرنارد ماسي، في كتابهما [47]، مجموعة من المفاهيم الوجدانية التي لها ارتباط بالمجال المعرفي وذلك استنادا إلى الأبحاث التدخلية التي قاما بها. وذهبت لافورتين في أبحاثها إلى دراسة التأثير الذي يمكن أن تخلفه الإنفعالات والمشاعر التي يحسها المتعلمون على فاعليتهم في تعلم الرياضيات. ففي أبحاثها طلبت من المتعلمين "رسم وتمثيل الرياضيات" دون إعطاء أي تعليمات أو شروحات أخرى، وقبلت جميع الأفكار التي أدلى بها المتعلمون في إجاباتهم. حيث اتبعت من أجل "رسم وتمثيل الرياضيات" ما يلي:

المرحلة الأولى: تطلب من المتعلمين "رسم الرياضيات" وتهيئ لهم وضعية مريحة للغاية تساعدهم على إنجاز الرسم ويشعر كل واحد أن أفكاره جيدة مهما كان الرسم الذي قدمه، وتساعد هذه الخطوة المتعلمين في التركيز على أنفسهم والتفكير في مشاعرهم وتمثلاتهم حول الرياضيات كما يطلب من التلاميذ كتابة جملة واحدة أو جملتين تشرح الرسم المقدم وتفسر تمثلاتهم حوله.

المرحلة الثانية: يعرض المتعلمون رسوماتهم ويقومون بشرحها لزملائهم

الآخرين، كما يجيبون على الأسئلة المطروحة سواء من أقرانهم أو من طرف المنشط ويمكنهم التعبير عما يشعرون به ويعتقدونه حول الرياضيات وذلك بصوت عال أمام الآخرين، مما يساعدهم على فهم أفضل لردود أفعالهم. ثم تطرح الباحثة سؤالين على كل متعلم:

- فسر لنا رسمك، ماذا يمثل؟
- لماذا قررت تمثيل الرياضيات بهذه الطريقة؟

المرحلة الثالثة: تقدم لفئة من المتعلمين الذين يخضعون لهذه الدراسة ملصقات تمثل رسومات قدمها متعلمون آخرون لا يعرفونهم، من أجل إثارة النقاش ويطلب من كل متعلم اختيار الرسم الأقرب تعبيرا عن الرياضيات.

المرحلة الرابعة :تتم مناقشة أفكار التلاميذ وتمثلاتهم حول الرياضيات بشكل عام.

الهدف من اتباع هذه الطريقة هو التخلص من جميع المخاوف المرتبطة باكتساب وتعلم الرياضيات لدى المتعلمين، وتطوير الجوانب الإيجابية لنظرتهم لها وذلك عن طريق:

- تنمية المتعلم لمواقفه الإيجابية اتجاه الرياضيات،
- مواجهة معتقداته السلبية،
- السماح بالتعبير عن الانفعالات والعواطف،
- التعبير عن الأفكار والآراء،
- تقاسم الأفكار والآراء مع الآخرين،

- تقبل العمل الجماعي؛
- التحرك نحو التغيير وتقاسمه مع الآخرين.

مما ساعدها على جمع بيانات أوضحت طبيعة المشاعر التي تثيرها مادة الرياضيات لدى المتعلمين؛ وكذلك أدرجت مقابلات مع مجموعة من الأشخاص بلغوا مراتب مختلفة في مسيراتهم المهنية وكانت تتخللهم مجموعة من المشاعر والإنفعالات تجاه الرياضيات والتي أثبتت وجهة نظرها وأكدت تأثير الجانب الوجداني على المعرفي. وخلصت إلى النتائج التالية:

- اعتقاد أن الرياضيات مادة تحتاج إلى موهبة خارقة يعيق ويصعب اكتساب وتعلم الرياضيات؛
- الخوف من الرياضيات يؤدي إلى تجنب أي نشاط قد يكون له دلالة رياضية؛
- اللامبالاة اتجاه مادة الرياضيات يفقدها كل معنى عند المتعلمين؛
- حب الرياضيات يسهل تعلم واكتساب الرياضيات؛
- كره الرياضيات يعيق تعلم واكتساب الرياضيات؛
- الشعور بالضيق والإنزعاج يعقد من تعلم الرياضيات؛
- اعتقاد المتعلم بعدم جدوى الرياضيات يصعب جدا مواجهته لها، لأنه عندما يسأل المتعلم "ما هي فائدة هذا المفهوم الرياضي في الحياة؟" فإنه غالبا ما يكون من الصعب جدا العثور على الوضع المناسب لاستخدام المفهوم مباشرة؛

• استعمال أنشطة حل المسائل في الرياضيات والاستمتاع بذلك يسهل تعلمها.

وخلاصة القول فإن لافورتين تتقاسم نفس وجهة النظر مع بياجي حول أهمية الجانب الوجداني لتطوير المعرفة، وتأثير الوجدان على الذكاء والمعرفة ينحصر في التحفيز والإزعاج والتشويش، كما يتدخل فقط لتسريع أو إبطاء التعلم دون المس بالتركيبات الفكرية في حد ذاتها.

5.4 الأسئلة الفعالة في تدبير مقطع تعلمي

البيداغوجيا الحديثة تعتمد بالأساس على مقاربات تعرف التلاميذ كأفراد يخلقون معارفهم بأنفسهم. كما يتبنى علماء الرياضيات مقاربة حل المسائل في تدريس الرياضيات، قصد تشجيع التلاميذ على التطوير وتعميق فهمهم وقت تطويرهم للإستدلالات التي تساعدهم على القيام بالمهام الموكلة لهم. في هذا السياق تلعب تساؤلات الأستاذ دورا أوليا في تحديد سيرورة التفكير عند التلاميذ، والربط بين أفكارهم وإكتسابهم لمفهوم جديد، وإستدعاء برهان جديد وبالتالي يبذلون جهدا من أجل إيجاد حل ذي معنى لهم.

إن معرفة أنواع الأسئلة التي يمكن طرحها، وكذا كيفية طرحها ومتى يتم طرحها، من أجل بناء وتطوير المعارف الرياضية لدى التلاميذ مع الأخذ بعين الإعتبار نتائج التعلم، تؤدي إلى تحديد وتطوير الأفكار المهمة في خطاب التلاميذ. وباختيار الأسئلة التي ستطرح خلال سلسلة

التعلمات، يستطيع الأستاذ أن يربح الوقت، أن يختصر الجهد وأن يتمكن من بناء أفضل للمفهوم المراد التطرق له. ومن بين الوسائل المساعدة للأستاذ على تحضير أسئلة فعالة نجد:

- معرفة تطور الأفكار الأساسية في البرنامج الدراسي؛
- قراءة مختلف الموارد البيداغوجية؛
- حل المسائل نفسها والتي من خلالها ننجز الأنشطة؛
- مسارات لهيكلة التساؤلات.

ولهيكلة أسئلة فعالة نقترح مايلي:

- **توقع استدلالات التلاميذ:** جزء من تخطيط الدرس يوجب حل المسألة بطرق متعددة، وهذا ما يمكن الأستاذ من التنبؤ بالمقاربات المختلفة التي يقترحها التلاميذ من أجل حل المسألة وإعطاء أحكام قبلية على استدلالاتهم ... كما يمكنه أيضا من تخطيط الأسئلة التي يمكن أن يطرحها لتعزيز التفكير وتعميق فهم التلاميذ.
- **ربط التساؤلات بنتائج التعلم:** إن أصل نتائج التعلم هو القدرات المنتظرة من البرنامج-الإطار، حيث أن منتظرات ومحتوى التعلم يضيء طريق الأستاذ لنوع الأسئلة التي يمكن طرحها، ونوع المسائل التي يمكن تقديمها، ويكون ذلك بطرح أسئلة تعود لنفس البرنامج-الإطار. فالأستاذ بذلك يساعد التلاميذ على التركيز على هاته المفاتيح الرئيسة ودعوتهم بالتالي إلى القيام بتعميمات وتطبيقات لما تعلموه في مسائل جديدة.
- **تأسيس روابط مع نتائج التعلم:** فمثلا، نفس الكائن يمكن وصفه بأصناف قياس مختلفة. وكمثال عن هذه الوضعية أن يطلب الأستاذ

من التلاميذ تحديد متوازيات مستطيلات التي مساحتها الكلية $50\ cm^2$، وكنتيجة للتعلم: يمكن للتلميذ أن يؤسس رابطا بين الطول، العرض، المساحة والجداء.

الأسئلة الممكنة:

- خلال معالجة الأشكال المرسومة، ما هي الروابط التي يمكن تأسيسها بين طول الأضلاع والمساحة الكلية؟
- علما أن الشكل هو متوازي مستطيلات، ومساحته الكلية ومحيط القاعدة وطول إرتفاعه معلومة، كيف يمكنك إيجاد الأبعاد الثلاث لمتوازي المستطيلات؟

. **طرح أسئلة مفتوحة:** تلعب الأسئلة المفتوحة أدوارا مهمة في التعلم، غير أنه حسب فيكوفسكي (L. Vygotsky 1896-1934) فإن هاته الأسئلة لا ينبغي أن تتجاوز إطار التطور التقريبي للتلميذ؛ ومن أدوارها نذكر:

- أنها تساعد التلميذ على رفع التحدي؛
- أنها تساعد التلميذ على تبني إستراتيجيات وأجوبة مختلفة؛ فمثلا: قارن "$5 + 7 =?$" و "$7 + 5 =?$" (سؤال مغلق)؛ فيما "هل هناك طريقة أخرى للحصول على 12" (سؤال مفتوح). أو أيضا "كم يوجد من ضلع في رباعي" (سؤال مغلق)، و"ماذا تلاحظ في هذه الأشكال" (سؤال مفتوح).
- أنها تساعد الأستاذ على تنمية الثقة في النفس لدى التلاميذ، لأنهم يستطيعون الإجابة حسب إطار تطورهم الشخصي؛

• أنها تفضل بشكل جوهري الاختلاف؛

• أن الأجوبة تظهر الاختلافات التي يمكن أن تكون مقرونة بمختلف مستويات الفهم أو التحضير، وبالاستراتيجيات التي عرضها التلاميذ وكيفية تطرق مختلف التلاميذ للمسائل عموما؛

• أن استعمالها يعتبر إشارة للتلميذ أننا ننتظر منه أجوبة بأشكال مختلفة، ذات أهمية، وذات قيمة.

ولكن الأسئلة "نعم - لا" تؤول إلى كبح التواصل وتزود بأقل المعلومات على مستوى الفهم والإكتساب لدى التلاميذ. فعمليا، يمكن أن يجيب التلميذ بشكل صحيح دون أن يعي ذلك.

حسب هينكر وفريكمان (D. Huinker et J. L. Freckmann)، في [38]، فإن بدايات السؤال التي تستدعي خطابا للجمع، وتستعمل لغة إستطلاعية تدعو التلميذ إلى التفكير. مقترحين الأمثلة التالية:

• في الوقت الذي تفكر في...

• خلال فحصك...

• ليكن ما تعرفه في موضوع ال...

• بأية طريقة ...

• فيما أفادت القرارات التي اتخذتها في معالجة ...

• في تخطيطك...

• إنطلاقا من العمل المنجز سلفا مع التلاميذ...

• خذ دقيقة....

• عندما تفكر في...

، طرح الأسئلة التي يمكن الإجابة عنها: أسئلة مثل "أليس للمثلث ثلاثة أضلاع؟" تقدم جواب للتلاميذ، ولا تسمح لهم بالإلتزام بطريقة تفكيرهم.

، إدماج أفعال تدخلية تستدعي مستويات مرتفعة من تصنيفات بلوم: الأفعال مثل أنشئ، حلل، أنجز، قوم، علل، تحرض التلميذ على إيصال استدلالاتهم، و ما يفكرون به، و تعميق فهمهم، وتوسيع تعلمهم. ولقد قدم هينكر وفريكمان لائحة من الأفعال التدخلية التي تستدعي مسلسلا معرفيا خاصا من أجل بدء الاستدلال مثل: عاين، تحقق، قرر، لاحظ، لخص، حدد، استنتج، احتفظ، أنظر، قارن، اربط، أوجد الضد، فرق، تنبأ، فحص، أول، فرق، وضح، صف...

، طرح أسئلة تعمل على توسيع رقعة الحوار بهدف إشراك تلاميذ آخرين: طريقة تشكيل الأسئلة تمكن من فتح المسألة أمام أفكار كبيرة للدراسة. فالأستاذ يطرح أسئلة ستؤدي إلى نقاشات في مجموعات حول طريقة تستحضر خلالها المكتسبات السابقة، وأشياء جديدة للتعلم؛ وكذا، الحوارات الرياضية لا تنتج بين الأستاذ والتلميذ فقط، بل أيضا بين التلاميذ كمجتمع تعلم داخل القسم.

، الحرص على الأسئلة المحايدة: الأوصاف أو النعوت مثل سهلة أو صعبة يمكن أن تحول دون حدوث تعلم التلاميذ، فبعض التلاميذ يخشون الأسئلة الصعبة، والبعض الآخر لا يحفزون بالأسئلة السهلة فيصابون بالملل، ولذا يجب على الأستاذ أن يحذر أثناء إستعماله للمؤشرات اللفظية وغير اللفظية. فتعابير الوجه والحركات يمكن أن تعكس الإشارات التي

من الممكن أن تعرقل التفكير المعمق لدى التلاميذ.
- **إعطاء الوقت الكافي للتفكير**: عندما يترك المدرس ثلاث ثوان أو أكثر للتفكير بعد السؤال، فإن نوع وكم الأجوبة يزداد بشكل ملموس. فعندما يعطي المدرس القيمة لوقت التفكير، فإنه يلاحظ أن التلاميذ الأقل ثقة في النفس يجيبون غالبا، لأن العديد من التلاميذ محتاجون لوقت أكثر من الذي يعطى في العادة من أجل تركيب أفكارهم على شكل كلمات. فبعض الإستراتيجيات مثل "فكر، تكلم، شارك" و "خذ الدور" تعطي للتلاميذ الوقت الكافي من أجل توضيح وربط إستدلالاتهم.

إن الأسئلة الجيدة لا تعوض الإنصات الفعال، فعندما يتحرك المدرس بين التلاميذ الذين يعملون مثنى أو في مجموعات، يجد نفسه في إطار نشاط، وفي أغلب الأحيان، يطلب من التلاميذ حينها شرح ما ينجزونه؛ هذا لا يشوش فكر التلاميذ فقط، بل أيضا يفوت على الأستاذ لحظات مهمة للتقويم. وبالتالي فالبدء بالإنصات الفعال هو عموما أكثر نفعا من أجل اكتشاف طريقة تفكير التلاميذ وملاحظة ردود أفعالهم.

1.5.4 نماذج إنجاز الأسئلة

النموذج 1: من أجل إيصال التلميذ إلى مشاركة تمثلاته
من أجل الحصول على هذا النموذج يجب استعمال أسئلة تستوجب أجوبتها الوصف، البرهنة، و التقديم... وكأمثلة عن هذه الأسئلة نقترح:

1. كيف قمت بتقديم طريقة تفكيرك (بمساعدة رسم، نموذج، تعبير

رقــي...)؟

2. ما هي أفضل طريقة (رسم، نموذج، تعبير رياضي...) لتقيم معارفك؟

3. ما هي الإستراتيجية(الرسم، الإمتداد...) التي استعملتها؟

4. كيف ستقوم بتذكرها في المرة المقبلة؟

5. ما هي الكلمات الرياضية التي استعملتها لوصف تجربتك؟

6. كيف قمت بتوضيحها؟

والأجوبة المتوقعة لهذه الأسئلة نجد:

1. قررت استعمال ال...

2. ... هي أفضل طريقة لتقديم الوضعية لأن ...

3. سأوضح باستعمال ...

4. يمكن أن أتذكر بـ ...

5. الكلمات الرياضية التي تمكن الآخرين من فهم ما قمت به هي ...

النموذج 2: من أجل إيصال التلميذ إلى التحليل

من أجل الحصول على هذا النموذج يجب استعمال أسئلة تساعد التلميذ على التحليل، المقارنة، المخالفة، الإختيار، التصنيف، الترتيب، التبيين، الإستعمال، التطبيق ثم التبيين باستعمال مثال. وكأمثلة عن هذه الأسئلة نقترح:

1. على أي عمليات رياضية بنيت بحثك ؟

2. ما هي الأسئلة التي طرحتها خلال العمل؟

3. بماذا أحسست خلال العمل؟

4. لماذا اتخذت هذا القرار أو هذه الإستراتيجية لحل المسألة؟

5. ما هي التعديلات التي قمت بها لحل المشكل؟

6. ما هو الجزء الأكثر صعوبة في هذه المهمة؟

7. كيف عرفت ذلك؟

والأجوبة المتوقعة لهذه الأسئلة نجد:

1. أنا مطالب ب...

2. أحسست فعلا ب...

3. عندما قررت ... فكرت ب ...

4. وجدت صعوبة في ... لأن ...

النموذج 3: من أجل إيصال التلميذ إلى تأسيس الروابط وتطوير استدلالاته هذه الأسئلة ومسارات التفكير المرتبطة بها تساعد التلميذ على خلق روابط، ربط الأفكار أو الأحداث، التخيل، الوصف، التعريف، الترتيب، التشكيل، والمقارنة. أما من الأسئلة المقترحة لتأسيس الروابط نجد:

1. في ماذا يجعلك هذا تفكر؟

2. هل تستطيع ربط هذا بأفكار رياضية أخرى؟

3. متى استعملت هذه العملية الرياضية؟ في المنزل؟ في المدرسة؟ في الخارج؟

4. أين ترى ..... ؟ في المنزل؟ في المدرسة؟ في الخارج؟

5. ماذا يشبه هذا؟ هل شيئا سبق لك التعامل معه؟

وبالنسبة لمسارات التفكير المرتبطة بهذه الأسئلة نجد:

1. هذه الفكرة الرياضية تشبه ...

2. فكرت في ...

3. سبق لي أن أنجزت شيئا مثل هذا عندما ...

4. نقوم بهذا عندما نـ...

5. أتذكر عندما نـ...

أما بالنسبة للأسئلة المقترحة لتطوير الإستدلالات فنذكر:

1. هل يمكنك الاستلال بطريقة أخرى؟

2. في ماذا هاته ... هما متطابقتان ؟

3. في ماذا هاته ... هما مخلفتان؟

4. ما هو طول ...؟ و حوالي كم ...؟ و ما هي الكتلة ...؟ إلخ ...

5. ماذا ستفعل إذا ...؟

6. ماذا سيحدث إذا ...؟

7. ماذا كان بإمكانك فعله غير ذلك؟

8. إذا قمت بهذا ماذا سيحدث؟

9. هل يمكنك القيام بـ.... بطريقة أخرى؟

10. لماذا ؟

11. كيف؟

النموذج 4: من أجل إيصال التلميذ لمشاركة مشاعره ومواقفه وآرائه

هذه الأسئلة وانعكاساتها تساعد التلميذ على المشاركة، التفكير، الوصف، المقارنة، والسرد. والأسئلة المقترحة من أجل الحصول على هذا النموذج نجد:

1. ماذا تحب أن تعرف عن ...؟

2. ماذا تعتقد بشأن الرياضيات؟

3. ماذا تعتقد بشأن ...؟

4. في ماذا تجعلك الرياضيات تفكر؟

5. كيف تصف الرياضيات؟

وفيما يلي بعض انعكاسات التلاميذ عن هذه الأسئلة:

1. ما أحبه أكثر في الرياضيات هو ...

2. الجزء الأكثر صعوبة في هاته الوحدة حول ... هو ...

3. أنا محتاج للمساعدة من أجل ... لأن ...

4. الرياضيات مثل ... لأن ...

5. اليوم، أحسست بـ...

6. أشعر بإحساس جميل عندما ...

النموذج 5: من أجل إيصال التلميذ إلى استحضار تجاربه

هذه الأسئلة والإنعكاسات المرتبطة بها، يمكن أن تساعد التلاميذ على السرد، إنجاز اللوائح، الإختيار، الإستظهار، التسمية، الإيجاد، الوصف، الشرح، والتلخيص. والأسئلة المقترحة لهذا النموذج هي:

1. كيف قمت بحل المسألة؟
2. ماذا فعلت؟
3. ما هي الإستراتيجية التي اتبعت؟
4. ما هي الكلمات الرياضياتية التي استعملتها أو تعلمتها؟
5. ماهي المراحل التي اتبعتها؟
6. هل استراتيجياتك فعالة؟
7. ماذا تعلمت اليوم؟
8. ماذا يعني لك ال... ؟

وانعكاسات التلميذ عن هذه الأسئلة:

1. لقد قمت بحل المسألة بـ...
2. الكلمات التي استعملتها هي ...
3. اتبعت المراحل التالية ...

4. استراتيجياتي تعمل لأن ...

5. التماثل (أو أي مفهوم آخر) هو ...

6. لصديق، سأشرح أن ...

7. أستطيع تقديم الوضعية بواسطة ...

النموذج 6: لإيصال التلميذ إلى التنبؤ بالنتائج، إلى الابتكار ...

هذه الأسئلة والإنعكاسات المرتبطة بها تساعد التلميذ على خلق، تخطيط، تصميم، تكهن، تخيل، إنجاز، تقرير، تبرير، الدفاع، حل، تشكيل، الإطلاع، ومناقشة. والأسئلة المقترحة لهذا النموذج هي:

1. ماذا سيحصل إذا ...؟
2. ما هي القرارات التي ستتخذها بعد الانسجامات التي اكتشفتها؟
3. ما هي الطريقة الأخرى التي يمكنك أن تحل بها المسألة؟
4. هذا سيكون نفس الشيء إذا استعملنا أعدادا مختلفة؟
5. ما هي النماذج التي لها نفس الشكل في القسم؟
6. ما هي النقط المشتركة بين هذا الانسجام وعملية الجمع؟
7. بأي أداة ستقيس هذا ؟ لماذا؟
8. ما هي أوجه الشبه بين عملية الجمع والضرب؟
9. كيف سيمكنك إقناعنا أن ...

وفيما يلي بعض انعكاسات التلميذ عن هذه الأسئلة:

1. من هذا الإنسجام، أعتقد أن ...

2. بهذه الأدوات يمكنني ...

3. هناك تشابه لأن ...

ومن المفيد، في الأخير، اقتراح أسئلة أخرى مفتوحة يمكن أن تساعد التلميذ أكثر على خلق، تخطيط، تصميم، تكهن، تخيل، إنجاز، تقرير، تبرير، الدفاع، حل، تشكيل، الإطلاع، ومناقشة:

1. كيف عرفته؟
2. ماذا ... يمثل ؟
3. كيف عرفت أين ...؟
4. كيف عرفت أي ...؟
5. كيف عرفت متى ...؟
6. هل يمكنك استعمال أدوات مختلفة من أجل ...؟
7. كيف يمكنك أن تأخذ بعض النقط من عملك؟
8. كيف يمكنك أن تأخذ بعض النقط من اكتشافك؟
9. كيف يمكنك أن تشارك اكتشافك؟
10. كيف لك أن تقترب من الإجابة؟
11. كيف برهنت على مقاربتك؟

6.4 التساؤلات والتعلم

ليس المراد من طرح عدة أسئلة على التلاميذ خلال تدبير مقطع تعلمي هو توجيه التلاميذ إلى حل محدد سلفا، بل لمساعدتهم على تحديد الاستدلالات الملائمة لحل المسألة. إن التساؤلات تساعد التلاميذ على رصد العلاقة بين أفكارهم خلال محاولة فهم "المفهوم الرياضي" رغم إمكانية اكتسابهم المعلومة باستحضار تأويلاتهم واستدلالاتهم الخاصة. وللإشارة فإن هناك كمية من المعلومات التي لا يمكن استنتاجها انطلاقا من استدلالات منطقية مباشرة. فمثلا "يمكن للتلميذ بلورة خوارزمية حول جمع عددين ولكن لا يتمكن من إعطاء اسم شكل له خمسة أضلاع". وقد اقترح جيمس هايبرت (J. Hiebert)، في [37]، أربع وضعيات يمكن للأستاذ، من خلالها، تمرير المعلومة للتلميذ:

- التلاميذ يحتاجون إلى رموز كتابية متفق عليها من أجل تمرير استدلالاتهم. مثلا: "كيف يمكن تمثيل كسر؟"، "كيف يمكن كتابة دالة؟"، "كيف يمكن البرهان على أن كمية أكبر من أخرى؟"... والكلمات المرتبطة بحل المسائل التي تتطلب هذه الرموز. مثلا: "مساحة هذا المضلع أكبر من ... !!"، "هذا التعبير أكبر من $\sqrt{n}$" فالتلاميذ لا يمتلكون دائما المصطلحات الضرورية من أجل الإجابة على الأسئلة المفتوحة. مثلا "كيف علمت هذا؟". ونمذجة هذه اللغة ضرورية من أجل خلق شعور وجداني لدى التلاميذ.

- عند تحديد القدرات المنتظرة فإن الأستاذ يمكنه نمذجة طرق متعددة لم يتم اقتراحها من طرف التلاميذ من قبل. فيمكنه القيام بهذا عند

كون الاستراتيجية المعتمدة تساعد التلاميذ على فهم أفضل للفكرة العامة للمسألة، فالاستراتيجية تقدم على أساس أنها إمكانية أخرى وليس كاستراتيجية مفضلة.

- دائما عند تحديد القدرات المنتظرة والكفاية المراد بناؤها، يمكن للأستاذ توضيح المفاهيم الرياضية التي يتم إنتاجها خلال الحلول التي يقدمها التلاميذ. هذه الأخيرة يمكن تحديدها وإظهارها بطرح أسئلة تجعل تمركز انتباه التلاميذ حول هذه المفاهيم. ويمكن للأستاذ القيام بملحوظات حول هذه الأفكار مرئية وضمها إلى لائحة الكلمات أو إلى لائحة استراتيجية القسم.

مثال: يمكن للأستاذ أن يعلق مباشرة على حل التلاميذ، كأن يقول بأن المختصين في الميدان استغلوا استراتيجية "المعلم - الأعداد، أو..." من أجل حل هذا النوع من المسائل. بينما أستاذ آخر يمكنه التركيز على الطريقة المعتمدة من طرف التلاميذ: طبيعة العلاقة بين الجبر والهندسة، بين الجمع والضرب، ...

- دعم سيرورة استطلاع التلاميذ خلال الدرس وكل جزء منه متمركز حول حل المسائل له هدف تعلمي مختلف. كما أن هدف الأسئلة في كل جزء يختلف عن الجزء الآخر وهو مرتبط أساسا بالنتائج المراد التوصل إليها. فإلمام الأستاذ بمفاهيم المقرر والأفكار العامة لها تأثير حول طبيعة الأسئلة التي يجب طرحها وكذلك الوقت الملائم لطرحها.

خلال الممارسة الصفية، فإن الجزء الأول من الدرس يهدف إلى تحضير التلاميذ معرفيا لمواجهة مشكل الدرس وذلك بجعلهم يفكرون في

المفاهيم والاستراتيجيات التي اكتسبوها أو استعملوها سابقا (استحضار وتفعيل المكتسبات)، ويمكن للأستاذ أن يطلب من التلاميذ حل مسائل سهلة وفي المتناول من أجل استحضار المعارف السابقة والاستراتيجيات المألوفة. إن التساؤلات تسمح للأستاذ بتحديد المكتسبات السابقة التي لها علاقة بالمحتوى المدرس وسياق المسألة (الوضعية)؛ وعليه أن ينصت لتلاميذه من أجل تحديد وضع تحضيرهم وملاحظة جميع سلوكاتهم، فالملاحظة المركزة، وقراءة سلوكات التلاميذ في هذه المرحلة تمكن الأستاذ من طرح أسئلة أخرى واستعمال رسائل توجيهية تثير انعكاسات عميقة خلال الدرس بأكمله. فالتلاميذ يتذكرون مكتسباتهم السابقة خلال تنفيذ السيناريو ويحاولون تطبيقها على الوضعية. والحوار السائد خلال الحصة يعتبر فرصة سانحة للتلاميذ من أجل طرح أسئلة مشابهة لتلك التي يطرحها الأستاذ.

عند الانتهاء من حل الوضعية، يتأكد الأستاذ من النتائج وينسق بين التلاميذ لتقاسم أجوبتهم حول المسألة، ويمكنهم في هذا الصدد استحضار استراتيجيات، تقديم أحكام على السبورة، والتقاسم الرياضي، ثم يطرح الأستاذ بعد ذلك أسئلة تساعد على تلخيص المفاهيم الرياضية المنتجة خلال الحل وتحديد الروابط بين الحلول والمفاهيم والاستراتيجيات.

من أجل امتلاك أفكار حول تخطيط الأسئلة الفعالة، فإن أستاذ الرياضيات مطالب بتحديد الفرق بين تخطيط الأسئلة الفعالة ونوعية الأسئلة التي تساعد التلاميذ على الاستدلال. حيث يكون التلميذ قادرا على تحليل حلول زملائه، قادرا على التساؤل حول أفكاره وأفكار زملائه، قادرا على مراقبة الاستدلال الرياضي والقيام بتعميمات مرتبطة بنتائج

التعلم، وبالتالي التمكن من استراتيجيات جديدة وذلك باكتشاف طرق أخرى لحل المسائل.

التساؤلات هي استراتيجية للتعلم، فالأسئلة المفتوحة والمغلقة المرتبطة بالأفكار العامة المستنبطة من المقرر الرسمي ونتائج التعلم توقظ الفضول عند التلاميذ، وتستفز الذاكرة النقدية، وتؤدي إلى انعكاسات، وتساعد التلاميذ على بناء المفاهيم الرياضية بأنفسهم. وكذلك انعكاسات التلاميذ وأجوبتهم تسمح للأستاذ بتقويم معارف التلاميذ وتخطيط المراحل الموالية.

إن اكتساب قدرات لها علاقة بصياغة التساؤلات تستدعي معرفة جيدة للمحتوى، وتتطلب الوقت، والممارسة. ولكي تكون هذه الأسئلة مهيكلة بشكل جيد يجب أن تستدعي الأفكار، وأن تكون ضمن سيرورة معرفية وأن تكون حول موضوع محدد مما سيؤدي حتما إلى تقوية الفهم لدى التلاميذ.

7.4 السيناريو البيداغوجي

من بين التعاريف التي أعطيت للسيناريو البيداغوجي والتي هي أكثر ملائمة، في نظرنا، نجد تعريف روبير بيبو (R. Bibeau) ثم تعريف برسار ودايلي (C. Brassard et A. Daele). فحسب روبير بيبو فإن السيناريو البيداغوجي هو أداة للتوضيح والتواصل تخص مشروعا للتكوين أو لتطوير الأنشطة والتعلمات لدى المتعلمين، على هذا النحو فالسيناريو يصف التخطيط لحدث التعلم الذي نظم لصالح المتعلمين المشار إليهم في سياق

الأنشطة التي سيضطلعون بها (بحث عن معلومات، تشكيل أحكام، تقويم مطالب ، إيجاد حلول، إلخ ...) لتعزيز التعلم.

كما أن السيناريو البيداغوجي يقدم نشاطا علميا طوره مدرس بغرض تأطير تعلمات المتعلمين (قبل، أثناء، وبعد النشاط، مع الإشارة إلى سيرورة الوضعية، والموارد الديداكتيكية، وجذاذات التقويم، إلخ ...). إنه يقدم نهجا لتحقيق الأهداف البيداغوجية واكتساب الكفايات والكفايات المستعرضة المرتبطة بمكون واحد أو أكثر تبعا لشروط ومواصفات البرنامج. وعليه فالسيناريو البيداغوجي يعتبر مشروعا للتعلم بأنشطة تعلمية محددة، حيث يتطلب تنفيذه استدعاء (تعبئة) موارد، كما قد يتطلب مستندات مطبوعة، أو سمعية بصرية أو وسائط متعددة...

أما برسار ودايلي فإنهما يعرفان السيناريو البيداغوجي بأنه نتاج سيرورة تصميم مجموعة مترابطة من الأنشطة التعلمية، موزعة حسب الزمن ونتاجها هو النشاط التعلمي. وكما هو الشأن بالنسبة للشريط السينمائي، فهو مكون من مجموعة مقاطع. حيث يحتوي السيناريو البيداغوجي على القدرات المنتظرة، جدول الأنشطة التعلمية، بعض الموارد والأدوات، وصف لمهام كل من الأستاذ والمتعلمين، شروط التقويم، إلخ ...

ولكي يكون السيناريو البيداغوجي فعالا ومساعدا على التعلم، على الأستاذ أن يراعي في إعداده الأبعاد السبعة عشر، الواردة في [13]، وهذه الأبعاد هي كالتالي:

- البعد 1: تصور التعليم والتعلم؛
- البعد 2: التوجيهات والأهداف؛

- البعد 3: أخذ الأخطاء بعين الاعتبار،
- البعد 4: مرونة المنهاج،
- البعد 5: دور الأستاذ،
- البعد 6: مصادر التحفيز،
- البعد 7: أخذ الفروقات الفردية بعين الاعتبار،
- البعد 8: الإحساس بالفروقات الثقافية،
- البعد 9: مجتمع الممارسة (التلاميذ)،
- البعد 10: التوجيهات والمهام،
- البعد 11: أنشطة المتعلم،
- البعد 12: التعلم التعاوني،
- البعد 13: تقويم التعلمات،
- البعد 14: انخراط أو عدم انخراط المتعلم،
- البعد 15: تدعيم الميتامعرفية،
- البعد 16: تدبير التعلمات،
- البعد 17: تعديل السيناريو وتقويمه.

وخلال إعداد السيناريو وتنفيذه يمكن إيلاء أهمية خاصة لبعد دون الأبعاد الأخرى، كما أن أحد الأبعاد قد يؤثر في الأبعاد الأخرى. ووجبت الإشارة إلى أن تقنيات الإعلام والتواصل تبقى أدوات من أدوات السيناريو البيداغوجي يمكن استحضارها أو الاستغناء عنها حسب

ما تمليه الظروف. ويمكن إجمالا أن نحصر مكونات السيناريو البيداغوجي في خمس مكونات كما يلي:

- المكون الأول: تقديم عام؛
- المكون الثاني: الإطار البيداغوجي والديداكتيكي؛
- المكون الثالث: المستلزمات؛
- المكون الرابع: التحضير القبلي؛
- المكون الخامس: مراحل الإنجاز.

وفي الجدول الآتي سنحاول تفريغ محتوى كل مكون من أجل تسهيل أجرأته:

المكونات	العناصر
المكون الأول تقديم عام:	المادة؛ المستوى؛ الشعبة؛ عدد التلاميذ؛ التاريخ؛ الدرس؛ المقطع؛ المدة الزمنية؛ تصميم المحتوى؛ الأستاذ؛ الموسم الدراسي؛ المؤسسة؛ المديرية الإقليمية.
المكون الثاني الإطار البيداغوجي والديداكتيكي:	الكفاية؛ القدرات المنتظرة؛ الكفايات المستعرضة (ثقافية / تواصلية / منهجية / تكنولوجية...)؛ التوجيهات التربوية؛ الصعوبات المتوقعة؛ التعاقد الديداكتيكي؛ المكتسبات القبلية؛ تعميم النتائج؛ الإمتدادات (إمتدادات المفهوم بالنسبة لدروس مقبلة؛ إمتدادات المفهوم بالنسبة لمواد أخرى؛ إمتدادات المفهوم بالنسبة لمجالات أخرى)؛ التقويم والدعم والمعالجة (أدوات التقويم؛ مدة كل أداة؛ الدعم والمعالجة)؛ إبستمولوجيا.
المكون الثالث المستلزمات:	الأدوات الرقمية؛ مبادئ في المعلوميات؛ الأدوات اللوجيستيكية.
المكون الرابع التحضير القبلي:	القاعة؛ الحواسيب؛ المستنسخات؛ السيناريو المتوقع.
المكون الخامس مراحل الإنجاز:	التشخيص؛ البناء؛ المحتوى؛ التريض؛ التقويم.

أما تنفيذ السيناريو البيداغوجي فيستدعي ثلاث مراحل أساسية هي مرحلة ما قبل التنفيذ، فمرحلة التنفيذ، ثم مرحلة ما بعد التنفيذ.

ففي المرحلة الأولى، والتي تعتبر أساس نجاح الدرس، فإن الأستاذ مطالب بما يلي:

- رسم خطة التنفيذ البيداغوجية (سيرورة أنشطة التعليم والتعلم)؛
- الخطة الزمنية (ضبط الزمن التعلمي المرتبط بكل فقرة)؛
- وضع شبكة للتقويم والتتبع وفق منظومة تقويم شمولية ضمن الجذاذة التربوية؛
- كتابة السيناريو؛
- تجريب عدة التدريس والوسائل؛
- تصور عام للسيناريو البيداغوجي المؤسس لسيرورة الفصل أو الجزء المدرس؛
- تحديد العوائق الديداكتيكية والبحث عن سبل تجاوزها عبر استعمال أمثل لموارد رقمية منتقاة بعناية؛
- تحديد الحاجيات من موارد ومعينات ديداكتيكية (وثائق، صور، موارد رقمية جامدة أو متحركة أو تفاعلية، أجهزة، فضاء ...) وتوفيرها مع فحص مدى سلامتها ...

أما في المرحلة الثانية فيعمل الأستاذ على تنزيل مضامين الجذاذة التربوية (الدرس) ومحتوياتها، منفذا بذلك مراحل السيناريو البيداغوجي.
وفيما يخص المرحلة الثالثة والأخيرة، والتي تعتبر مرحلة تقويمية واستشرافية وتصحيحية، فإن الأستاذ يعمل على رصد ثغرات التنزيل البيداغوجي للسيناريو، وضبط التعلمات والمعارف الجديدة التي يحتاج إليها المتعلمون، وتمثلاتهم التي لم يتعرف عليها من قبل وكذا اهتماماتهم

المختلفة، ثم معرفة الفوارق الفردية بين المتعلمين مما يساعده على هندسة تدخلاته التصحيحية القادمة.

ومن أجل ملاءمة السيناريو البيداغوجي مع الجذاذة التربوية فيجب:

- أن يكون جزءا من الجذاذة التربوية،
- أن يسترجع هدفا أو أهدافا ضمن الفصل أو الجزء،
- أن يحل مشاكل أو عوائق إيبستمولوجية،
- ألا يكون السيناريو البيداغوجي هدفا في حد ذاته،
- ألا يكون معزولا عن الجذاذة التربوية (التقويم والتوزيع الزمني والوثائق)؛
- ألا يشكل حاجزا بين المفاهيم المدرسة بالمعينات الديداكتيكية الكلاسيكية والحديثة،
- ألا يكون عائقا في بناء المناهج التربوية،
- ...

الفصل 5

أمثلة لتدبير دروس

لقد عمدنا إلى تخصيص هذا الفصل لإيراد بعض الأمثلة حول تدبير مقاطع تعليمية من أجل إعطاء أمثلة حية لسيناريوهات بيداغوجية، محاولين الإجابة عما تم التنظير له في الفصول السابقة. ويجب على الأستاذ أن يكون على وعي بأن التلميذ يبني معارفه على مستويين، المستوى الأول أستاذ - متعلم، المستوى الثاني المتعلم - الأقران. وبالتالي يمكن في بعض الحالات تكليف تلميذ بالإجابة عن تساؤل زميل له أو بتعديل إجابته. ويجب على الأستاذ أن يحافظ على موضوعية الأسئلة وحيادها وذلك من خلال الانتباه للتعابير والإشارات الجسدية واللفظية التي قد تعطي معلومات أو انطباعات حول الأسئلة تدفع التلاميذ إلى عدم إعمال تفكير عميق حول المسألة. هذا دون إغفال إعطاء مهلة كافية للتفكير.

خلال تدبير مقطع تعلمي يعمل الأستاذ على تنزيل مكونات السيناريو البيداغوجي بالشكل الذي يراه مناسبا محترما في ذلك الأبعاد السبعة عشر لهندسة السيناريو التي أثارها الباحثان براسار (B. Brassard) ودايلـــي

(A. Daele) في مقالهم [13, ص. 440]. ويتقاسم كل من الأستاذ والتلميذ الأدوار حسب النشاط المعتمد في كل مرحلة، ويتم غالبا تفريغ هذه الأدوار كما سبقت الإشارة إلى هذا حسب الجدول التالي:

المرحلة	دور الأستاذ	دور المتعلم
التشخيص: تشخيص المكتسبات السابقة الضرورية لبناء المفهوم الجديد.	طرح مجموعة من الأسئلة الشفوية والكتابية على المتعلمين من أجل التعرف على مدى تمكن التلاميذ من المكتسبات السابقة الضرورية لبناء المفهوم الجديد؛ السماح للمتعلمين بالتعبير عن آرائهم والإفصاح عن تمثلاتهم؛...	تدوين النشاط في دفتر الدروس؛ الاجابة في دفتر البحث؛ الاجابة على أسئلة الاستاذ؛ الانتباه للأمثلة والأمثلة المضادة التي المقدمة؛ الاستماع الى المعلومات التي المقدمة؛ طرح بعض الاسئلة بخصوص هذه المعلومات؛...
البناء: النشاط التحفيزي: ابراز المشكل وتحفيز المتعلمين. النشاط البنائي: وضعية مسألة (نشاط استقرائي أو استكشافي)، تستدعي استحضار الموارد السابقة والتي ستساهم في بناء المفهوم الجديد ويمكن تصنيف أسئلة هذا النشاط من استحضار القديم إلى بناء الجديد.	طرح مجموعة من الأسئلة التحفيزية على المتعلمين قبل التطرق للمفهوم الجديد، والهدف من ذلك تحسيس التلميذ أن معارفه ومكتسباته القبلية غير كافية للإجابة على هذه الأسئلة؛ التوجيه وتبسيط معطيات النشاط إذا دعت الضرورة إلى ذلك؛ الانطلاق من أجوبة المتعلمين لبناء المفهوم الجديد؛ يمكن أن يطلب الأستاذ من المتعلم أمثلة توضح المفهوم الجديد؛	تدوين النشاط في دفتر الدروس؛ الاجابة في دفتر البحث؛ الاجابة على أسئلة الاستاذ؛ الانتباه للأمثلة والأمثلة المضادة التي سيقدمها الاستاذ؛ الاستماع الى المعلومات التي سيقدمها الاستاذ؛ طرح بعض الاسئلة بخصوص هذه المعلومات. توظيف مكتسباته القبلية للإجابة على هذا النشاط؛ احترام آراء الزملاء، وقبول النقد البناء؛...

	مراقبة بحث المتعلمين والأجوبة على السبورة؛ تمارين وأمثلة تهدف الى الاستئناس وتمكين المتعلمين من المفهوم الجديد وخاصياته والتعامل معها وإعادة استثمارها من أجل ترسيخها؛ عرض بعض المعلومات ولمحة تاريخية وامتدادات المفهوم الجديد من أجل تبيان أهمية المفهوم وإعطاء معنى للتعلمات الجديدة؛...		
التقويـم: مسائـل تهدف الى قياس مدى اكتساب المتعلمين للقدرات المنتظرة؛ من أجل الوقوف على التعثرات واستثمارها في حصص الدعم والمعالجة.	مراقبة بحث المتعلمين والأجوبة على السبورة؛ طرح أسئلة توجيهية تمكن المتعلم من ايجاد الحل.	الإجابة في دفتر البحث؛ الانتباه أثناء الحل على السبورة؛ كتابة الحلول في دفاتر التمارين.	

1.5 المثال الأول

في هذا المثال سنقترح طريقة لتقديم مقطع من درس "الدوال العددية" بالجذع المشترك العلمي.

♦ **تقديم عام:**

الأستاذ:
الموسم الدراسي:
المؤسسة:
المديرية الإقليمية:
المادة: الرياضيات
المستوى: الجذع المشترك
شعبة: العلوم
عدد التلاميذ: 24

التاريخ:
الدرس: الدوال العددية
المقطع: القيم القصوى والقيم الدنيا لدالة
المدة الزمنية: ساعتان
محتوى المقطع التعليمي:
-تعريف القيم القصوى والقيم الدنيا لدالة.

♦ **الإطار البيداغوجي والديداكتيكي:**

• القدرات المنتظرة:

– استنتاج القيم القصوى والدنيا انطلاقا من التمثيل المبياني؛

– التعبير عن وضعيات مستقات من الواقع أو من مواد أخرى باستعمال مفهوم دالة.

• الكفايات المستعرضة:

– استعمال معطيات مبيانية؛
– التحليل؛
– التواصل؛

- التعامل مع الحاسوب؛
- ...

- التوجيهات التربوية:

- لتقريب مفهوم الدالة والتمثيل المبياني لها يمكن الاستئناس في حدود الإمكان ببعض البرانم المعلوماتية المدمجة في الحاسوب التي تمكن من إنشاء منحنيات الدوال، كما يمكن الانطلاق من وضعيات مختارة من الهندسة والفيزياء والاقتصاد والحياة العامة؛
- ينبغي تدريب التلاميذ على ترييض الوضعيات وحل مسائل متنوعة أثناء تناول القيم الدنيا والقيم القصوى لدالة؛
- تعتبر جميع الدوال الواردة في هذا الفصل إلى جانب دالة الجيب وجيب التمام دوالا مرجعية؛
- يمكن استعمال الآلة الحاسبة العلمية في تحديد الصور أو الآلة الحاسبة القابلة للبرمجة لإنشاء المنحنيات إن كان ذلك ممكنا (أوالإشارة إلى ذلك)؛
- يمكن اقتراح مسائل تؤدي إلى معادلات يصعب حلها جبريا وتحديد حلول مقربة لها مبيانيا.

- الصعوبات المتوقعة:

- الانتقال إلى التجريد؛
- تغيير الإطار؛
- ...

- التعاقد الديداكتيكي:

- قبل الشروع في دراسة أية دالة يجب تحديد مجموعة تعريفها؛
- استعمال الروابط في التحرير على اعتبار أن الرياضيات نصوص أيضا وليست رموزا فقط؛

- اعتماد العمل الفردي أو في مجموعات في حل الوضعيات ثم الانتقال إلى النقاش الجماعي؛
- ضرورة مشاركة الكل في جميع مراحل الدرس؛
- ضرورة تحديد المجال عندما نتكلم عن قيمة قصوى أو قيمة دنيا لدالة؛
- كتابة الأنشطة في دفتر التمارين؛
- كتابة ملخص الدرس في دفتر الدروس؛
- عدم تدوين أي شيء على الدفاتر إلا بإذن من الأستاذ؛
- حسن الإنصات سواء من طرف الأستاذ أو من طرف التلاميذ؛
- توفر كل تلميذ على الأدوات الهندسية ودفتر للبحث.
- استعمال السبورة:
  * تقسم السبورة إلى أربعة أجزاء؛
  * تخصيص الجزء الأيمن لتدوين التعاريف والخاصيات؛
  * تخصيص الأجزاء الثلاثة المتبقية لحل المسألة مع رسم الأشكال على الجزء الأيسر؛
  * تخصيص الجزئين الخلفيين لكتابة نصوص المسائل والتمارين؛
  * الكتابة بخط واضح على السبورة؛
  * في حالة عدم تواجد السبورة الخشبية (العادية) يمكن للأستاذ أن يعتمد تقسيما مناسبا للسبورة الموجودة مع احترام ما يتفق عليه.

• المكتسبات السابقة:
- دالة عددية لمتغير حقيقي ومجموعة تعريفها؛
- التمثيل المبياني لدالة عددية؛

- تغيرات دالة عددية؛
- مبرهنة طاليس المباشرة.

• تعميم النتائج: أمثلة تحتوي على براميتر (un paramètre).

• الامتدادات:
- امتدادات المفهوم بالنسبة لدروس مقبلة:
* درس الشلجم - الهد لول؛
* الدوال العددية: السنة الأولى والثانية بكالوريا.
- امتدادات المفهوم بالنسبة لمواد أخرى:
* الفيزياء: معادلة المسار ودراسة حركة الأجسام.
- امتدادات المفهوم بالنسبة لمجالات أخرى:
* الاقتصاد: دراسة تطور بيع منتوج، ...
* الطب: دراسة تطور عدد المواليد، عدد الوفيات، ...
* الصناعة: الصناعة الحربية، ...

• التقويم والدعم والمعالجة:
- أدوات التقويم:
* بطاقات التقويم: بطاقات تتضمن نسبة التلاميذ الذين انخرطوا في الدرس في كل مرحلة ومؤشرات يمكنها قياس التمكن من القدرات المنتظرة وتساعد على رصد الأخطاء، كما تتضمن ملاحظات الأستاذ حول مراحل الدرس والتدخلات غير المناسبة والتي قد توقظ تمثلات تحول دون نجاح الحصة أو تعمل على إنتاج عوائق قد تعرقل بناء المعرفة من أجل استغلالها في الدعم والمعالجة وتعديل السيناريو في المستقبل؛
* أسئلة شفوية تتصدر وتتخلل مختلف فقرات الدرس؛

* الوثيقة رقم 2.

- الدعم والمعالجة:

* دعم فوري؛

* استحضار الأخطاء الشائعة والأخطاء المتوقعة؛
* التمرين 35 من الكتاب المدرسي (النجاح في الرياضيات)؛
* التمرين 44 من الكتاب المدرسي (النجاح في الرياضيات).

• إبستمولوجيا:

من أهم العوائق الابستمولوجية في هذا المقطع نجد قواعد الترتيب حيث سيعجز التلميذ في الكثير من الأحيان على البرهنة، ونستحضر هنا "المفاهيم المشتركة" والتي كانت تترجم ب "مسلمة" ونذكر هنا:

"Les choses égales à une même chose sont aussi égales entre elles"

"Et si à des choses inégales des choses égales sont ajoutées, les touts sont inégaux"

"Et les choses qui s'ajustent les unes sur les autres sont égales entre elles"

"Et le tout est plus grand que la partie"

وللمزيد من التفصيل، يمكن للقارئ أن يطلع على [31]. ثم التمثل حول العدد السالب حيث أنه بالنسبة للتلميذ حينما نتكلم عن القيمة القصوى فنحن بالضرورة نتكلم عن عدد موجب. ولتسليط الضوء أكثر على العائق والصعوبة والأعراض المتعلقة بالأعداد السالبة نحيل القارئ على [34]...

♦ **المستلزمات:**

• الأدوات الرقمية:

- حاسوب خاص بالأستاذ،
- حاسوب لكل تلميذ،
- عارض؛
- برنام خاص بالرياضيات *Geogebra*.

• مبادئ في المعلوميات:

- الإلمام بمبادئ أولية في المعلوميات؛
- الإلمام بمبادئ أولية لبرنام *Geogebra*.

• الأدوات اللوجيستيكية:

- الأدوات الهندسية (مسطرة، كوس، بركار).

♦ **التحضير:**

• القاعة: يتم التنسيق مع إدارة المؤسسة من أجل استغلال القاعة متعددة الوسائط.

• الحواسيب: يتم تفقد العدة في اليوم السابق.

• المستنسخات: في هذا المقطع من الدرس يحتاج الأستاذ إلى وثيقتين:

- وثيقة رقم 1: و تنسخ في 24 نسخة حيث تتضمن ثلاث أنشطة.
  - نشاط 1: من أجل التشخيص،

- نشاط 2: وضعية مسألة لبناء المفهوم،

- نشاط 3: وضعية مسألة وسيطية تساعد في حل الوضعية المسألة السابقة؛

- وثيقة رقم 2: تتضمن تمثيلات مبيانية لأربع دوال وتمرين، حيث يتم نسخها في 24 نسخة.

• السيناريو: تحضير السيناريو المتوقع (أنظر أسفله).

◆ **المراحل:**

• **التشخيص** (حوالي $15\ min$)

نشاط 1: (أنظر الوثيقة رقم 1).

إيضاحات: يوزع الأستاذ على التلاميذ الوثيقة رقم 1 ويطلب من التلاميذ إلصاقها بدفتر التمارين ثم الإجابة على النشاط 1.

• **البناء** (حوالي $50\ min$)

نشاط 2: (أنظر الوثيقة رقم 1).

نشاط 3: (أنظر الوثيقة رقم 1).

إيضاحات: يطلب الأستاذ من التلاميذ الإجابة على النشاط 2. غير أن التلميذ، وباستعمال مكتسباته، وبعد محاولاته لن يتمكن من حل الوضعية بالشكل المطلوب بحيث يحس باحتياجه إلى مفهوم جديد وهذا ما يصطلح عليه بمرحلة اللاتوازن معرفي عند بياجي. وهنا يتدخل الأستاذ من أجل توجيه التلاميذ إلى الإجابة على النشاط الثالث والذي هو عبارة عن مسألة وسيطية ستساعد على حل هذه الوضعية المسألة ومنه بناء المفهوم الجديد.

• المحتوى (حوالي $15\ min$)

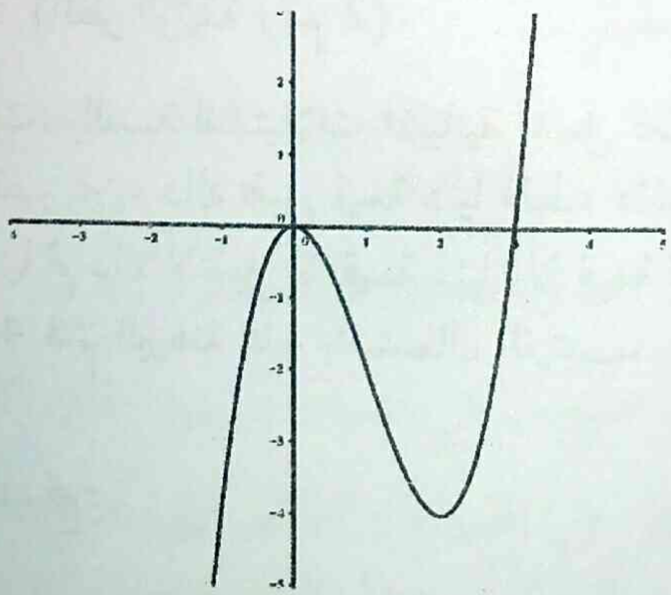
القيم القصوى والقيم الدنيا لدالة.

تعريف : لتكن f دالة عددية و I مجالا ضمن مجموعة تعريفها و $a \in I$.

- نقول إن $f(a)$ هي القيمة القصوى للدالة f على I إذا وفقط إذا كان: $f(a) \geqslant f(x)$ لكل x من I.

- نقول إن $f(a)$ هي القيمة الدنيا للدالة f على I إذا وفقط إذا كان: $f(a) \leqslant f(x)$ لكل x من I.

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x) = x^3 - 3x^2$، و (C_f) تمثيلها المبياني في معلم متعامد ممنظم.



من خلال الشكل نستنتج أن:

- الدالة f تقبل 0 كقيمة قصوى على المجال $]-1;3[$ عند النقطة 0.

- الدالة f تقبل -4 كقيمة دنيا على المجال $]-1;3[$ عند النقطة 2.

إيضاحات: تتم صياغة التعريف بشكل جماعي، ثم تدوينه على السبورة. بعد ذلك يكتب الأستاذ الدالة الموجودة في المثال على السبورة ثم يطلب من التلاميذ استخراج المطاريف من الشكل حيث يمكن استعمال برنام $Geogebra$ لرسم منحنى الدالة وذلك من

أجل ربح الوقت. بعد ذلك يطلب الأستاذ من التلاميذ تدوين المحتوى (التعريف والمثال) في دفتر الدروس.

- **الترييض** (حوالي $15\ min$)

تمرين 1: (أنظر الوثيقة رقم 1).

تمرين 2: (أنظر الوثيقة رقم 1).

- **التقويم** (حوالي $15\ min$)

تمرين 3: (أنظر الوثيقة رقم 2).

تمرين 4: (أنظر الوثيقة رقم 2).

إيضاحات: بالنسبة للتمثيلات المبيانية تشمل عدة أنواع: دالة تقبل قيمتين قصويتين، دالة تقبل قيمة دنيا فقط، دالة تقبل قيمة قصوى وقيمة دنيا ثم دالة لاتقبل لا قيمة دنيا ولا قيمة قصوى. أما بالنسبة للتمرين 4 فتتم البرهنة عليه باستعمال الترتيب.

◆ **السيناريو المتوقع:**

(1) التشخيص (حوالي $15\ min$):

يقوم الأستاذ بطرح أسئلة شفوية بشكل مركز ومباشر قصد التحقق من بعض المكتسبات القبلية. في هذه المرحلة فإننا نتوقع السيناريو التالي والذي ينتج عن تدخلات الأستاذ واستجابات التلاميذ أو العكس وذلك بعد أن يكون التلاميذ قد أجابوا عن النشاط 1 في دفتر البحث.

1. التلميذ: مجموعة تعريف الدالة f هي: $D_f = [1;\ +\infty[$.

الأستاذ: ما هي صورة 1 بالدالة f وكذلك يمكن أن يطلب الأستاذ من التلاميذ حساب صور 0؛ (-1) و 5 وذلك من أجل تثبيت مفهوم مجموعة تعريف دالة.

2. التلميذ: عدم التوفيق في إعطاء تعريف الدالة ومجموعة تعريفها بدقة.

الأستاذ:

- تعريف الدالة: الدالة هي كل علاقة f من مجموعة A، تسمى مجموعة الإنطلاق، نحو مجموعة B، تسمى مجموعة الوصول، حيث تربط كل عنصر من مجموعة الانطلاق بعنصر على الأكثر من مجموعة الوصول.

- إعطاء مثال بسيط لدالة، ثم التذكير بتعريف الدالة العددية والدالة العددية لمتغير حقيقي.

- تعريف مجموعة تعريف دالة: هي مجموعة العناصر من مجموعة الانطلاق والتي لها صورة بالدالة.

- الرجوع للمثال السابق لتحديد مجموعة التعريف.

3. التلميذ: الجواب صحيح، لكن الصياغة تعتريها بعض النقائص.

الأستاذ: التركيز على الصياغة، التركيز على أنه يستعمل في هذا المستوى تعريف الرتابة أو معدل التغيرات لدراسة تغيرات دالة وذلك باستعمال درس الترتيب وعلى أنه في المستويات القادمة سيتم التعرف على وسائل أخرى أكثر نجاعة.

4. التلميذ: الإجابة صحيحة لكن غياب الإشارة لشروط مبرهنة طاليس وكذلك عدم الاعتناء بالشكل (عدم استعمال الوسائل الهندسية).

الأستاذ:

- التركيز على التمثيل الجيد للشكل؛

- التذكير بمبرهنة طاليس المباشرة مع التركيز على ضرورة التأكد من الشروط قبل استعمال التعريف أو الخاصية أو المبرهنة.

(2) البناء (حوالي $50\ min$):

يطلب الأستاذ من التلاميذ الإجابة على النشاط 2 ويمهلهم.

غير أن التلميذ، باستعمال مكتسباته، وبعد محاولاته لن يتمكن من حل الوضعية بالشكل المطلوب بحيث يحس باحتياجه إلى مفهوم جديد وهذا ما يصطلح عليه بمرحلة اللاتوازن معرفي عند بياجي. وهنا يتدخل الأستاذ من أجل توجيه التلاميذ إلى الإجابة على النشاط الثالث والذي هو عبارة عن مسألة وسيطية ستساعد على حل هذه الوضعية المسألة وبالتالي بناء المفهوم الجديد.

بعد قراءة المسألة يطلب منهم فتح الحاسوب ثم فتح المشروع 1 (الذي ينجزه الأستاذ مسبقا باستعمال برنام *Geogebra* والذي يعطي مساحة المستطيل حسب تغير موضع النقطة P).

1. الأستاذ: ما هي مساحة المثلث ABC؟

التلميذ: مساحة المثلث هي: $250\ m^2$.

2. الأستاذ: ما هي مساحة المسكن؟

التلميذ: مساحة المسكن هي: $AP \times AM$.

3. الأستاذ: هل يمكن أن تكون المساحة القصوية للمسكن هي مساحة المثلث؟

التلميذ: لا.

4. الأستاذ: ماذا تلاحظون بالنسبة لمساحة المسكن عندما يتم تحريك النقطة P على القطعة $[AB]$؟

التلميذ: هل النقطة P ثابتة أم متحركة؟

التلميذ: ماذا نقصد بنقطة متحركة؟

الأستاذ: يوضح للتلاميذ في الشكل المسلط على الحائط أن P توجد على القطعة $[AB]$ ويمكن أن نحركها على القطعة.

التلميذ: عندما تتحرك P على القطعة $[AB]$ نلاحظ أن المساحة تتغير.

5. الأستاذ: ماذا تلاحظون بالنسبة لمساحة المسكن عندما تكون المسافة AP أكبر من 10؟

التلميذ: عندما تكون المسافة AP أكبر من 10 فإن مساحة المسكن تصغر.

6. الأستاذ: ما هو أفضل موقع للنقطة P لكي تكون مساحة المسكن قصوية؟

التلميذ: عندما تكون P على القطعة $[AB]$ بحيث تكون المسافة AP تساوي 10.

7. الأستاذ: من يضع لنا مظنونة؟

التلميذ: ماهي المظنونة؟

الأستاذ: هي استنتاج أو خاصية يمكن استخلاصها انطلاقا من تجربة أو توقع، ولكي يتم اعتمادها يجب البرهنة عليها.

التلميذ: يحاول إعطاء صيغة، وبعد نقاش يتم التوافق على صيغة موحدة.

8. الأستاذ: جيد، الآن سأقوم بتحريك النقطة P من جديد، ماذا تلاحظون بالنسبة للنقطة Q؟

التلميذ: النقطة Q تتحرك أيضا عندما تتحرك النقطة P.

9. الأستاذ: ماذا يمثل مسارها؟

التلميذ: نلاحظ أن مسار النقطة Q عبارة عن خط متقطع، لماذا لا يكون متصلا؟

التلميذ: مسارها عبارة عن نقط متقطعة.

الأستاذ: يعمل على توضيح أنه يطلب المنحنى أو المسار الذي يقترب من النقط المتقطعة. بعد ذلك يطلب منهم تحديد أقصى موقع للنقطة Q.

التلميذ: أقصى موقع للنقطة Q يوافق موقع النقطة P بحيث $AP = 10$.

10. الأستاذ: ما هي مساحة المسكن الموافقة لهذا الموقع؟

التلميذ: مساحة المسكن الموافقة لهذا الموقع هي: $125\ m^2$.

11. الأستاذ: من يصوغ لنا مظنونة عن المساحة القصوية للمسكن وموقع النقطة P الموافقة لها؟

التلميذ: أقصى مساحة للمسكن هي $125\ m^2$ وتوافق موقع النقطة P حيث $AP = 10\ m$.

12. الأستاذ: ننسب المستوى إلى معلم متعامد ممنظم $(A, \vec{i}, \vec{j})$ حيث $\vec{i}$ متجهة موجهة للمستقيم (AB) و $\vec{j}$ متجهة موجهة للمستقيم (AC) ثم نضع $AP = x$ و $s(x)$ مساحة المستطيل $AMNP$.

التلميذ: لماذا لا نعتبر AM هي x؟

الأستاذ: يمكن أن نأخذ AM هي x وسنجد نفس النتائج، يكفي أن نغير المعلم.

بعد ذلك ومن أجل البرهنة الرياضية يصوغ الأستاذ الأسئلة التالية:

(ا) حدد المسافة PN بدلالة x.

(ب) عرف الدالـة s (مجموعة الانطلاق، مجموعة الوصول، مجموعة التعريف ثم الصيغة).

(ج) تحقق أن: $\frac{5}{4}(x-10)^2 + s(x) = 125$.

(د) استنتج أن: $(\forall x \in]0, 20[); \quad s(x) \leqslant 125$.

(ه) أحسب $s(10)$ ثم استنتج المساحة القصوى و بعدي المسكن الذي له أقصى مساحة.

(و) باستعمال البرنام ارسم منحنى الدالة s. ماذا تلاحظ ؟

(ز) لتكن S مساحة الجزء المتبقي من البقعة الأرضية (الجزء الملون بالأخضر). قم بتحريك النقطة P على القطعة $[AB]$ ولا حظ تغيرات مساحة الجزء المتبقي. ثم تظنن المساحة الدنيا للجزء المتبقي.

(ح) بين أن: $S(x) = 125 + \frac{5}{4}(x-10)^2$.

(ط) استنتج أن: $S(x) \geqslant 125$. وأن أصغر قيمة للمساحة $S(x)$ هي $125\ m^2$.

وفي الأخير يعطي الأستاذ لمحة عن دراسة مطاريف دالة عددية وأهميتها في عدة مجالات (الاقتصاد، التسيير، دراسة بعض الظواهر الطبيعية...).

يتم بعد ذلك، وبتوجيه من الأستاذ، الاتفاق على صيغة التعريف وتتم كتابته على السبورة. ثم يعطي الأستاذ مثالا على أن يشرك التلاميذ في إيجاد مطاريف الدالة. وفي الأخير يطلب الأستاذ من التلاميذ تدوين التعريف والمثال في دفاتر الدروس.

(3) **التريض** (حوالي $15\ min$):

تمرين 1: يقوم التلاميذ باستعمال البرنام لرسم منحنى الدالة f ثم استنتاج القيمة القصوى لهذه الدالة.

تمرين 2: تعطى مهلة للتلاميذ من أجل الإجابة في دفاتر بحثهم ثم يتم التصحيح على السبورة.

(4) **التقويم** (حوالي $15\ min$):
وثيقة رقم 2:
تمرين 3: (التمثيلات المبيانية).
تعطى مهلة للتلاميذ من أجل الإجابة في دفاتر البحث ثم يتم بعد ذلك التصحيح في المستنسخ.
تمرين 4: تعطى مهلة للتلاميذ من أجل الإجابة في دفاتر البحث ثم يتم بعد ذلك التصحيح على السبورة.

وثيقة رقم 1:

نشاط 1:

1. ما هي مجموعة تعريف الدالة العددية التالية: $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x-1}}$.

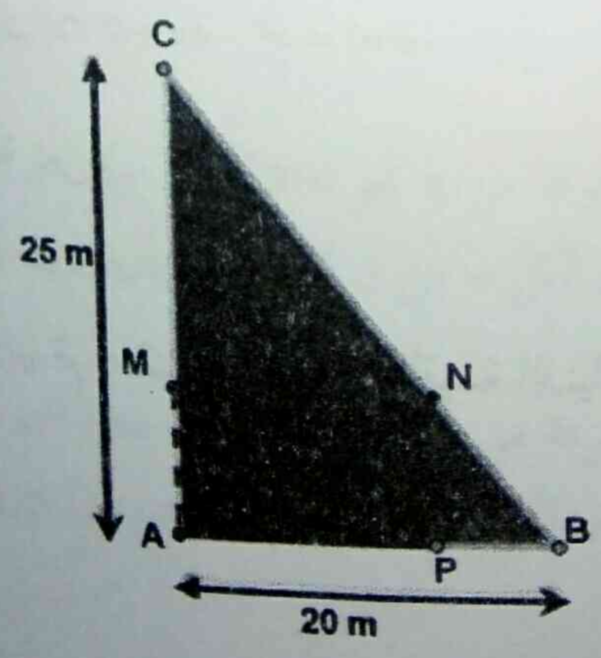
2. إعط تعريف الدالة ثم عرف مجموعة تعريفها؟

3. أدرس تغيرات الدالة g المعرفة ب $g(x) = x^2 - 2x + 3$، ثم مثلها في معلم متعامد ممنظم.

4. ABC مثلث حيث $AB = 4\ cm$ و $AC = 6\ cm$. M نقطة من القطعة $[AB]$ و N نقطة من القطعة $[AC]$ حيث $AM = 3\ cm$.

   إذا علمت أن $(BC) \parallel (MN)$، فاحسب المسافة CN.

نشاط 2: يملك شخص بقعة أرضية على شكل مثلث ABC قائم الزاوية في A. ويريد بناء مسكن على بقعة مستطيلة الشكل $AMNP$ بحيث تكون لها أكبر مساحة.



أحسب المساحة القصوى للمسكن والمساحة الدنيا للجزء المتبقي من البقعة الأرضية.

نشاط 3: (التجربة والتظنن).
قم بفتح المشروع 1 على الحاسوب

1. قم بتحريك النقطة P على القطعة $[AB]$ ولاحظ تغيرات مساحة المسكن، ثم تظنن المساحة القصوية الممكنة للمسكن.
2. لتكن النقطة Q ذات الأفصول AP وذات الأرتوب المساوي لمساحة المسكن (لاحظ المشروع 1).
3. قم بتحريك النقطة P ثم لاحظ سلوك النقطة Q. ماذا يمثل مسار النقطة Q.
4. تظنن مرة أخرى المساحة القصوية للمسكن.

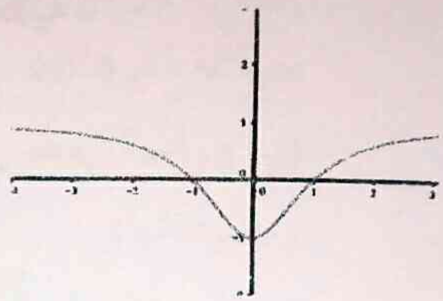
تمرين 1: باستعمال البرنام قم برسم منحنى الدالة $f(x) = -\frac{x^2}{10} + 8$، ثم استنتج القيمة القصوى لهذه الدالة.

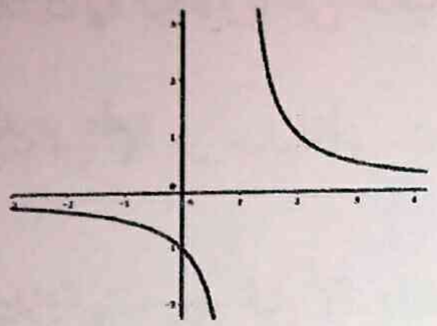
تمرين 2: نعتبر الدالة: $g(x) = x^2 - 4x + 7$.

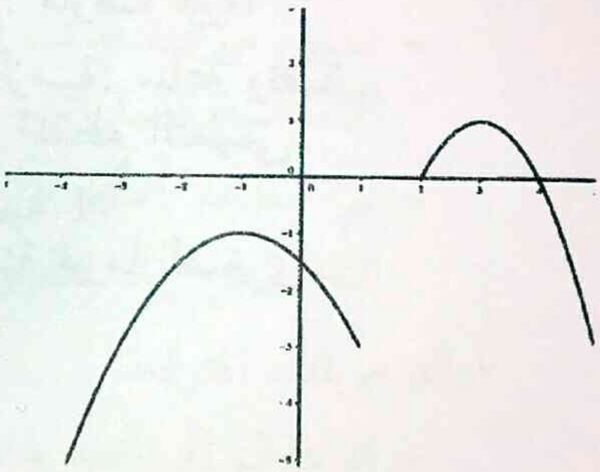
1. حدد مجموعة تعريف الدالة g.
2. تحقق أن $(\forall x \in \mathbb{R}); \quad g(x) \geqslant 3$.
3. أحسب $g(2)$ ثم استنتج أن 3 هي القيمة الدنيا للدالة g على D_g.

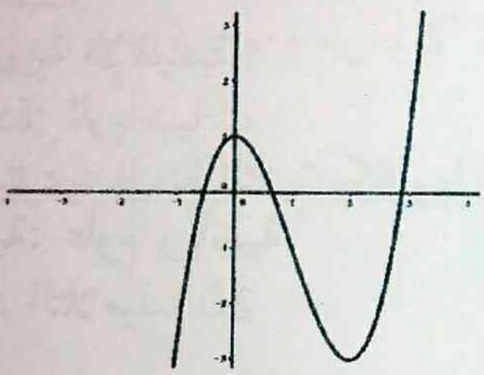
وثيقة رقم 2:

تمرين 3: (تمثيلات مبيانية لأربع دوال عددية).









تمرين 4:

1. لتكن f دالة معرفة من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$ ب: $f : x \mapsto x^2 - 4x + 9$.
بين أن $f(x) \geqslant 5$ لكل x من $\mathbb{R}$ ثم استنتج أن الدلة f تقبل قيمة دنيا على $\mathbb{R}$.

2. لتكن g دالة معرفة من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$ ب: $g : x \mapsto -4x^2 + 4x + 5$.
بين أن $g(x) \leqslant 6$ لكل x من $\mathbb{R}$ ثم استنتج أن الدلة g تقبل قيمة قصوى على $\mathbb{R}$.

2.5 المثال الثاني

في هذا المثال سنقترح طريقة لتقديم مقطع من درس "الحسابيات" بالسنة الثانية بكالوريا من شعبة العلوم الرياضية.

- **تقديم عام:**

الأستاذ:
الموسم الدراسي:
المؤسسة:
المديرية الإقليمية:
المادة: الرياضيات
المستوى: السنة الثانية بكالوريا
شعبة: علوم رياضية
عدد التلاميذ: 20

التاريخ:
الدرس: الحسابيات
المقطع: **مبرهنة فيرما**
المدة الزمنية: ساعة ونصف
محتوى المقطع التعليمي:
- خاصية 1.
- مبرهنة فيرما الصغرى.

- **الإطار البيداغوجي والديداكتيكي:**

• القدرات المنتظرة:

- القدرة على توظيف الموافقة بترديد n؛
- القدرة على توظيف مبرهنة كوص $Gauss$.

• الكفايات المستعرضة:

- التحليل؛
- التواصل؛
- التعامل مع الحاسوب؛
- ...

• التوجيهات التربوية:

- يتم توليف المكتسبات التي سبق التطرق لها في الجذع المشترك العلمي والسنة الأولى من شعبة العلوم الرياضية؛
- ينبغي التركيز على الدقة في البراهين والوضوح في التعبير عند صياغة البرهان؛
- تتم دراسة بعض الخوارزميات (أقليدس، ايراتوستين...)، وتطبيقاتها؛
- تتم البرهنة على أن مجموعة الأعداد الأولية غير منتهية؛
- ينبغي دراسة بعض المعادلات الديوفانتية؛
- تطبيق مبرهنة فيرما، ومبرهنة كوص، ومبرهنة بوزو، والمبرهنة الأساسية للحسابيات؛
- تتم معالجة أمثلة من وضعيات التشفير من خلال تمارين للتحسيس بهذا المفهوم.

• الصعوبات المتوقعة:

- الانتقال إلى التجريد؛
- قابلية القسمة والموافقة بترديد؛
- صعوبة تناول الأعداد السالبة في الموافقة بترديد؛
- التمثل حول صنف عدد؛
- ...

• التعاقد الديداكتيكي:

- استعمال الروابط في التحرير على اعتبار أن الرياضيات نصوص أيضا وليست رموزا فقط؛
- اعتماد العمل الفردي أو في مجموعات في حل الوضعيات ثم الانتقال إلى النقاش الجماعي؛

- ضرورة مشاركة الكل في جميع مراحل الدرس؛
- عدم التأكد من شرط أو أكثر خلال تطبيق خاصية أو مبرهنة أو تعريف يعتبر برهانا غير كامل (ولو أن النتيجة صحيحة)؛
- الأدوات المنطقية (وضع تكافؤ محل استلزام يعتبر خاطئا في الحالة التي يكون فيها الاستلزام العكسي خاطئا ويعتبر غير كامل في الحالة الأخرى)؛
- الخلط بين العطف المنطقي والفصل المنطقي يعتبر أمرا غير مسموح به؛
- كتابة الأنشطة في دفتر التمارين؛
- كتابة ملخص الدرس في دفتر الدروس؛
- عدم تدوين أي شيء على الدفاتر إلا بإذن من الأستاذ؛
- حسن الإنصات سواء من طرف الأستاذ أو من طرف التلاميذ؛
- احترام آراء الزملاء واحترام آراء التلاميذ من طرف الأستاذ؛
- إمكانية مناقشة آراء واقتراحات الأستاذ؛
- توفر كل تلميذ على الأدوات الهندسية ودفتر للبحث؛
- احترام الوقت وعدم قبول أي تلميذ التحق بعد مرور 5 دقائق؛
- استعمال السبورة:
  * تقسم السبورة إلى أربعة أجزاء؛
  * تخصيص الجزء الأيمن لتدوين التعاريف والخاصيات؛
  * تخصيص الأجزاء الثلاث المتبقية لحل المسألة؛
  * الكتابة بخط واضح على السبورة؛

* في حالة عدم تواجد السبورة الخشبية (العادية) يمكن للأستاذ أن يعتمد تقسيما مناسبا للسبورة الموجودة مع احترام ما يتفق عليه.

• المكتسبات السابقة:

- حدانية نيوتن؛
- البرهان بالترجع؛
- الموافقة بترديد؛
- الأعداد الأولية.

• تعميم النتائج: مؤشر أولير.

• الامتدادات:

- امتدادات المفهوم بالنسبة لدروس مقبلة:
  * نظمات العد؛
  * البنيات الجبرية.
- امتدادات المفهوم بالنسبة لمواد أخرى:
  * الإعلاميات.
- امتدادات المفهوم بالنسبة لمجالات أخرى:
  * التشفير؛
  * الحماية.
  * ...

• التقويم والدعم والمعالجة:

- أدوات التقويم:
  * بطاقات التقويم: بطاقات تتضمن نسبة التلاميذ الذين انخرطوا في الدرس في كل مرحلة ومؤشرات يمكنها قياس التمكن من القدرات المنتظرة وتساعد على رصد الأخطاء، كما تتضمن

ملاحظات الأستاذ حول مراحل الدرس والتدخلات غير المناسبة والتي قد توقظ تمثلات تحول دون نجاح الحصة أو تعمل على إنتاج عوائق قد تعرقل بناء المعرفة من أجل استغلالها في الدعم والمعالجة وتعديل السيناريو في المستقبل؛

* أسئلة شفوية تتصدر وتتخلل مختلف فقرات الدرس؛
* تمرين (الوثيقة المرفقة).

- الدعم والمعالجة:
  * دعم فوري؛
  * استحضار الأخطاء الشائعة والأخطاء المتوقعة؛
  * تحضير وضعيات متنازعة.

• إبستمولوجيا: يشير الأستاذ إلى بناء المجموعة $\mathbb{N}$ من طرف العالم الإيطالي بيانو (G. Peano [1858-1932]) وكذلك المجموعة $\mathbb{Z}$، ويشير إلى أن العدد السالب لم يتم إرساؤه إلا بعد مرور أربعة عشر قرنا (أنظر العائق الابستمولوجي). وأن خاصيات المجموعة $\mathbb{Z}$ يمكن تعميمها، وأنها لعبت دورا هاما في حل مسائل عمرت كثيرا في عالم الرياضيات وعلى رأسها معادلة العالم الفرنسي بيير فيرما (P. Fermat [1601-1665]) كما أن مفهوم الموافقة بترديد تم إدخاله من طرف العالم الألماني غوص (C. F. Gauss [1777-1855]) سنة 1801...

- **المستلزمات:**

  - الأدوات الرقمية:

    - حاسوب خاص بالأستاذ؛
    - 5 حواسيب يحضرها بعض التلاميذ؛
    - عارض؛
    - برنام خاص بالرياضيات *PARI*.

  - مبادئ في المعلوميات:

    - الإلمام بمبادئ أولية في المعلوميات؛
    - الإلمام بمبادئ أولية لبرنام *PARI*.

  - الأدوات اللوجيستيكية:

    - الأدوات الهندسية.

- **التحضير:**

  - القاعة: سيتم استغلال قاعة الدرس.
  - الحواسيب: يتم الاتفاق مع التلاميذ الخمس الذين سيحضرون حواسيبهم.
  - المستنسخات:
في هذا المقطع من الدرس يحتاج الأستاذ إلى وثيقة واحدة (ينسخها في 20 نسخة) حيث تتضمن:

    - نشاط 1: من أجل التشخيص،
    - نشاط 2: وضعية مسألة لبناء المفهوم،

- نشاط 3: وضعية مسألة وسيطية تساعد في حل الوضعية المسألة السابقة؛

- تمرين: من أجل التقويم.

• السيناريو: تحضير السيناريو المتوقع (أنظر أسفله).

♦ المراحل:

• التشخيص (حوالي $15\ min$)

نشاط 1: (أنظر الوثيقة المرفقة).

إيضاحات: بعد أن يوزع الأستاذ الوثيقة المرفقة، يطلب من التلاميذ إنجاز النشاط 1 في دفاتر البحث بشكل فردي.

• البناء (حوالي $50\ min$)

نشاط 2: (أنظر الوثيقة المرفقة).

نشاط 3: (أنظر الوثيقة المرفقة).

إيضاحات: يطلب الأستاذ من التلاميذ الإجابة على النشاط 2 في دفاتر البحث بشكل فردي، حيث يهدف هذا النشاط إلى خلخلة معارف التلاميذ. وبعد المناقشة واقتناع التلاميذ بعدم كفاية معارفهم السابقة للإجابة يوجههم الأستاذ إلى إنجاز النشاط 3.

• المحتوى (حوالي $05\ min$)

خاصية 1: ليكن p عدد أولي. مهما يكن a عدد صحيح نسبي فإن:

$$.a^p \equiv a \pmod p$$

مبرهنة فيرما الصغرى (Petit Théorème de Fermat):

ليكن p عدد أولي. مهما يكن a عدد صحيح نسبي حيث a و p أوليان فيما بينهما فإن: $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

إيضاحات: كتابة المحتوى في دفتر الدروس.

- **الترييض** (حوالي $15\ min$)

أمثلة:

- $21^4 \equiv 1 \pmod{5}$
- $18^6 \equiv 1 \pmod{7}$
- $18^7 \equiv 18 \pmod{7}$
- حساب باقي القسمة الإقليدية للعدد $3 \times 5^{100} + 6 \times 4^{11}$ على 11.

إيضاحات: تعطى هذه الأمثلة على شكل أسئلة وتتم الإجابة عنها باستحضار مبرهنة فيرما الصغرى.

- **التقويم** (حوالي $15\ min$)

تمرين: (أنظر الوثيقة المرفقة).

- **السيناريو المتوقع:**

(1) **التشخيص** (حوالي $15\ min$):

يقوم الأستاذ بطرح أسئلة كما وردت في النشاط التشخيصي بشكل مباشر ومركز، قصد التحقق من بعض المكتسبات السابقة. في هذه المرحلة فإننا نتوقع السيناريو التالي والذي ينتج عن تدخلات الأستاذ وتفاعلات التلاميذ أو العكس وذلك بعد إنتهاء المهلة التي أعطيت للتلاميذ من أجل الإجابة.

1. الأستاذ: ماذا تساوي C_5^3.

التلميذ: $C_5^3 = 10$.

الأستاذ: كيف تمكنت من إيجاد هذه النتيجة؟

التلميذ: باستعمال الآلة الحاسبة.

الأستاذ: جيد، من يذكرنا بقاعدة حساب عدد التأليفات؟

التلميذ:

$$C_n^p = \frac{n!}{p! \times (n-p)!}$$

الأستاذ: حسن جدا.

2. الأستاذ: ماذا يمكننا أن نقول عن العبارة: (P).

التلميذ: هل المنطق له علاقة بالحسابيات؟

الأستاذ: نعم، استعمال المنطق ضرورة في الرياضيات.

التلميذ: $2 \mid 3 \times 4 \Longrightarrow 2 \mid 4$

الأستاذ: هذه حالة فقط ونحن نريد أن نجزم هل العبارة صحيحة أم خاطئة. وحسب ما رأيناه في درس المنطق فإنه في حالة كهذه لكي نجزم بأن العبارة صحيحة يجب أن نبرهن ولكي نجزم بأن العبارة خاطئة يجب أن نجد مثالا مضادا.

التلميذ: العبارة خاطئة.

الأستاذ: لماذا؟

التلميذ: $6 \mid 3 \times 4$ ولكن $6 \nmid 3$ و $6 \nmid 4$.

الأستاذ: جيد جدا.

الأستاذ: متى تكون هذه العبارة صحيحة؟

التلميذ: لكي تكون العبارة صحيحة يجب أن نضيف في العبارة أن n عدد أولي.

الأستاذ: نعم، جيد.

3. الأستاذ: إذا كان $a \mid b$ فما هو باقي قسمة b على a.

التلميذ: باقي قسمة b على a هو 0.

الأستاذ: ممتاز.

على الأستاذ أن يتفادى، قدر الإمكان، الخوض في التفاصيل الجزئية لينتقل إلى النشاط البنائي.

(2) البناء (حوالي $50\ min$):

يطلب الأستاذ من التلاميذ الإجابة على النشاط 2 في دفتر البحث بشكل فردي.

الأستاذ: من يجيب على السؤال.

التلميذ: نحسب قيم a^{p-1}.

الأستاذ: ماذا سنأخذ كقيم ل a و p؟

التلميذ: البرهان بالترجع على p.

الأستاذ: كيف؟ وماذا عن a؟

إذن فالتلميذ، وباستعمال مكتسباته، وبعد محاولاته لن يتمكن من حل الوضعية بالشكل المطلوب. وهنا يتدخل الأستاذ من أجل توجيه التلاميذ إلى الإجابة على النشاط الثالث والذي سيساعد على حل هذه الوضعية المسألة وبالتالي بناء المفهوم الجديد. حيث يطلب منهم في هذه المرحلة تكوين مجموعات من أربعة تلاميذ.

1. الأستاذ: يطلب الأستاذ من التلاميذ حساب الباقي r للقسمة الإقليدية للعددين p و C_p^k حيث p عدد أولي و $k \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$.

وذلك باستعمال برنام *PARI*. حيث يقوم بتقسيم العمل على الشكل التالي:

المجموعة 1: العددين الأوليين 2 ثم 3.

المجموعة 2: العدد الأولي 5.

المجموعة 3: العدد الأولي 7.

المجموعة 4: العدد الأولي 11.

المجموعة 5: العدد الأولي 13.

بعد ذلك يقوم الأستاذ بتسليط النتائج المجمعة سلفا على حاسوبه وفق الجداول التالية:

p	k	C_p^k	r
3	1	3	0
	2	6	0
5	1	5	0
	2	10	0
	3	10	0
	4	5	0
7	1	7	0
	2	21	0
	3	35	0
	4	35	0
	5	21	0
	6	7	0

p	k	C_p^k	r
11	1	11	0
	2	55	0
	3	165	0
	4	330	0
	5	462	0
	6	462	0
	7	330	0
	8	165	0
	9	55	0
	10	11	0

p	k	C_p^k	r
13	1	13	0
	2	78	0
	3	286	0
	4	715	0
	5	1287	0
	6	1716	0
	7	1716	0
	8	1287	0
	9	715	0
	10	286	0
	11	78	0
	12	13	0

الأستاذ: ماذا تلاحظون؟

التلميذ : باقي القسمة هو 0.

الأستاذ : إذا كان باقي القسمة هو 0 فماذا يمكن أن نقول؟

التلميذ : يمكن أن نقول إن $p \mid C_p^k$.

الأستاذ: من يصوغ لنا مظنونة.

التلميذ: لكل عدد أولي p لدينا:

$$(\forall k \in \{1, 2, \ldots, p-1\}); \quad p \mid C_p^k$$

ثم وبشكل جماعي يبرهن الأستاذ على السبورة على هذه المظنونة.

الأستاذ : ماذا يساوي C_p^k

التلميذ: $C_p^k = \frac{p!}{(p-k)! \times k!}$

الأستاذ :إذن كم يساوي $p!$.

التلميذ: $p! = (p-k)! \times k! \times C_p^k$.

الأستاذ: إذا كان $p|ab$ حيث a و b

عددان صحيحان نسبيان و p عدد أولي. فماذا يمكن أن نستنتج؟

التلميذ: نستنتج إن $p \mid a$ أو $p \mid b$.

الأستاذ:من خلال العلاقة $p! = (p-k)! \times k! \times C_p^k$ ماذا يمكننا أن نستنتج؟

التلميذ: نستنتج إن $p \mid (p-k)! \times k! \times C_p^k$ أي $p \mid (p-k)! \times k!$ أو $p \mid C_p^k$.

الأستاذ: وهل العدد p يقسم العدد $(p-k)! \times k!$؟

التلميذ: لا.

الأستاذ: لماذا؟

التلميذ: لأن p لا يقسم أي حد من حدود $(p-k)! \times k!$.

الأستاذ: ماذا نستنتج؟

التلميذ: نستنتج إن $p \mid C_p^k$.

الأستاذ: إذن، ماذا أثبتنا؟

التلميذ: لقد برهنا أن لكل عدد أولي p لدينا:

$$(\forall k \in \{1, 2, \ldots, p-1\}); \quad p \mid C_p^k$$

وإذا كان a عدد صحيح نسبي سالب فإن $-a$ عدد صحيح نسبي موجب.

إذن إذا كان $p = 2$ فإن $a^2 - a = a(a-1)$ وهذا عدد زوجي،

إذن $a^2 \equiv a \pmod 2$،

وإذا كان $p > 2$ فإن

$$p|(-a)^p - (-a) = -a^p + a = -(a^p - a)$$

ومنه

$$.p|a^p - a \iff a^p \equiv a \pmod p$$

وبالتالي:

$$(\forall a \in \mathbb{Z});\quad a^p \equiv a \pmod p$$

4. الأستاذ: كيف يمكن استنتاج النتيجة الأخيرة؟

التلميذ: لدينا a و p أوليان فيما بينهما.

إذن

$$\begin{aligned} a^p \equiv a \pmod p &\iff p \mid a^p - a \\ &\iff p \mid a(a^{p-1} - 1) \\ &\iff p \mid a^{p-1} - 1 \\ &\iff a^{p-1} \equiv 1 \pmod p \end{aligned}$$

التلميذ: لماذا لم نكتف بالصيغة السابقة؟

الأستاذ: لأنه إذا كان العددان a و p غير أوليين فيما بينهما، فهذا يعني أن العدد a مضاعف للعدد p ومنه فإن $(a^p - a)$ مضاعف للعدد p.

وفي الأخير يعطي الأستاذ لمحة تاريخية عن هذه المبرهنة المهمة وعن دور صاحبها في تطور الأبحاث المتعلقة بنظرية الأعداد.

يتم بعد ذلك، وبشكل جماعي، صياغة الخاصية والمبرهنة ثم كتابتهما على السبورة ثم مطالبة التلاميذ بتدوينها في دفاتر الدروس.

(3) **الترييض** (حوالي 15 *min*):

يطلب الأستاذ من التلاميذ الإجابة على الأسئلة ثم صياغتها على شكل أمثلة.

(4) **التقويم** (حوالي 15 *min*):

يطلب الأستاذ من التلاميذ إنجاز التمرين الموجود بالوثيقة المرفقة بشكل فردي.

الوثيقة المرفقة:

نشاط 1:

1. أحسب C_5^3.

2. ماذا يمكنك أن تقول عن العبارة: "$(P): n \mid ab \Longrightarrow n \mid a$ أو $n \mid b$".

3. إذا كان $a \mid b$ فما هو باقي قسمة b على a.

نشاط 2: ليكن p عدد أولي. بين أن لكل $a \in \mathbb{Z}$ لدينا

$$a \wedge p = 1 \Longrightarrow a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$$

نشاط 3: ليكن p عدد أولي.

1. بين أن: $p \mid C_p^k;\ \ k \in \{1, 2, \dots, p-1\}$.

2. بين أن: $(\forall n \in \mathbb{N});\ \ n^p \equiv n \pmod p$.

3. استنتج أن: $(\forall a \in \mathbb{Z});\ \ a^p \equiv a \pmod p$.

4. بين أن لكل $a \in \mathbb{Z}$ لدينا

$$a \wedge p = 1 \Longrightarrow a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$$

تمرين:

1. تحقق أن $2^6 \equiv 1 \pmod 7$

2. استنتج أن $\forall (a, b) \in \mathbb{N}^2;\ \ 2^{6a+b} \equiv 2^b \pmod 7$

3. حدد حسب قيم n بواقي القسمة الإقليدية ل 2^n على 7.

3.5 المثال الثالث

في هذا المثال سنقترح طريقة لتقديم مقطع من درس "الحسابيات في $\mathbb{Z}$" بالسنة الأولى بكالوريا من شعبة العلوم الرياضية.

♦ **تقديم عام:**

الأستاذ:
الموسم الدراسي:
المؤسسة:
المديرية الإقليمية:
المادة: الرياضيات
المستوى: الأولى بكالوريا
شعبة: علوم رياضية
عدد التلاميذ: 20
التاريخ:

الدرس: الحسابيات في $\mathbb{Z}$
المقطع: **الموافقة بترديد**
المدة الزمنية: ساعتان
محتوى المقطع التعليمي:
- تعريف: الموافقة بترديد.
- خاصية: العلاقة بين قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$ والموافقة بترديد.
- خاصيات: الانعكاسية، التماثلية والتعدي.
- خاصيات: الانسجام مع الجمع والضرب في $\mathbb{Z}$ والتلاؤم مع الرفع الى القوة.

♦ **الإطار البيداغوجي والديداكتيكي:**

• القدرات المنتظرة:

- التعرف على القواعد الحسابية بترديد n؛
- القدرة على توظيف الموافقة بترديد n في دراسة قابلية القسمة والعكس.

• الكفايات المستعرضة:

- التحليل؛
- التواصل؛
- التعامل مع الحاسوب والبرمجة؛
- تقنيات الحساب والتحدي؛
- الإعلاميات.

• التوجيهات التربوية:

- تمنح الفرصة لتوظيف مختلف الاستدلالات المنطقية خصوصا منها الاستدلال بالترجع؛
- ينبغي تزويد التلاميذ بتقنيات وأدوات لدراسة خاصيات الأعداد الصحيحة النسبية، أما خاصيات "الموافقة بترديد" فتمكن من معالجة مسائل حول القسمة الإقليدية في $\mathbb{Z}$ وتمهد للدراسة الجبرية لمجموعة أصناف التكافؤ؛
- تعتبر الأعداد الأولية فيما بينها خارج المقرر.

• الصعوبات المتوقعة:

- دراسة قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$ باستعمال الموافقة بترديد؛
- استعمال قابلية القسمة في دراسة الموافقة بترديد؛
- تطبيق خاصيات الضرب والاختزال التي تعرف عليها التلميذ في مجموعة الأعداد الحقيقية بالنسبة للموافقة بترديد.

• التعاقد الديداكتيكي:

- احترام آراء الزملاء؛
- كتابة الأنشطة في دفتر التمارين؛
- كتابة ملخص الدرس في دفتر الدروس؛
- توفر كل تلميذ على الأدوات الهندسية ودفتر للبحث؛

- عدم تدوين أي شيء على الدفاتر إلا بإذن من الأستاذ،
- حسن الإنصات سواء من طرف الأستاذ أو من طرف التلاميذ،
- استعمال السبورة:

* تقسم السبورة إلى أربعة أجزاء،
* تخصيص الجزء الأيمن لتدوين التعاريف والخاصيات،
* تخصيص الأجزاء الثلاث المتبقية لحل المسألة،
* الكتابة بخط واضح على السبورة،
* في حالة عدم تواجد السبورة الخشبية (العادية) يمكن للأستاذ أن يعتمد تقسيما مناسبا للسبورة الموجودة مع احترام ما يتفق عليه.

• المكتسبات السابقة:

- قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$؛
- القسمة الإقليدية في $\mathbb{Z}$.

• تعميم النتائج:

نظمات معادلات الموافقة بترديد.
(حالات خاصة ل (Théoreme des restes chinois)).

• الامتدادات:

- امتدادات المفهوم بالنسبة لدروس مقبلة:

* المجموعة $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ وخاصيات الأعداد الأولية؛
* البنيات الجبرية.

- امتدادات المفهوم بالنسبة لمواد أخرى:

* الإعلاميات: التشفير والحماية؛
* المنحنيات الاهليليجية والحماية الإلكترونية.

- امتدادات المفهوم بالنسبة لمجالات أخرى:

* التشفير؛
* الحماية.

• التقويم والدعم والمعالجة:

- أدوات التقويم:

* بطاقات التقويم: بطاقات تتضمن نسبة التلاميذ الذين انخرطوا في الدرس في كل مرحلة ومؤشرات يمكنها قياس التمكن من القدرات المنتظرة وتساعد على رصد الأخطاء، كما تتضمن ملاحظات الأستاذ حول مراحل الدرس والتدخلات غير المناسبة والتي قد توقظ تمثلات تحول دون نجاح الحصة أو تعمل على إنتاج عوائق قد تعرقل بناء المعرفة من أجل استغلالها في الدعم والمعالجة وتعديل السيناريو في المستقبل؛
* أسئلة شفوية تتصدر وتتخلل مختلف فقرات الدرس؛
* تمرين (أنظر الوثيقة المرفقة).

- الدعم والمعالجة:

* دعم فوري؛
* استحضار الأخطاء الشائعة والأخطاء المتوقعة؛
* تحضير وضعيات متنازعة؛
* تمارين مختارة من الكتاب المدرسي أو من مصادر أخرى من أجل التثبيت والدعم.

• إبستمولوجيا:

يشير الأستاذ إلى بناء المجموعة N من طرف العالم الإيطالي بيانو (G. Peano [1858-1932]) وكذلك المجموعة Z، ويشير إلى أن العدد

السالب لم يتم ارساؤه إلا بعد مرور خمسة عشر قرنا (أنظر العائق الابستمولوجي). وأن خاصيات المجموعة $\mathbb{Z}$ يمكن تعميمها، وأنها لعبت دورا هاما في حل مسائل عمرت كثيرا في عالم الرياضيات وعلى رأسها معادلة العالم الفرنسي فيرما (P. Fermat [1601-1665]) كما أن مفهوم الموافقة بترديد تم ادخاله من طرف العالم الألماني غوص (C. F. Gauss [1777-1855]) سنة 1801...

♦ المستلزمات:

• الأدوات الرقمية:

- حاسوب خاص بالأستاذ؛
- 5 حواسيب يحضرها بعض التلاميذ؛
- عارض؛
- برنام خاص بنظرية الأعداد: *PARI*؛
- برنام *Excel*.

• مبادئ في المعلوميات:

- الإلمام بمبادئ أولية في المعلوميات؛
- الإلمام بمبادئ أولية لبرنامي *Excel* و *PARI*.

• الأدوات اللوجيستيكية:

- شريط من ورق.

- **التحضير:**

• القاعة: سيتم استغلال قاعة الدرس.

• الحواسيب: يتم الاتفاق مع التلاميذ الخمس الذين سيحضرون حواسيبهم.

• المستنسخات: في هذا المقطع من الدرس يحتاج الأستاذ إلى وثيقة واحدة و تنسخ في 20 نسخة حيث تتضمن:

- نشاط 2:
- تمرين 1 (من أجل الترييض).
- تمرين 2 (من أجل التقويم).

• السيناريو: تحضير السيناريو المتوقع (أنظر أسفله).

- **المراحل:**

• **التشخيص** (حوالي $05\ min$)

نشاط 1:

1. متى نقول إن a يقسم b في $\mathbb{Z}$؟

2. من يذكرنا بمبرهنة القسمة الإقليدية في $\mathbb{Z}$؟

إيضاحات: أسئلة شفاهية.

• **البناء** (حوالي $60\ min$)

نشاط 2: (أنظر الوثيقة المرفقة).

إيضاحات: بعد أن يوزع الأستاذ الوثيقة على التلاميذ يطلب منهم إلصاقها بدفتر التمارين ثم الإجابة على النشاط 2 في مجموعات مكونة من تلميذين.

• **المحتوى (حوالي $10\,min$)**

تعريف: ليكن a و b عددين صحيحين نسبيين و n عدد صحيح طبيعي.
نقول إن a يوافق b بترديد n ونكتب: $a \equiv b \pmod n$، إذا كان للعددين a و b نفس باقي القسمة الإقليدية على n.

خاصية: ليكن a و b عددين صحيحين نسبيين و n عدد صحيح طبيعي، إذن

$$a \equiv b \pmod n \Longleftrightarrow n \mid (a-b)$$

خاصيات "الموافقة بترديد":
ليكن a و b عددين صحيحين نسبيين و n عدد صحيح طبيعي غير منعدم، إذن:

1. $a \equiv a \pmod n$ (علاقة الموافقة بترديد علاقة انعكاسية).
2. $a \equiv b \pmod n \Longrightarrow b \equiv a \pmod n$ (علاقة الموافقة بترديد علاقة تماثلية).
3. $\begin{cases} a \equiv b \pmod n \\ b \equiv c \pmod n \end{cases} \Longrightarrow a \equiv c \pmod n$ (علاقة الموافقة بترديد علاقة متعدية).

خاصيات:
ليكن a، b، c و d أعداد صحيحة نسبية و n عدد صحيح طبيعي غير منعدم، إذن:

1. $\begin{cases} a \equiv b \pmod n \\ c \equiv d \pmod n \end{cases} \Longrightarrow a+c \equiv b+d \pmod n$
2. $\begin{cases} a \equiv b \pmod n \\ c \equiv d \pmod n \end{cases} \Longrightarrow a \times c \equiv b \times d \pmod n$
3. $a \equiv b \pmod n \Longrightarrow (\forall k \in \mathbb{N});\ a^k \equiv b^k \pmod n$

إيضاحات: بعد الاتفاق الجماعي على صياغة التعريف يتم تدوينه من طرف الأستاذ على السبورة. ونفس الشيء بالنسبة للخاصيات.

• **الترييض** (حوالي $15\ min$)

تمرين 1: (أنظر الوثيقة المرفقة).

• **التقويم** (حوالي $20\ min$)

تمرين 2: (أنظر الوثيقة المرفقة).

• **السيناريو المتوقع:**

(1) **التشخيص** (حوالي $05\ min$):

يقوم الأستاذ بطرح أسئلة شفوية بشكل مركز ومباشر قصد التحقق من بعض المكتسبات القبلية الضرورية لبناء المفهوم الجديد.

الأستاذ :

1. متى نقول إن a يقسم b في $\mathbb{Z}$؟
2. من يذكرنا بمبرهنة القسمة الإقليدية في $\mathbb{Z}$؟

التلميذ:

1. نقول إن a يقسم b إذا وجد عدد صحيح نسبي k حيث $b = ka$.
2. يعطي مبرهنة القسمة الإقليدية دون الإشارة إلى علاقة الباقي بالمقسوم عليه ولا إلى الشروط.

الأستاذ: يتدخل من أجل إعادة تعريف القسمة الإقليدية والوقوف عند مبرهناتها وقد يلمح هنا إلى أهميتها التاريخية والتطبيقية وامتداداتها في مجالات الحياة اليومية.

(2) **البناء** (حوالي $60\ min$):

يطلب الأستاذ من التلاميذ الإجابة على الجزء الأول من النشاط 2

(الموجود بالوثيقة) في دفتر البحث بشكل فردي.
الأستاذ: حدد باقي القسمة الإقليدية ل 83^{2016} على 26.
خلال عمل التلاميذ، يمر الأستاذ بين الصفوف لمراقبة عملهم حيث يلاحظ أنهم يحاولون حساب 83^{2016}، ثم يسألون عن إمكانية استعمال الآلة الحاسبة، وبعد أن يجيبهم بالإيجاب يلاحظون بأنها غير قادرة على حساب هذه القوة. وبعد مناقشات جماعية.
التلميذ: لا يمكننا أن نحسب باقي هذه القسمة لأن العدد كبير جدا.
يهدف هذا الجزء إلى خلخلة معارف التلميذ (حالة اللاتوازن عند بياجي).
ومن أجل إعادة التوازن وبناء المعرفة الجديدة يوجه الأستاذ التلاميذ إلى إنجاز الجزء الثاني من النشاط 2.
الأستاذ: ما هو الحرف الموجود في الموضع 83؟
التلميذ: الحرف F.
الأستاذ: كيف عرفت ذلك؟
التلميذ: نجري القسمة الإقليدية ل 83 على 26. نجد أن $83 = 26 \times 3 + 5$.
وهذا يعني أننا أكملنا ثلاث مرات ترتيب الحروف اللاتينية على الشريط وسنتواجد بالموضع الذي يكافئ الحرف الذي لديه الرقم 5 أي الحرف F.
الأستاذ: ما هي المواضع الثمانية الأولى للحرف F؟
التلميذ: المواضع الثمانية الأولى للحرف F هي:

1	$26 \times 0 + 5$
2	$26 \times 1 + 5 = 31$
3	$26 \times 2 + 5 = 57$
4	$26 \times 3 + 5 = 83$
5	$26 \times 4 + 5 = 109$
6	$26 \times 5 + 5 = 135$
7	$26 \times 6 + 5 = 161$
8	$26 \times 7 + 5 = 187$

الأستاذ: ماذا تلاحظون بالنسبة لباقي القسمة الإقليدية للعددين a و b

على 26؟

التلميذ: نلاحظ بأن لهما نفس الباقي.

الأستاذ: في هذه الحالة نقول إن a يوافق b بترديد 26 ونكتب:

$$a \equiv b \pmod{26}$$

الأستاذ: ما هو باقي القسمة الإقليدية ل $(b-a)$ على 26؟

التلميذ: باقي القسمة الإقليدية ل $(b-a)$ على 26 هو 0.

الأستاذ: ليكن a و b عددين صحيحين نسبيين و n عدد صحيح طبيعي غير منعدم.

نفترض أن للعددين a و b نفس باقي القسمة الإقليدية على n. بين أن n يقسم $(b-a)$.

التلميذ: يعطي إجابة صحيحة.

الأستاذ: نفترض أن n يقسم $(b-a)$. بين أن للعددين a و b نفس باقي القسمة الإقليدية على n.

التلميذ: ليس هناك جواب.

الأستاذ: يوجه التلاميذ إلى البرهنة بالخلف.

التلميذ: يجيب بشكل صحيح.

الأستاذ: ماذا نستنتج؟

التلميذ: هناك تكافؤ.

بعد ذلك تتم صياغة الخاصية بشكل جماعي: ليكن a و b عددين صحيحين نسبيين و n عدد صحيح طبيعي غير منعدم، إذن

$$a \equiv b \pmod{n} \Longleftrightarrow n \mid (a-b)$$

الأستاذ: إذا كان للعددين a و b نفس باقي القسمة الإقليدية على n، فماذا يمكن أن نقول؟

التلميذ: $a \equiv b \pmod{n}$.

الأستاذ: إذا كان $a \equiv b \pmod{n}$، هل يمكن أن نقول أن b هو باقي القسمة الإقليدية ل a على n؟

التلميذ: لا.
الأستاذ: من يمكنه أن يعطينا مثالا مضادا على ذلك؟
التلميذ: $8 \equiv 4 \pmod 2$.
الأستاذ: متى يمكن أن نقول إن b هو باقي القسمة الإقليدية ل a على n؟
التلميذ: إذا كان $0 \leqslant |b| < n$.

بالنسبة للأسئلة 1، 2 و3 من الجزء الثالث من النشاط 2، فتنجز بشكل جماعي على السبورة، ليتم بعد ذلك استنتاج الخاصيات (الانعكاسية، التماثلية والتعدي) حيث يتم تدوينها على السبورة ليطلب من التلاميذ كتابتها مع البراهين في دفتر الدروس.

بعد ذلك يوجه التلاميذ إلى إنجاز السؤال الرابع من الجزء الثالث حيث يتم تسليط النتائج (الجدول).

ثم يطلب منهم اختيار a و b و c و d بحيث:

- للعددين a و b نفس باقي القسمة الإقليدية على n.
- للعددين c و d نفس باقي القسمة الإقليدية على n.

الأستاذ: ماذا تلاحظون؟
التلميذ: أجوبة غير دقيقة.
الأستاذ: ماذا تلاحظون بالنسبة للباقي؟
التلميذ: التجربة تؤكد الخاصيات المطلوبة في السؤالين (ب) و(ج).
الأستاذ: البرهنة على الخاصيات بشكل جماعي ليطلب من التلاميذ بعد ذلك كتابتها مع البراهين في دفتر الدروس.

بعد ذلك يطلب الأستاذ من التلاميذ الانتباه، ثم يقوم بفتح حاسوبه ثم ليشغل برنام $PARI$ ويوضح لهم أن $Mod(a,n)$ يحدد باقي قسمة a على n ثم يحسب $Mod(83^{2016}, 26) = 1$.

فيستنتج التلاميذ أن هذا العدد الكبير جدا يوافق B على الشريط الورقي اللامنتهي.

(3) **التريض** (حوالي $15\ min$):

الأستاذ: يطلب من التلاميذ الإجابة عن الجزء الأول من النشاط 2 ويأخذ على شكل مثال.
التلميذ: لدينا

$$\begin{aligned} 83 \equiv 5 \pmod{26} &\Longrightarrow 83^{2016} \equiv 5^{2016} \pmod{26} \\ &\Longrightarrow 83^{2016} \equiv (5^2)^{1008} \pmod{26} \\ &\Longrightarrow 83^{2016} \equiv (-1)^{1008} \pmod{26} \\ &\Longrightarrow 83^{2016} \equiv 1 \pmod{26} \end{aligned}$$

ومنه فإن باقي القسمة الإقليدية ل 83^{2016} على 26 هو 1.

يطلب الأستاذ من التلاميذ بعد ذلك إنجاز التمرين الأول (الوثيقة المرفقة) في دفاتر البحث مثنى مثنى، ثم يتم التصحيح على السبورة مع النقاش الجماعي من أجل استغلال هذا التمرين في تثبيت المفهوم.

(4) **التقويم** (حوالي $20\ min$):

يطلب الأستاذ من التلاميذ إنجاز التمرين الثاني (الوثيقة المرفقة) في دفاتر البحث بشكل فردي، ثم يتم التصحيح على السبورة مع النقاش الجماعي.
في الأخير يلمح الأستاذ إلى أهمية المفهوم الجديد واستخدامه في التشفير وأنظمة الحماية. ويمكن للأستاذ أن يكلف مجموعة من التلاميذ في إطار الأنشطة الموازية تحضير عرض حول التشفير باستخدام طريقة RSA.

الوثيقة المرفقة:

نشاط 2:

(I) حدد باقي القسمة الإقليدية ل 83^{2016} على 26.

(II) التجربة: نعتبر الشريط التالي "معلق على السبورة".

على هذا الشريط نربط كل حرف من الأحرف اللاتينية A، B، ...و Z بعدد صحيح طبيعي كما هو مبين في الشريط:

A	B	C	...	Z	A	B	...
0	1	2	...	25	26	27	...

نفترض أن الشريط غير منته.

1. ما هو الحرف الموجود في الموضع 83؟

2. ما هي المواضع الثمانية الأولى للحرف F؟

3. خذ عددين a و b من هذه الأعداد الثمانية، ماذا تلاحظ بالنسبة لباقي القسمة الإقليدية للعددين a و b على 26؟

4. ما هو باقي القسمة الإقليدية ل $(b-a)$ على 26؟

ليكن a و b عددين صحيحين نسبيين و n عدد صحيح طبيعي غير منعدم.

1. نفترض أن للعددين a و b نفس باقي القسمة الإقليدية على n. بين أن n يقسم $(b-a)$.

2. نفترض أن n يقسم $(b-a)$. بين أن للعددين a و b نفس باقي القسمة الإقليدية على n.

3. ماذا تستنتج؟

(III) ليكن a و b عددين صحيحين نسبيين و n عدد صحيح طبيعي غير منعدم.

1. تحقق أن: $a \equiv a \pmod{n}$.

2. تحقق أن: $a \equiv b \pmod{n} \Longrightarrow b \equiv a \pmod{n}$.

3. تحقق أن: $\begin{cases} a \equiv b \pmod{n} \\ b \equiv c \pmod{n} \end{cases} \Longrightarrow a \equiv c \pmod{n}$

4. الجدول أدناه هو جزء من ورقة حساب في مجدول $Excel$ (حيث r هو باقي القسمة الأقليدية على n).

	n	p								
	5	2								
	a	b	c	d	$a+c$	$b+d$	$a\times c$	$b\times d$	a^p	b^p
	38	23	22	57	60	80	836	1311	1444	529
r	3	3	2	2	0	0	1	1	4	4

(ا) قم بتغيير الأعداد الصحيحة النسبية a، b، c و d والعددين الصحيحين الطبيعيين n و p وفق الشروط التالية:

- للعددين a و b نفس باقي القسمة الإقليدية على n.
- للعددين c و d نفس باقي القسمة الإقليدية على n.

ماذا تلاحظون؟

(ب) لتكن a، b، c و d أعدادا صحيحة نسبية و n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم. بين أن:

$$\begin{cases} a \equiv b \pmod{n} \\ c \equiv d \pmod{n} \end{cases} \Longrightarrow a + c \equiv b + d \pmod{n}$$

وأن

$$\begin{cases} a \equiv b \pmod{n} \\ c \equiv d \pmod{n} \end{cases} \Longrightarrow a \times c \equiv b \times d \pmod{n}$$

(ج) ليكن a و b من $\mathbb{Z}$ حيث $a \equiv b \pmod{n}$.

برهن بالترجع أن : $(\forall p \in \mathbb{N});\quad a^p \equiv b^p \pmod{n}$

تمرين 1:

1. إملإ الفراغ بما يناسب:

$8 \equiv 0 \pmod{\ldots}$	$11 \equiv \ldots \pmod{16}$
$-7 \equiv \ldots \pmod{11}$	$\ldots \equiv -1 \pmod{8}$
$5 \equiv -5 \pmod{\ldots}$	$-1 \equiv \ldots \pmod{5}$

2. ليكن $a = 255$ و $b = 837$ و $c = 3691$.

(ا) حدد باقي قسمة كل من a و b و c على 11.

(ب) باستعمال الموافقة بترديد، حدد باقي قسمة كل من $a+b$ و $a \times c$ و $a+b+c$ و $a \times b \times c$ و a^2 على 11.

تمرين 2:

1. تحقق أن $2^6 \equiv 1 \pmod{7}$

2. بين أن $\forall (a,b) \in \mathbb{N}^2;\quad 2^{6a+b} \equiv 2^b \pmod{7}$

3. حدد حسب قيم n بواقي القسمة الإقليدية ل 2^n على 7.

4. بين بالترجع أن : $(\forall n \in \mathbb{N});\quad 9 \mid 2^{2n} + 6n - 1$.

5. بين أن: $4^n \equiv (3n+1) \pmod{9}$.

4.5 المثال الرابع

في هذا المثال سنقترح طريقة لتقديم مقطع من درس "حساب التكامل" بالسنة الثانية بكالوريا من شعبة العلوم الفيزيائية.

- تقديم عام:

الأستاذ:
الموسم الدراسي:
المؤسسة:
المديرية الإقليمية:
المادة: الرياضيات
المستوى: الثانية بكالوريا
شعبة: علوم فيزيائية
عدد التلاميذ: 24

التاريخ:
الدرس: حساب التكامل
المقطع: **المكاملة بالأجزاء**
المدة الزمنية: ساعتين
محتوى المقطع التعليمي:
- خاصية: المكاملة بالأجزاء

- **الإطار البيداغوجي والديداكتيكي:**

• القدرات المنتظرة:

- القدرة على توظيف تقنية المكاملة بالأجزاء في حساب بعض التكاملات.
- إعادة صياغة تعابير رياضية بشكل مناسب من أجل تحديد الدالة الأصلية لدوال غير اعتيادية.

• الكفايات المستعرضة:

- التحليل؛

- التواصل؛
- استثمار التكامل في الفيزياء والعلوم والتقنيات.

• التوجيهات التربوية:

- ينبغي تقديم تكامل دالة على قطعة انطلاقا من مفهوم دالة أصلية لدالة متصلة؛
- تقبل جميع الخاصيات ويمكن تأويلها هندسيا باستعمال المساحة؛
- يمكن استعمال حساب التكامل في وضعيات متنوعة فيزيائية (الشغل، القدرة،...) ورياضياتية (حساب تقريبات، حساب نهايات،...) وغيرهما واستعمال المتتاليات في تأطير بعض التكاملات.

• الصعوبات المتوقعة:

- الخلط بين مشتقة الدالة والدالة الأصلية لحساب التكامل؛
- تطبيق خاصية الخطية على جداء تكامل دالتين؛
- الترميز $\int$ و dx؛
- ...

• التعاقد الديداكتيكي:

- جميع الدوال المستعملة قابلة للإتصال؛
- حساب مشتقة دالة يعتبر برهانا على قابلية اشتقاقها، ويستحسن إيجاد مجموعة تعريف الدالة المشتقة حتى نكون فكرة عن قابلية اشتقاق الدالة؛
- الرمزين u و v يمثلان دوالا متصلة وقابلة للاشتقاق؛
- بالنسبة للدالة f فإننا نرمز لدالتها الأصلية ب F؛

- ضرورة مشاركة الكل في جميع مراحل الدرس؛
- كتابة الأنشطة في دفتر التمارين؛
- كتابة ملخص الدرس في دفتر الدروس؛
- عدم تدوين أي شيء على الدفاتر إلا بإذن من الأستاذ؛
- حسن الإنصات سواء من طرف الأستاذ أو من طرف التلاميذ؛
- توفر كل تلميذ على الأدوات الهندسية ودفتر للبحث؛
- احترام الوقت وعدم قبول أي تلميذ التحق بعد مرور 5 دقائق؛
- استعمال السبورة:
  * تقسم السبورة إلى أربعة أجزاء؛
  * تخصيص الجزء الأيمن لتدوين التعاريف والخاصيات؛
  * تخصيص الأجزاء الثلاث المتبقية لحل المسألة مع رسم الأشكال (إن وجدت) على الجزء الأيسر؛
  * تخصيص الجزئين الخلفيين لكتابة نصوص المسائل والتمارين؛
  * الكتابة بخط واضح على السبورة؛
  * في حالة عدم تواجد السبورة الخشبية (العادية) يمكن للأستاذ أن يعتمد تقسيما مناسبا للسبورة الموجودة مع احترام ما يتفق عليه.

• المكتسبات السابقة:

- الاشتقاق و الاتصال؛
- الدوال الأصلية لدالة متصلة؛

- حساب التكامل باستعمال الدالة الأصلية؛
- الخاصيات الجبرية للتكامل.

• تعميم النتائج: حساب تكاملات يستلزم حسابها تطبيق المكاملة بالأجزاء عدة مرات.

• الامتدادات:

- امتدادات المفهوم بالنسبة لدروس مقبلة:

* حساب المساحات والحجوم؛
* الاحتمالات والاحصاء؛
* المتتاليات؛
* التحليل العددي.

- امتدادات المفهوم بالنسبة لمواد أخرى:

* الفيزياء: معادلة المسار ودراسة حركة الأجسام (الميكانيك)؛ حساب عزم القصور ومركز ثقل الأجسام...

- امتدادات المفهوم بالنسبة لمجالات أخرى:

* الصناعة الالكتروميكانيكية؛
* الإعلاميات (هندسة الحواسيب).
* ...

• التقويم والدعم والمعالجة:

- أدوات التقويم:

* بطاقات التقويم: بطاقات تتضمن نسبة التلاميذ الذين انخرطوا في الدرس في كل مرحلة ومؤشرات يمكنها قياس

التمكن من القدرات المنتظرة وتساعد على رصد الأخطاء، كما تتضمن ملاحظات الأستاذ حول مراحل الدرس والتدخلات غير المناسبة؛

* أسئلة شفوية تتصدر وتتخلل مختلف فقرات الدرس؛
* تمارين تحترم التدرج في الصعوبة ويمكن من خلالها معرفة مدى تمكن التلاميذ من اختيار الدالتين u و v المعرفتين في الخاصية.

- الدعم والمعالجة:

* دعم فوري؛
* استحضار الأخطاء الشائعة والأخطاء المتوقعة؛
* تحضير وضعيات متنازعة.

• إبستمولوجيا:

إن ظهور مفهوم التكامل له علاقة بالإغريق والعرب ونخص بالذكر تعريف كل من العالمين لايبنز (G. W. Leibniz [1646-1716]) ونيوتن (I. Newton [1643-1727]) للتكامل باستعمال الدوال الأصلية وكذلك نشير إلى تعاريف كوشي (A. Cauchy [1789-1857]) ورايمان (B. Riemann [1826-1866]) باستخدام المجاميع ثم تعريف لوبيج (H-L. Lebesgue [1875-1941]) وكذلك دور العرب ونشير هنا إلى دور العالمين ثابت ابن قرة (836-901) وابن الهيثم (965-1040) الذين كانا بمثابة حلقة الوصل بين إنجازات الإغريق في الحسابات الهندسية وما توصل إليه الغرب بالنسبة لظهور مفهوم التكامل. كما نشير إلى أن أول من قام بوضع الحدود في التكامل هو العالم السويسري أولير (L. Euler [1707-1783]) كما أن الرمز الحالي للتكامل استعمل لأول مرة مع العالم الفرنسي فوريي (J. Fourier [1768-1830]).

♦ **المستلزمات:**

- الأدوات الرقمية: في بناء هذا الدرس لن نستعمل الأدوات الرقمية.
- مبادئ في المعلوميات: في بناء هذا الدرس لن نستعمل الأدوات الرقمية.
- الأدوات اللوجيستيكية: لن نستعمل أية أدوات.

♦ **التحضير:**

- القاعة: سيتم استغلال قاعة الدرس.
- الحواسيب: في بناء هذا الدرس لن نستعمل الأدوات الرقمية.
- المستنسخات:

– وثيقة تحتوي على نشاط 1 من أجل التشخيص، نشاط 2 من أجل البناء وتمرينين من أجل التقويم. حيث تنسخ هذه الوثيقة في 24 نسخة.

- السيناريو: تحضير السيناريو المتوقع (أنظر أسفله).

♦ **المراحل:**

- **التشخيص** (حوالي 25 *min*)

نشاط 1: أنظر الوثيقة المرفقة. إيضاحات: بعد أن يوزع الأستاذ الوثيقة المرفقة يطلب من التلاميذ الإجابة على النشاط رقم 1 في دفاتر البحث بشكل فردي.

• **البناء:** (حوالي $25\ min$)

نشاط 2: أنظر الوثيقة المرفقة.

إيضاحات: يطلب الأستاذ من التلاميذ الإجابة على السؤال الأول من النشاط 2 في دفاتر البحث بشكل فردي ويهدف هذا الجزء من النشاط إلى خلخلة معارف التلاميذ حيث سيجدون أن مكتسباتهم السابقة غير كافية للإجابة عن هذا السؤال. وبعد المناقشة يوجه الأستاذ التلاميذ إلى إنجاز الجزء الثاني من أجل إعادة التوازن وبناء المعرفة الجديدة حيث ينتقل بهم إلى التجريد بدون التصريح على أنه برهانا تماشيا مع التوجيهات التربوية.

بعد ذلك يطلب الأستاذ من التلاميذ حساب التكامل الأول.

• **المحتوى** (حوالي $05\ min$)

خاصية: لتكن u و v دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال $[a, b]$ بحيث u' و v' متصلتان على المجال $[a, b]$، إذن:

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

هذه العلاقة تسمى: المكاملة بالأجزاء (Intégration par parties).

إيضاحات: كتابة المحتوى في دفتر الدروس.

• **الترييض** (حوالي $25\ min$)

أمثلة: لنحسب التكاملات التالية:

$$\int_0^{\pi} x\sin\ (x)\ dx;\quad \int_1^{e} x\ln(x)\ dx;\quad \int_1^{2} \ln(x)\ dx$$

إيضاحات: يجب التركيز على ضرورة اختيار u و v بشكل ملائم.

- **التقويم** (حوالي $30\ min$)

تمرين 1: أنظر الوثيقة المرفقة.

تمرين 2: أنظر الوثيقة المرفقة.

إيضاحات: يطلب الأستاذ من التلاميذ إنجاز التمرين 1 من الوثيقة المرفقة بشكل فردي في دفاتر البحث حتى يتمكن من الوقوف على مدى تحقق الأهداف التعلمية المسطرة.

أما التمرين الثاني فيطلب من التلاميذ إنجازه بالمنازل.

- **السيناريو المتوقع**:

(1) **التشخيص** (حوالي $25\ min$):

يقوم الأستاذ بطرح أسئلة كما وردت في النشاط التشخيصي بشكل مباشر و مركز، قصد التحقق من بعض المكتسبات السابقة. في هذه المرحلة فإننا نتوقع السيناريو التالي والذي ينتج عن تدخلات الأستاذ وانعكاسات التلاميذ أو العكس وذلك بعد أن يكون التلاميذ قد أجابو عن النشاط 1 في دفتر البحث.

1. الأستاذ: من يذكرنا بالخاصيات الجبرية لحساب التكامل.

التلميذ: $\int_a^b f(x) + g(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$

و $\int_a^b \alpha f(x)\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx$.

الأستاذ: جيد، هل هناك من خاصيات أخرى؟

التلميذ: $\int_a^b f(x) \times g(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx \times \int_a^b g(x)\, dx$.

الأستاذ: ما رأيكم في جواب زميلكم؟

التلميذ: الجواب غير صحيح.

الأستاذ: لماذا؟

التلميذ: صمت.

الأستاذ: نضع $f(x) = x$ و $g(x) = x^2$،

أحسب $\int_0^1 f(x) \times g(x)\, dx$ و $\int_0^1 f(x)\, dx \times \int_0^1 g(x)\, dx$.

التلميذ: $\int_0^1 f(x) \times g(x)\, dx = \frac{1}{4}$ و $\int_0^1 f(x)\, dx \times \int_0^1 g(x)\, dx = \frac{1}{6}$.

الأستاذ: ماذا تلاحظون؟

التلميذ: التكاملين مختلفين.

2. الأستاذ: حدد مشتقة الدالة $f \times g$.

التلميذ: $(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$.

الأستاذ: ممتاز.

ويمكن أن يعطي أحد التلاميذ الجواب التالي: $(f \times g)' = f' \times g'$.

وفي هذه الحالة يتدخل الأستاذ بإعطاء وضعية متنازعة مثل:

$$f(x) = x \text{ و } g(x) = 1 \Longrightarrow (f \times g)'(x) = 1 \neq f'(x) \times g'(x) = 0$$

3. الأستاذ: ما هي مشتقة الدالة $F(x) = x\ln(x) - x$؟

التلميذ: $F'(x) = \ln(x)$.

الأستاذ: جيد، وهذه الدالة قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$.

الأستاذ: ما هي قيمة التكامل $\int_1^e \ln(x)\, dx$؟

التلميذ: $\int_1^e \ln(x)\, dx = [F(x)]_1^e = 1$.

الأستاذ: جيد جدا.

4. الأستاذ: أحسب التكامل $\int_1^2 x\, e^{x^2}\, dx$.

التلميذ: عدم وجود أجوبة.

الأستاذ: يذكر بأن الدالة الأصلية للدالة $u' e^u$ هي الدالة e^u. ثم يطلب منهم من جديد حساب التكامل السابق.

التلميذ: $\int_1^2 x\, e^{x^2}\, dx = \frac{e^4 - e}{2}$.

الأستاذ: حسن، وبنفس الطريقة نحسب التكامل الثاني فنجد

$$\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln(x)}\, dx = [\ln(\ln(x))]_e^{e^2} = \ln(2)$$

ويجب على الأستاذ أن يقف على المكتسبات السابقة وتنظيم وتعديل أفكار التلاميذ وجعلها تساير بناء الدرس. حيث من الممكن أن يرجى تعديل بعض المفاهيم الخاطئة إلى حين مرحلة البناء.

(2) البناء (حوالي $25\ min$):

1. الأستاذ: يعطي تعليمة إنجاز السؤال الأول من النشاط 2 ثم يترك الفرصة للتلاميذ من أجل إيجاد أو توقع حلول ممكنة للنشاط فرادى وجماعات (في البداية يمكن القيام بالعمل فرادى وبعد ذلك يمكن لكل تلميذ أن يتحقق من نتائجه ومناقشتها مع زميله في المقعد...).
التلميذ: بعد وقت من التفكير والتشاور مع الزملاء، يخلص التلميذ إلى أن هذا النوع من التكامل ليس من النوع المدروس سلفا لأنه لايمكن إيجاد الدالة الأصلية (مرحلة اللاتوازن عند بياجي).

2. الأستاذ: يوجه التلاميذ إلى إنجاز السؤال الثاني من النشاط 2 ثم يترك الفرصة للتلاميذ من أجل إيجاد الحل.
التلميذ: يستعمل خاصية مشتقة جداء دالتين التي تم تشخيصها سابقا لإيجاد الحل.

الأستاذ: جيد.

الأستاذ: أحسب التكامل $\int_0^1 xe^x dx$.

التلميذ: يحسب التكامل باستعمال التقنية المستخلصة.

الأستاذ: يغير اختيار $u(x)$ و $v'(x)$ من أجل التأكيد على ضرورة حسن الاختيار في هذه الطريقة.

الأستاذ: بعد نقاش جماعي، يوجه الأستاذ التلاميذ إلى استخلاص الخاصية ثم تدوينها على السبورة ومطالبة التلاميذ بكتابتها في دفاتر الدروس حيث يركز على أن هذه الطريقة تسمى المكاملة بالأجزاء.

(3) التريض (حوالي $25\ min$):

الأستاذ: يطلب من التلاميذ حساب تكاملات على شكل $\int_a^b f(x)g(x)dx$. حيث يتم التمرن على تطبيق الخاصية على شكل

$$\begin{cases} u(x) = f(x) & \Longrightarrow u'(x) = f'(x) \\ v'(x) = g(x) & \Longrightarrow v(x) = G(x) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \int_a^b f(x)g(x)\ dx = [f(x)G(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)G(x)\ dx$$

ويعتمد الأستاذ في هذه المرحلة طريقة العمل الجماعي على السبورة. كما يحاول الأستاذ أن يزود التلاميذ ببعض المهارات المتعلقة باختيار u و v، وذلك بحساب التكاملات التالية:

$$\int_0^\pi x \sin\ (x)\ dx;\quad \int_1^e x \ln(x)\ dx;\quad \int_1^2 \ln(x)\ dx$$

(4) التقويم (حوالي $30\ min$):

يطلب الأستاذ من التلاميذ إنجاز التمرين 1 من الوثيقة المرفقة بشكل فردي في دفاتر البحث حتى يتمكن من الوقوف على مدى تحقق الأهداف التعلمية المسطرة. أما التمرين الثاني فيطلب من التلاميذ إنجازه بالمنازل.

الوثيقة المرفقة :

نشاط 1:

1. ذكر بالخاصيات الجبرية لحساب التكامل.

2. حدد مشتقة الدالة $f \times g$.

3. حدد مشتقة الدالة

$$F(x) = x\ln(x) - x$$

ثم استنتج قيمة التكامل

$$\int_1^e \ln(x)\, dx$$

4. أحسب التكاملين التاليين:

$$\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln(x)}\, dx; \quad \int_1^2 x\, e^{x^2}\, dx$$

نشاط 2:

1. احسب التكامل $\int_0^1 xe^x dx$.

2. لتكن u و v دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال I بحيث u' و v' متصلتان عليه.

- تحقق أن:

$$(\forall x \in I);\quad u(x)v'(x) = (uv)'(x) - u'(x)v(x)$$

- ليكن a و b عنصرين من I ، بين أن:

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

تمرين 1: أحسب التكاملات التالية:

$$\int_1^4 (3x+1)\sqrt{x}\,dx;\ \int_1^e (x+1)\ln(x)\,dx;\ \int_0^1 \ln(1+x)\sqrt{x}\,dx;$$
$$\int_0^1 \frac{x}{e^x}\,dx;\ \int_0^1 (x^2+x)e^x\,dx;\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(3x-\pi)\,dx.$$

تمرين 2:

1. تحقق أن

$$\frac{2x^2}{1-x^2} = -2 + \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}$$

ثم أحسب التكامل

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \ln(1-x^2)\,dx$$

2. ليكن n عدد صحيح طبيعي، أحسب التكاملات:

$$J_n = \int_a^b x^n e^x dx \text{ و } I_n = \int_a^b x^n \ln\ (x)dx$$

ثم استنتج

$$\lim_{n\to+\infty} J_n \text{ و } \lim_{n\to+\infty} I_n$$

5.5 المثال الخامس

في هذا المثال سنقترح طريقة لتقديم مقطع من درس "الدوال اللوغاريتمية والدوال الأسية" بالسنة الثانية بكالوريا من شعبة العلوم الرياضية. ولقد ارتأينا أن نقترح طريقة مخالفة للطرق الاعتيادية، حيث في اعتقادنا أن هذه الطريقة تمكن التلميذ من تلمس الدالة الأسية النيبيرية كما تمكن الأستاذ من تقديم الدالة الأسية قبل تقديم الدالة اللوغاريتمية.

◆ تقديم عام:

الأستاذ:
الموسم الدراسي:
المؤسسة:
المديرية الإقليمية:
المادة: الرياضيات
المستوى: الثانية بكالوريا
شعبة: علوم رياضية
عدد التلاميذ: 20
التاريخ:

الدرس: الدوال اللوغاريتمية والدوال الأسية
المقطع: **الدالة الأسية النبيرية**
المدة الزمنية: ساعتان
محتوى المقطع التعليمي:
- تعريف الدالة الأسية النيبيرية
- خصائص جبرية

◆ **الإطار البيداغوجي والديداكتيكي:**

• القدرات المنتظرة:

– القدرة على حل معادلات ومتراجحات ونظمات أسية نبيرية.

– القدرة على دراسة وتمثيل دوال تحتوي صيغها على الدالة الأسية النبيرية.

• الكفايات المستعرضة:

- التحليل؛
- التواصل؛
- ملكة استحضار الدالة الأسية في الفيزياء.

• التوجيهات التربوية:

- تعتبر النهايات السابقة حول الدالة اللوغاريتمية والدالة الأسية النبيرية بالاضافة إلى $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n}$ و $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n}$ و $\lim_{n\to-\infty} x^n e^x$ و $\lim_{x\to 0^+} x^n \ln(x)$ حيث $n \in \mathbb{N}^*$ نهايات أساسية؛
- تستعمل الدوال اللوغاريتمية والأسية في حل مسائل متنوعة؛
- تقديم دالة اللوغاريتم النبيري مباشرة بعد تقديم الاشتقاق والدوال الأصلية، كالدالة الأصلية للدالة $x \longmapsto \frac{1}{x}$ على المجال $]0, +\infty[$ والتي تنعدم في 1 أو تقديمها كالدالة العكسية للدالة الأسية النبيرية؛
- تقديم الدالة الأسية النبيرية إما كالدالة العكسية لدالة اللوغاريتم النبيري وإما كالحل الوحيد للمعادلة التفاضلية $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ أو كحل للمعادلة الدالية $f(x+y) = f(x) \times f(y)$؛
- تعريف العدد a^x باستعمال تعريف وخاصيات الدالة الأسية النبيرية.

• الصعوبات المتوقعة:

- مشتقة الدالة $f(-x)$ (تغييب مشتقة مركب دالتين)؛
- حل المعادلة $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ ؛

- إذا كانت مشتقة الدالة منعدمة فإن الدالة ثابتة؛
- التعليمة "بين أنه توجد" توحي للتلميذ أنه من الواجب إيجاد الصيغة الصريحة للدالة؛
- ...

• التعاقد الديداكتيكي:

- حساب الدالة المشتقة بدون تعليل قابلية الاشتقاق لا يعتبر برهانا كاملا؛
- عدم التأكد من شرط أو أكثر خلال تطبيق خاصية أو مبرهنة أو تعريف يعتبر برهانا غير كامل (ولو أن النتيجة صحيحة)؛
- وضع دوال مساعدة أمر مسموح به؛
- الأدوات المنطقية (وضع تكافؤ محل استلزام يعتبر خاطئا في الحالة التي يكون فيها الاستلزام العكسي خاطئا ويعتبر غير كامل في الحالة الأخرى)؛
- الخلط بين العطف المنطقي والفصل المنطقي يعتبر أمرا غير مسموح به؛
- ضرورة مشاركة الكل في جميع مراحل الدرس؛
- كتابة الأنشطة في دفتر التمارين؛
- كتابة ملخص الدرس في دفتر الدروس؛
- عدم تدوين أي شيء على الدفاتر إلا بإذن من الأستاذ؛
- حسن الإنصات سواء من طرف الأستاذ أو من طرف التلاميذ؛
- احترام آراء الزملاء واحترام آراء التلاميذ من طرف الأستاذ؛

- إمكانية مناقشة آراء واقتراحات الأستاذ؛

- توفر كل تلميذ على الأدوات الهندسية ودفتر للبحث؛

- احترام الوقت وعدم قبول أي تلميذ التحق بعد مرور 5 دقائق؛

- استعمال السبورة:

* تقسم السبورة إلى أربعة أجزاء،

* تخصيص الجزء الأيمن لتدوين التعاريف والخاصيات،

* تخصيص الأجزاء الثلاث المتبقية لحل المسألة مع رسم الأشكال على الجزء الأيسر،

* تخصيص الجزئين الخلفيين لكتابة نصوص المسائل والتمارين،

* الكتابة بخط واضح على السبورة؛

* في حالة عدم تواجد السبورة الخشبية (العادية) يمكن للأستاذ أن يعتمد تقسيما مناسبا للسبورة الموجودة مع احترام ما يتفق عليه.

• المكتسبات السابقة:

- الدوال العددية؛

- الاتصال والاشتقاق ودراسة الدوال؛

- الحساب الجبري.

• تعميم النتائج: التحضير للدالة الأسية ذات الأساس a.

• الامتدادات:

- امتدادات المفهوم بالنسبة لدروس مقبلة:

* المعادلات التفاضلية؛

* التكامل.

- امتدادات المفهوم بالنسبة لمواد أخرى:

* الفيزياء؛
* ...

- امتدادات المفهوم بالنسبة لمجالات أخرى:

* الاقتصاد؛
* الطب؛
* الإعلاميات (أنظمة الوقاية: خوارزميات ذات تركيب أسي).

• التقويم والدعم والمعالجة:

- أدوات التقويم:

* بطاقات التقويم: بطاقات تتضمن نسبة التلاميذ الذين انخرطوا في الدرس في كل مرحلة ومؤشرات يمكنها قياس التمكن من القدرات المنتظرة وتساعد على رصد الأخطاء، كما تتضمن ملاحظات الأستاذ حول مراحل الدرس والتدخلات غير المناسبة والتي قد توقظ تمثلات تحول دون نجاح الحصة أو تعمل على إنتاج عوائق قد تعرقل بناء المعرفة المرتبطة بالدالة الأسية من أجل استغلالها في الدعم والمعالجة وتعديل السيناريو في المستقبل؛
* أسئلة شفوية تتصدر وتتخلل مختلف فقرات الدرس؛
* تمرين 2 وتمرين 3 (أنظر الوثيقة 2).

- الدعم والمعالجة:

* دعم فوري؛
* استحضار الأخطاء الشائعة والأخطاء المتوقعة؛
* تحضير وضعيات متنازعة.

• إبستمولوجيا:
نشأة الدالة الأسية/صفتها اللاجبرية/علاقة العدد e بالمتواليات وتحديد قيم مقربة له.

لقد أخذ مفهوم الدالة وإلى حدود القرن السابع عشر طابعا عاما، حيث تم الترميز لها ب $f(x)$ من طرف العالم السويسري بيرنولي (J. Bernoulli [1667-1748]) لكن التسمية كانت من تأسيس العالم لايبنز (G. W. Leibniz [1646-1716]) وقد تطرق إليها العالم أوليـر (L. Euler [1707-1783]) حيث عرفها على أنها:

"تعبير تحليلي مؤلف بطريقة عشوائية من كمية متغيرة وأعداد أو كميات ثابتة".

"Expression analytique composée d'une manière quelconque d'une quantité variable et de nombres ou de quantités constantes."

نشأة الدالة الأسية هي ثمار أعمال قديمة لعدد من العلماء من قبيل بيرنولي وأولير ولايبنز، حيث استحضروا الجداول اللوغاريتمية. لكن الرمز e كان غائبا في هذه الجداول غير أن أولير كان أول من تطرق إليه بشكل خاص سنة 1748. كما أنه قدم عرضا حول الدوال غير الجبرية الأساسية (Transcendantes élémentaires) من قبيل الدالة الأسية واللوغاريتمية والمثلثية التي تم التطرق إليها لأول مرة، حيث وجدت لها تطبيقات مهمة خصوصا في الفيزياء. ولتسليط الضوء أكثر على العدد e يمكن الاطلاع على [12].

♦ **المستلزمات:**

- الأدوات الرقمية:

– حاسوب خاص بالأستاذ؛

– 5 حواسيب يحضرها بعض التلاميذ؛

– عارض؛

– برنام *Excel*.

- مبادئ في المعلوميات:

– الإلمام بمبادئ أولية في المعلوميات؛

– الإلمام بمبادئ أولية لبرنام *Excel*.

- الأدوات اللوجيستيكية:

– الأدوات الهندسية.

♦ **التحضير:**

- القاعة: سيتم استغلال قاعة الدرس.
- الحواسيب: يتم الاتفاق مع التلاميذ الخمس الذين سيحضرون حواسيبهم.
- المستنسخات:

– وثيقة رقم 1 تحتوي على نشاط 2 وتنسخ في 20 نسخة؛

– وثيقة رقم 2 تحتوي على ثلاثة تمارين وتنسخ في 20 نسخة.

- السيناريو: تحضير السيناريو المتوقع (أنظر أسفله).

• المراحل:

• التشخيص (حوالي $15\ min$)

نشاط 1:

1. ذكر بخاصية مشتقة مركب دالتين.

2. لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

أوجد مشتقة الدالة $g : x \longmapsto f(-x)$.

3. ما هي قيمة حقيقة العبارة

(P): " إذا كانت f دالة حيث $f'(x) = 0$ فإن f ثابتة".

إيضاحات: السؤال الأول شفاهيا، بينما الثاني يكتب على السبورة وتتم الإجابة عنه في دفاتر البحث بشكل فردي.

• البناء: (حوالي $50\ min$)

نشاط 2:

أنظر وثيقة رقم 1.

إيضاحات: بعد أن يوزع الأستاذ الوثيقة رقم 1، يطلب من التلاميذ الإجابة عن الجزء الأول مثنى مثنى. ويهدف هذا الجزء إلى خلخلة المعارف (مرحلة اللاتوازن).

بعد المناقشة الجماعية وعدم التوصل إلى الحل باستعمال المعارف السابقة يوجه الأستاذ التلاميذ إلى القيام بالجزء الثاني من النشاط، حيث سنستعمل البرنام من أجل تلمس الحل. وفي هذه المرحلة يلجأ الأستاذ إلى تسليط النتائج باستعمال العارض مع المناقشة الجماعية مع مطالبة التلاميذ بكتابة الإجابات في دفاتر البحث والنتائج النهائية بعد المناقشة في دفاتر التمارين.

بالنسبة للجزء الثالث من النشاط ينجز في دفاتر البحث بشكل ثنائي.

• المحتوى (حوالي $05\ min$)

تعريف: توجد دالة وحيدة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وتحقق

$$\begin{cases} f'(x) = f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

وتسمى الدالة الأسية النيبيرية ونرمز لها ب $\exp$.

خاصية 1: ليكن a و b عددين حقيقيين، إذن

$$\begin{cases} \exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b) \\ \exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)} \end{cases}$$

خاصية 2: الدالة $x \longmapsto \exp(x)$ دالة موجبة قطعا على $\mathbb{R}$ أي:

$$(\forall\, x \in \mathbb{R}),\ \ \exp(x) > 0$$

إيضاحات: كتابة المحتوى في دفتر الدروس.

• الترييض (حوالي $20\ min$)

تمرين 1 (وثيقة رقم 2).

• التقويم: (حوالي $20\ min$)

تمرين 2 (وثيقة رقم 2).

تمرين 3 (وثيقة رقم 2).

إيضاحات: هذه التمارين هي تحضير للتلاميذ من أجل البرهنة على أن دالة اللوغاريتم النيبيري هي الدالة العكسية للدالة الأسية النيبيرية.

• السيناريو المتوقع:

(1) التشخيص (حوالي $10\ min$):

يقوم الأستاذ بطرح أسئلة شفوية أو كتابية من أجل التأكد من اكتساب مفهوم الاشتقاق وخاصة مشتقة مركب دالتين، من قبيل:

1. الأستاذ: من يذكرنا بخاصية اشتقاق مركب دالتين (شفويا).

التلميذ: قد تكون هناك أجوبة متعددة ولكن تأخذ طابعا تلقائيا وعاما

$$(gof)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x)$$

الأستاذ: يتدخل للتذكير ببنود التعاقد الديداكتيكي (بنود مصرح بها وبالتالي فهذا الجواب لا يعتبر كاملا) ليطلب من جديد شروط الخاصية.

التلميذ: بعد نقاش جماعي يتم التذكير بالخاصية بصيغتها الصحيحة.

الأستاذ: يكلف أحد التلاميذ بتدوين الخاصية على السبورة.

2. الأستاذ: أوجد مشتقة الدالة $x \longmapsto f(-x)$ (كتابيا).

التلميذ: تعميم النموذج $(f(x))' = f'(x)$ لكتابة $(f(-x))' = f'(-x)$ رغم التذكير بالخاصية.

الأستاذ: هل أنتم متفقون مع زميلكم؟

التلميذ: لا.

الأستاذ: لماذا؟

التلميذ: الدالة عبارة عن مركب دالتين.

الأستاذ: إذن حاولوا تطبيق خاصية مشتقة مركب دالتين.

التلميذ: نعتبر الدالة g مركب الدالتين f و $h : x \longmapsto -x$.

الدالة h دالة معرفة من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$ وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$، و $h'(x) = -1$ لكل x من $\mathbb{R}$.

ولدينا f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

إذن الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا $g'(x) = f'(h(x)) \times h'(x) = -f'(-x)$ لكل x من $\mathbb{R}$.

3. الأستاذ: ما هي قيمة حقيقة العبارة

(P): " إذا كانت f دالة حيث $f'(x) = 0$ فإن f ثابتة".

التلميذ: العبارة (P) عبارة صحيحة.

الأستاذ: نعم، هل هناك جواب آخر؟

التلميذ: ليس هناك جواب آخر.

الأستاذ: لتكن f الدالة المعرفة ب: $f(x) = \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x})$.
حددوا $f'(x)$.

التلميذ: $f'(x) = 0$.

الأستاذ: أحسبوا $f(1)$ و $f(-1)$.

التلميذ: $f(1) = \frac{\pi}{2}$ و $f(-1) = -\frac{\pi}{2}$.

الأستاذ: إذن ماذا تلاحظون؟

التلميذ: نلاحظ أن الدالة ليست ثابتة.

التلميذ: إذن الخاصية خاطئة.

الأستاذ: أية خاصية؟

التلميذ: إذا كانت مشتقة دالة منعدمة فإن هذه الدالة تكون ثابتة.

الأستاذ: يذكر من جديد بأحد بنود العقد الديداكتيكي (لاستعمال تعريف أو خاصية أو مبرهنة في الرياضيات فلا بد من التأكد من شروطها أولا)، ثم يطلب منهم الخاصية كاملة.

التلميذ: يذكر بالخاصية ويكتبها على السبورة.

الأستاذ: إذن ماهو الشرط الموجود في الخاصية والذي لم نتأكد منه؟

التلميذ: المشتقة منعدمة على مجال.

الأستاذ: يتدخل لإثارة أهمية المجال وتعديل تمثلات التلاميذ. ثم يسأل عن الخلاصة من هذا.

التلميذ: الخلاصة من هذا هو ضرورة التأكد من الشروط قبل استعمال أي تعريف أو خاصية أو مبرهنة.

(2) البناء (حوالي $50\ min$):

بعد أن يوزع الأستاذ الوثيقة رقم 1، يطلب من التلاميذ إنجاز الجزء الأول من النشاط 2 بشكل فردي ويمهلهم بعض الوقت. هنا سيحاول جل التلاميذ تعويض الدالة بدوال اعتيادية سبق التطرق إليها، لكن دون جدوى وبالتالي قد يكون انعكاسهم بأنه لايمكن.

التلميذ: لاتوجد أية دالة تحقق المعادلة.
الأستاذ: هل تحققتم بالنسبة لجميع الدوال العددية؟
التلميذ: لا.
الأستاذ: هل يمكن استعمال طريقة أخرى؟
التلميذ: صمت.
الأستاذ: يوجه التلاميذ إلى أنجاز الجزء الثاني في مجموعات مكونة من أربعة تلاميذ. حيث سيقوم كل من الأستاذ والتلاميذ بإنشاء سحابة النقط الممثلة للجدول.

1. الأستاذ: لتكن g الدالة التي منحناها يقارب السحابة التي هي أمامكم على المجال $[0,+\infty[$، ثم يعمل على رسم منحنى الدالة g.
هل هذه الدالة قابلة للاشتقاق على المجال $[0,+\infty[$؟
التلميذ: نعم.
الأستاذ: كيف عرفت ذلك؟
التلميذ: أجوبة متعددة من بينها أنه لا توجد نقطة "مزواة" على منحنى الدالة g.
الأستاذ: ماذا نقصد بنقطة "مزواة"؟
التلميذ: يعطي تعريف نقطة مزواة.
الأستاذ: يتدخل من أجل تثبيت مفهوم التأويل الهندسي للاشتقاق.

الأستاذ: كيف نبين أن هذه الدالة تحقق النظمة $(**)$.

التلميذ: نحسب $\frac{g'(a)}{g(a)}$ حيث a يأخذ قيما من المجال $]0,+\infty[$.

الأستاذ: ينشئ جدولا على السبورة مع أخذ قيم للعدد a تكون محضرة مسبقا وذلك من أجل تسهيل الحساب.

الأستاذ: ماذا تلاحظون؟

التلميذ: $\frac{g'(a)}{g(a)}$ عدد ثابت.

الأستاذ: ماذا نستنتج إذن؟

التلميذ: نستنتج أن الدالة g تحقق النظمة $(**)$، وأن $\alpha = 0,04$.

الأستاذ: جيد جدا.

2. الأستاذ: استنتج وجود دالة h قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ وتحقق $(*)$.

التلميذ: نضع $h(x) = \frac{1}{1,313} \cdot g(\frac{x}{0,04})$.

الأستاذ: ممتاز، كيف فكرت في هذا؟

التلميذ: الشرط $h(0) = 1$ هو الذي ساعدني على التفكير في صيغة الدالة h.

الأستاذ: جيد.

ثم يوضح الأستاذ أنه رغم أننا لا نعرف الصيغة الصريحة للدالة h إلا أنها موجودة وتحقق المطلوب ومنحناها يقارب السحابة.

الأستاذ: يطلب من التلاميذ الإجابة على الجزء الثالث من النشاط2.

1. الأستاذ: كيف نبين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

التلميذ: الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$.

ولكل $a > 0$ لدينا $f(a) = h(a) = h'(a) = f'(a)$.

ليكن $a < 0$ ولنبين أن الدالة f قابلة للاشتقاق في a.

ليكن $x < 0$ حيث $x \neq a$.

إذن

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} &= \lim_{x \to a} \frac{\frac{1}{h(-x)} - \frac{1}{h(-a)}}{x - a} \\
&= \lim_{x \to a} \frac{h(-a) - h(-x)}{h(-x)h(-a)(x - a)} \\
&= -\lim_{x \to a} \frac{h(-x) - h(-a)}{h(-x)h(-a)(x - a)}
\end{aligned}$$

نضع $t = -x$، إذن $x \longrightarrow a \Longleftrightarrow t \longrightarrow -a$.

ومنه

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} &= -\lim_{t \to -a} \frac{h(t) - h(-a)}{h(t)h(-a)(-t - a)} \\
&= \lim_{t \to -a} \frac{1}{h(t)h(-a)} \times \lim_{t \to -a} \frac{h(t) - h(-a)}{(t - (-a))} \\
&= \frac{1}{h(-a)^2} \times h'(-a) \\
&= \frac{h(-a)}{h(-a)^2} \\
&= \frac{1}{h(-a)} \\
&= f(a)
\end{aligned}$$

وبالتالي فإن الدالة f قابلة للاشتقاق على $]-\infty, 0[$.

ولكل $a < 0$ لدينا $f'(a) = f(a)$.

بالنسبة لقابلية اشتقاق الدالة f في 0 نبين أولا أن الدالة f قابلة للاشتقاق في 0 على اليمين باستعمال الدالة h ثم نستعمل نفس الطريقة السابقة لكي نبين أن الدالة f قابلة للاشتقاق في 0 على اليسار. ثم نستنتج أن $f'_d(0) = f'_g(0) = 1$ وهذا يعني أن الدالة f قابلة للاشتقاق في 0 وأن $f'(0) = 1$.

ثم نستنتج أن الدالة f تحقق (*).

الأستاذ: ممتاز.

2. الأستاذ: بين أنه توجد دالة وحيدة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وتحقق (*).

التلميذ: لتكن ℓ دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وتحقق (*).

نضع $\varphi(x) = \frac{\ell(x)}{f(x)}$ لكل x من $\mathbb{R}$.

الدالة φ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولكل x من $\mathbb{R}$ لدينا $\varphi'(x) = 0$.

إذن φ دالة ثابتة و $\varphi(x) = \varphi(0) = \frac{\ell(0)}{f(0)} = 1$ لكل x من $\mathbb{R}$.

إذن $\ell(x) = f(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$.

وبالتالي توجد دالة وحيدة f معرفة على $\mathbb{R}$ وتحقق (*).

3. بالنسبة للجزء الرابع من النشاط 2 فينجز جماعة على السبورة، حيث سيستغله الأستاذ من أجل التذكير بكل ما أنجز سابقا والوقوف عند التقنيات والمهارات التي استعملت في الإجابة.

لتتم بعد ذلك صياغة التعريف والخاصيتين من طرف التلاميذ وبتوجيه من الأستاذ.

في الأخير يقدم الأستاذ نبذة عن هذه الدوال وتطبيقاتها المتعددة وخصوصا في الفيزياء والإعلاميات وذلك بعد أن يكون التلاميذ قد انتهوا من كتابة المحتوى في دفاتر الدروس.

(3) التريض (حوالي $20\ min$):

بعد أن يوزع الأستاذ الوثيقة رقم 2، يطلب من التلاميذ إنجاز التمرين الأول في دفاتر البحث مثنى مثنى، ثم يكلف تلميذا من كل زوج

بتصحيح سؤال على السبورة مع النقاش الجماعي من أجل استغلال هذا التمرين في تثبيت المفهوم.

(4) **التقويم** (حوالي $20\ min$):

يطلب الأستاذ من التلاميذ إنجاز التمرين الثاني ثم التمرين الثالث من الوثيقة رقم 2 في دفاتر البحث بشكل فردي حتى يتمكن الأستاذ من الوقوف على التعثرات المحتملة.

وثيقة رقم 1:

نشاط 2:

(I) بين أنه توجد دالة f معرفة من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$ وتحقق

$$(*)\begin{cases} f'(x) = f(x); \quad (\forall\ x \in \mathbb{R}) \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

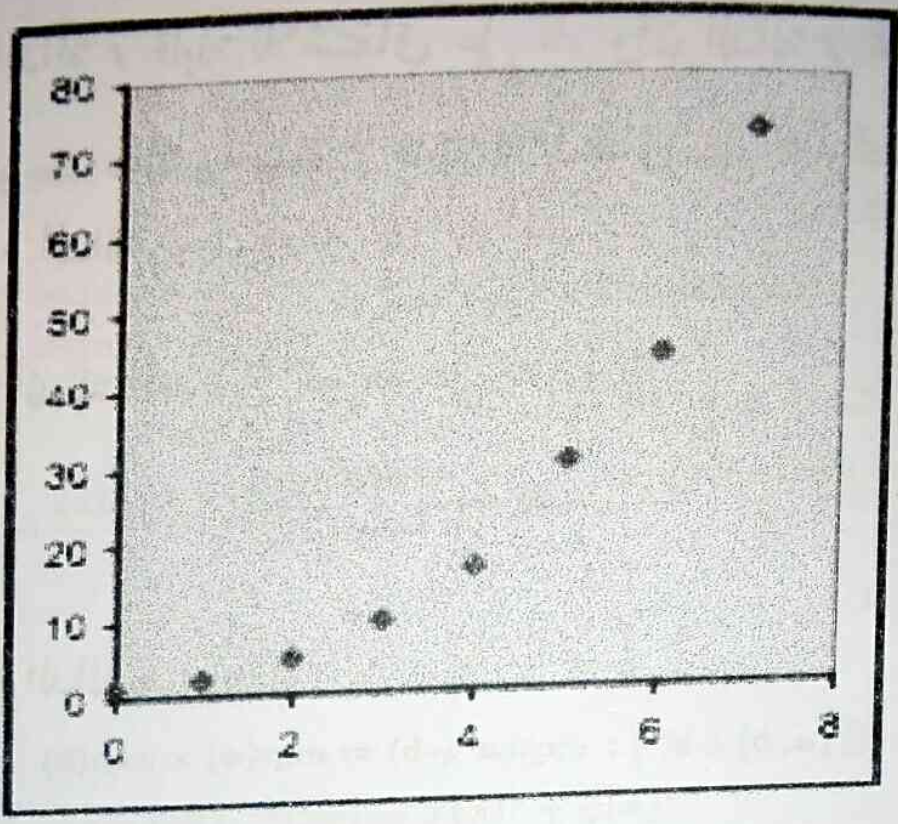
(II) الجدول التالي يبين عدد الحواسيب (بالملايين) ذات القدرة العالية في العالم من سنة 1993 وحتى سنة 2000.

التاريخ	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
عدد الحواسيب	1,313	2,217	4,825	9,472	16,146	29,670	43,230	72,398

نقبل أن تقدم هذه الحواسيب يبقى مستمرا في السنوات القادمة وبنفس الطريقة.

نضع $t = 0$ بالنسبة للسنة 1993.

سحابة النقط الممثلة لهذه المعطيات في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ هي كالتالي:



1. بين أن الدالة g التي منحناها مقارب لسحابة النقط في نفس المعلم على المجال $[0,+\infty[$ قابلة للاشتقاق على $[0,+\infty[$ وتحقق النظمة

$$(**)\begin{cases} g'(x) = \alpha\, g(x) \\ g(0) = 1,313 \end{cases}$$

حيث α عدد حقيقي وجب تحديده.

2. استنتج وجود دالة h قابلة للاشتقاق على $[0,+\infty[$ وتحقق

$$\begin{cases} h'(x) = h(x); \quad (\forall\, x \in [0,+\infty[) \\ h(0) = 1 \end{cases}.$$

(III) لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = h(x); \quad (\forall\, x \in [0,+\infty[) \\ f(x) = \frac{1}{h(-x)}; \quad (\forall\, x \in]-\infty, 0]) \end{cases}$$

1. بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$. وأن الدالة f تحقق $(*)$.

2. بين أنه توجد دالة وحيدة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وتحقق $(*)$.
نرمز لهذه الدالة ب: $\exp$.

(IV) لتكن k الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي:

$$k(x) = \frac{\exp(a+x)}{\exp(a)}$$

1. باستعمال الدالة k بين أن:

$$(\forall\ (a,b) \in \mathbb{R}^2)\ ;\ \exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$$

2. ثم استنتج أن:

- $(\forall\ (a,b) \in \mathbb{R}^2)\ ;\quad \exp(a-b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$
- $(\forall\ a \in \mathbb{R})\ ;\ \exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)}$
- $(\forall\ x \in \mathbb{R})\ ;\ \exp(x) > 0$

وثيقة رقم 2 :

تمرين 1:

1. بسط التعبيرين:

$$\frac{\exp(a+b)^2}{\exp(a-b)^2} \text{ و } \exp(\cos^2(a)) \times \exp(\sin^2(a))$$

2. نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على $\mathbb{R}$ بما يلي:

$$g(x) = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2} \text{ و } f(x) = \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}$$

(ا) بين أن:

$$(\forall\, x \in \mathbb{R}),\ f(x)^2 - g(x)^2 = 1$$

(ب) بين أن:

$$(\forall\, x \in \mathbb{R}),\ f(2x) = f(x)^2 + g(x)^2$$

(ج) بين أن:

$$(\forall\, x \in \mathbb{R}),\ g(2x) = 2f(x) \times g(x)$$

تمرين 2:

1. ليكن $a \in \mathbb{R}$، بين أن المعادلة: $\exp(x) = a$ تقبل حلا وحيدا في $\mathbb{R}$.

2. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة:

$$\exp(x)\,(\exp(x) - 2) - 3 = 0$$

3. حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية:

$$\exp(x)\,(\exp(x) - 2) - 3 \geqslant -4 \text{ و } \exp(x)\,(\exp(x) - 2) - 3 \leqslant 0$$

تمرين 3: سعر سهم شركة بالدرهم انطلاقا من السنة 1990، تم التعبير عنه رياضيا بدالة f معرفة على المجال $[0,+\infty[$ حيث نضع $x = 0$ بالنسبة للسنة 1990 بما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = 18,9x + 35,6; & 0 \leqslant x \leqslant 4 \\ f(x) = \exp(-0,58x + 6,85); & x > 4 \end{cases}$$

1. أدرس إشارة الدالة f' ثم f واستنتج تغيرات f.

2. حل المتراجحة $f(x) \leqslant 1$ واستنتج في أية سنة تصبح قيمة السهم أصغر من درهم واحد.

المصادر

[1] N. Arsenault et autres, *Gestion d'une classe, communauté d'apprentissage*, Phase 3 du projet de recherche, Partenariat PROTIC-FCAR-TACT, (2001). http://www.Pz.harvard.edu/PIs/HG.htm

[2] M. Artigue, *Epistémologie et didactique*, Recherches didactique des Mathématiques, Vol. **10** (23), (1990), p. 241-286, Université Paris 7.

[3] J. P. Astolfi, *Quelques logiques de construction d'une séquence d'apprentissage en sciences*, ASTER, Vol. **13**, (1991), p. 157-186.

[4] J. P. Astolfi, B. Peterfalvi et A. Vérin, *Compétences méthodologiques en sciences expérimentales*, INRP, Paris, (1991).

[5] J-P. Astolfi et M. Develay, *La didactique des sciences*, QSJ, Vol. **2448**, Ed. PUF, Paris, (1989).

[6] G. Bachelard, *La formation de l'esprit scientifique*, Paris, Librairie J. Vrin, (1938).

[7] J. M. Barbier, *L'évaluation en formation*, PUF, Paris, (1985).

[8] E. Barbin, *La démonstration mathématique : significations épistémologiques et questions didactiques*, Bulletin APMEP, Vol. **366**, (1988).

[9] R. Bibeau, *Guide de rédaction et de présentation d'un scénario pédagogique et d'une activité d'apprentissage*, Le portail des TIC. http://ntic.org/guider/textes/div/bibscenario.html, (dernière consultation 15/02/2017).

[10] A. Bonboir, *La docimologie*, PUF, Coll. "L'Éducateur", Paris, (1972).

[11] A. Bouvier, *La mestification mathématiques*, Herman, (1981).

[12] A. Bouvier, *Didactiques des mathématiques, le dire et le faire*, Cedic/Nathan, Paris, (1986).

[13] C. Brassard and A. Daele, *Un outil pour concevoir un scénario pédagogique intégrant les TIC*, Environnements informatiques pour l'apprentissage humain, Strasbourg, (2003).

[14] G. Brousseau, *La problématique et l'enseignement des mathématiques*, XXVIIIème Rencontre de la CIEAEM, Louvain la Neuve, (1976).

[15] G. Brousseau, *Problèmes de didactiques des décimaux*, R.D.M, Vol. **2** (1), (1981).

[16] G. Brousseau, *Les obstacles épistémologiques et les problèmes en Mathématiques*, Recherches en didactique des Mathématiques, Vol. **4** (2),(1983), p. 164-198.

[17] G. Brousseau, *Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques*, Communication au colloque international : Construction des savoirs-obstacles et conflis, Montréal, (1986).

[18] G. Brousseau, *Théorisation des phénomèmes d'enseignement des mathématiques*, Thèse d'Etat, Université de Bordeaux I, (1986).

[19] G. Brousseau, *Theory of didactical situations in Mathematic*, Didactique des mathématiques 1970-1990, Mathematics education library, Kluwer academic publishers, New York/Boston/Dordrechet/London/Moscou, (2002).

[20] M. Camille, *Approche didactique des apprentissages*, E. Robert, Lyon, (1987).

[21] J. Cardinet, *Evaluation scolaire et mesure*, Bruxelles De Boeck, (1986).

[22] Y. Chevallard et M. A. Johsua, *Un exemple d'analyse de la transposition didactique : la notion de distance*, Recherche en didactique des mathématique, Vol. **3** (2), (1982), p. 157-239.

[23] Y. Chevallard, *Le concept de rapport au savoir. Rapport personel, rapport institutionnel, rapport officiel*, Actes de séminaire de didactique des Mathématiques et de l'informatique, Université de Grenoble I, (1989).

[24] Y. Chevallard, *La transposition didactique - Du savoir savant au savoir enseigné*, La pensée sauvage, deuxième édition, Grenoble, (1991).

[25] Y. Chevallard, *Concepts fondamentaux de la didactique : perspective apportée par une approche anthropologique*, Recherche en didactique des mathématique, Vol. **12** (1), (1992), p. 73-112.

[26] B. Cornu, *Apprentissage de la notion de limite : Conceptions et Obstacles*, Thèse de 3-ème cycle, Université de Grenoble I, (1983).

[27] R. Douady, *La didactique des mathematiques à l'heure actuelle*, I.R.E.M, Vol. **6**, Paris VIII, (1986).

[28] R. Douady, *Dialectique outil-objet, jeux des cadres*, Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. **7** (2), (1986).

[29] W. Doise et G. Mugny, *Le développement social de l'intélegence*, Inter-Editions, (1981).

[30] A. Duroux, La valeur absolue : difficultés majeures pour une notion mineure, Petit x, Vol. **3**, (1983).

[31] Euclide, *Les éléments*, Traduction et commentaires de B. Vitrac, Paris, (Presses Universitaires de France), 1990-1994.

[32] J. Fijalkow et T. Nault, *Introduction. La gestion de la classe : d'hier à demain*, Revue des sciences de l'éducation, Vol. **25** (3), (1999), p. 451-466.

[33] R. M. Gagné, *Les principes fondamentaux de l'apprentissage*, Trad. R. Brien et R. Paquin, H. R. W., Montréal, (1976).

[34] G. Glaeser, *Epistémologie des nombres relatifs*, Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. **2** (3), (1986), p. 303-346.

[35] P. Glaister, *Fibonacci numbers - finite and infinite series*, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, Vol. **27** (3), (1996), p. 429-441.

[36] N. Herscovics, *The understanding of some algebraic concepts at the secondary level*, Proceding of the third conference of PME, Tall, D. (éd) Warwick, (1979).

[37] J. Hiebert, *Signposts for teching mathematics through problem-solving*, Prekin der garten - Grade 6, Reston, (2003).

[38] D. Huinker and J. L. Freckmann, *Focusing conservations to promote teacher thinking*, Teaching Children Mathematics, Vol. **10** (7), (2004), p. 352-357

[39] L. Lafortune et B. Massé, *Chères mathématiques, susciter l'expression des émotions en mathématiques*, Presses de l'université de Québec, (2002).

[40] L. Lafortune et autres, *Conceptions, croyances et représentations en maths, sciences et technos*, Presses de l'université de Québec, (2003).

[41] G. et V. de Landsheere, *Les objectifs de l'éducation*, PUF, Paris, (1976).

[42] G. de Landsheere, *Dictionnaire de l'évaluation et de la recherche en éducation*, P. U. F. Paris, (1979).

[43] H. Lebesgue, *La mesure des grandeurs*, A. Blanchard, (1975).

[44] S. Libeskind, *A problem solving approach to teaching mathematics*, Educational studies in mathematics, Vol. **8**, (1977), p. 167-179.

[45] R. F. Mager, *Comment mesurer les résultats de l' enseignement*, Bordas, Paris, (1986).

[46] Ph. Meirieu, *Apprendre ...oui, mais comment ?*, ESF, 3 éd, Augmentée d'un guide méthodologique, Paris, (1988).

[47] B. Massé et L. Lafortune, *Chères mathématiques, susciter l'expression des émotions en mathématiques*, Presses de l'université de Québec, (2002).

[48] J. Piaget, *les relations entre l'intlligence et l'affectivité dans le développement de l'enfant*, Fondation Jean Piaget, Centre de documentations universitaire, Paris, (1954).

[49] J. Piaget, *L'équilibration des structures cognitives, problème central du développement, études d'épistémologie génétique*, PUF, Vol. **33**, Paris (1975).

[50] H. Pieron, *Examen et docimologie*, PUF, Paris, (1969).

[51] G. Polya, *La découverte des mathématiques, les modèles une méthode générale*, Dunod, Paris, (1967).

[52] G. Ricco, G. Vergnaud and A. Rouchier, *Représentation du volume et arithmétisation- entretiens individuels avec les élèves de 11 ans à 15 ans*, RDM, Vol. **4** (1), (1983).

[53] J. Rogalsky, R. Samurçay and G. Ricco, *Analyse du prétest/postest sur le vomume*, RDM, Vol. **4** (1), (1983).

[54] X. Rogers, *L'évaluation des compétences des élèves : enjeux et démarches*, Agence Intergouvernementale de la Francophonie : séminaire de juillet 2003 à Yaoundé.

[55] G. Vergnaud, *Quelques orientations théoriques et méthodologiques des recherches françaises en didactique des mathématiques*, Acte de congrès PME, Vol. **2**, Grenoble (1981), p. 7-17.

[56] G. Vergnaud, *L'enfant, la mathématique et la réalité*, Berne, Peter Lang, (1981).

[57] G. Vergnaud, *Didactique du concept de volume*, Recherches en didactiques des Mathématiques, Vol. **4** (1), (1983), p. 9-25.

[58] M. Verret, *Le temps des études*, Paris, Librairie Honoré Champion, (1975).

[59] L. S. Vygotsky, *Mind in society, The developement of higher psychological processes*, University London, England, Press, (1978).

[60] IREM de Strasbourg, *Le livre du problème*, Tomes **1 à 6**, Cedic, (1973).

[61] الميثاق الوطني للتربية والتكوين، المملكة المغربية، (2000).

[62] الكتاب الأبيض، المملكة المغربية، وزارة التربية الوطنية، (يونيو 2000).

[63] التوجيهات التربوية والبرامج الخاصة بتدريس مادة الرياضيات بسلك التعليم الثانوي التأهيلي، المملكة المغربية، وزارة التربية الوطنية والتعليم العالي وتكوين الأطر والبحث العلمي، (نونبر 2007).

المحتويات

محمد طلبي
أستاذ باحث في الرياضيات
وديداكتيك المادة
المركز الجهوي لمهن التربية
والتكوين لجهة الشرق
وجدة
talbimm@gmail.com

محمد الطالبي
أستاذ باحث في الرياضيات
وديداكتيك المادة
المركز الجهوي لمهن التربية
والتكوين لجهة الشرق
وجدة
ksirat1971@gmail.com

لماذا هذا الكتاب؟

إننا نسعى، من خلال هذا العمل، إلى التحاور مع المهتمين بديداكتيك الرياضيات، والذين سبق لهم أن وضعوا شروطا مسبقة على أجرأة بيداغوجيات حديثة، حيث أسسوا طرقا ومقاربات ساهمت في تقدم البيداغوجيات التي لها ارتباط بالقسم، والتي تسعى إلى مساعدة الأستاذ للقيام باختيارات ديداكتيكية ملائمة، واعتماد طرق ومقاربات أكثر فعالية، التي بدورها تضمن انخراط أكبر عدد ممكن من المتعلمين وتسهم في تنمية طرق تفكيرهم وتفاعلاتهم، وتختتم بتعلمهم. وعليه فإن هذا الكتاب موجه لكل المهتمين بتدريس الرياضيات بالتعليم الثانوي من أساتذة (ممارسين أو متدربين)، ومن مرشدين تربويين، ومن باحثين في ديداكتيك الرياضيات، حيث يهدف أساسا إلى تطوير ممارسات أستاذ الرياضيات داخل الفصل.

الثمن: 50 درهم

IMPRIMERIE JOUSSOUR
40، شارع رمضان الكاضي - وجدة
الهاتف/الفاكس: 85 31 70 36 05
Imp_eljoussour@yahoo.fr