البرامج الدراسية،أصل الصعوبات

من اعداد محمد كمال، مفتش متقاعد لمادة الرياضيات

إذا سلّمنا مع بول فاليري بأننا "لا نفكر إلا على أساس النماذج" وجب أن نفهم كيف تظهر بعض صعوبات تعلم مادة الرياضيات ضمن بعض الشروط التي تفرضها طريقة تدريس المادة وبرامجها، أي منزلة يحتلها الاهتمام بهذه الصعوبات في بناء المناهج الدراسية؟. وهل يعتبر وجود صعوبات تعلم هذه المادة من مظاهر فشل أساليب تدريس مادة الرياضيات؟.

إن تحقيق هذا الأمر يستدعي ربط موضوع الصعوبات الداخلية لتدريس مادة الرياضيات ببعض الأمثلة من تلك الصعوبات التي تعترض التلميذ عند تناوله مفاهيم مادة الرياضيات، ومحاولة فهم الأسباب المؤدية لها.

المعدلات

وعند الحديث عن الصعوبات التي تعترض التلاميذ في مجالات حل المعادلات، فإنه في الغالب ما يتم اختزالها في الصعوبات الناتجة عن عدم قدرة التلميذ على القيام بعمليات حسابية على المرموز. فالمعالجة في هذه الحالة تتم عن طريق التمارين التكرارية، حيث يكون التقليد وسيلة تجعل التلميذ يستطيع القيام بحل مجموعة كبيرة من المعادلات، وفي المحصلة، يعتقد أن التلميذ قد استطاع تجاوز هذه الصعوبة، ويتم التناسي بأن التلميذ قد تعلم بالتقليد فقط، الأمر الذي لا يضمن الاستمرارية في الحفاظ على هذا التوازن.

وقد لا يجد التلميذ صعوبة في حل المعادلة $x - 3 = 0$ ولكنه يقع في الخطأ عندما نطالبه بحل المعادلة $x + 3 = 0$، ولمعالجة هذا الخطأ لا يكفي إعادة تذكير التلميذ بقاعدة، أو تقديم نموذج للحل. وربما يرجع الخطأ المرتكب إلى كيفية تقديم الأعداد العشرية السالبة. فقد جرت العادة أن يقدم العدد العشري السالب مقرونا بقوسين، كأنهما جزء لا يتجزأ من العدد، ومن خلال بعض التمارين المتداولة، يتم تكريس هذه الطريقة. ومن أجل التأكد من هذه الفرضية وجب وضع أسئلة حول العمليات على الأعداد العشرية النسبية، السالبة منها على وجه الخصوص، مثل أحسب المجموع التالي: $-6,2 + 5$، ....

وبالرجوع إلى المعادلة الأنفة الذكر ومن أجل مقاربة علمية لهذا الخطأ يمكن طرح عدة أسئلة على التلميذ، مثل أكتب هذه المتساوية على شكل آخر؟ وقد لا يجد المدرس جوابا عن هذا السؤال، لأن المجيب عن هذا السؤال هو الذي قد استوعب أحد الأمرين: إما استوعب أن حل معادلة يأتي عن طريق كتابتها على أشكال مختلفة، أو إما استوعب أنه من الممكن التعبير عن جمع عددين عشريين كفرق عددين عشريين. وإذا لم يحصل ذلك فيمكن للمدرس الاستمرار في طرح الأسئلة، مثل: أحسب$3 - (-3)$ ثم حل المعادلة $x - (-3) = 0$. وإذا استعصى ذلك على التلميذ، فربما وجد هذا التلميذ صعوبة في التعامل مع المرموز. وفي هذه الحالة وجب على المدرس تقديم المعادلات من الدرجة الأولى بمجهول واحد انطلاقا من وضعيات ملء الفراغ المعمول بها في التعليم الابتدائي،وفي هذا الصدد يمكن طرح أسئلة على النحو: أملء ما يلي بما يناسب $\ldots + 2 = 0$ أو $\ldots + 3 = 5.1$ أو $2 \times \ldots + 3 = 7.5$.

وقد نجد مصدرا آخر لهذه الصعوبات في عدم التنصيص الصريح على قاعدة تساوي عددين عشريين نسبيين، عندما نكون بصدد دراسة الأعداد العشرية النسبية لأول مرة ، بمعنى أن المتابعة التعليمية لا تتطرق إلى القاعدة "$a = -b$ يعني أن $a + b = 0$ " ولو من باب تطبيق القاعدة التي تطرح في شأن تساوي عددين عشريين، وربما يعتقد المدرس أنها تحصيل حاصل، وهذا ما لا يعتقده التلميذ.

ومن بين الأخطاء التي ترتكب من طرف بعض التلاميذ نجد تلك الأخطاء المرتبطة بعدم إدراك هذا البعض لمبدأ الجبر والمقابلة، وبعدم القدرة على التمييز بين الدورين اللذان تلعباهما علامة ناقص. ولجعل التلميذ يتفادى هذه الأخطاء ولو مرحليا، يكون من الضروري العمل على جعل التلميذ يدرك أن حل معادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد يعود إلى كتابتها على الشكل المحدد سلفا، وذلك بالعمل على جعل التلميذ يدرك أن تساوي عددين حقيقيين ما هو إلا تساوي فرق هذين العددين والعدد صفر.

وربما يعود عدم إدراك بعض التلاميذ لمبدأ الجبر والمقابلة إلى الكيفية التي تطرح بها القاعدة، حيث تصاغ لفظيا، ويعتمد على تردادها كلما حان الوقت إلى استعمالها، وغالبا ما يعتمد في تقديمها على انسجامية عملية الجمع مع علاقة التساوي، وسرعان ما يتم طمس هذه الانسجامية من خلال قاعدة تصاغ لفظيا.

إن اقتراح بعض المعادلات في مستوى السنة الأولى من التعليم الثانوي الإعدادي يستلزم وضع أسئلة في غاية من الأهمية، مثل إلى أي حد يمكن اعتبار بعض الأعداد الجذرية السالبة أعدادا عشرية نسبية ؟ ووفق ما جاء بالبرنامج الدراسي والتوجيهات التربوية المرافقة له فإن العدد العشري السالب يقدم كمقابل عدد عشري موجب، فإذا أراد المدرس الحديث عن العدد الجذري السالب، الذي يمكن التعبير عنه بعدد عشري سالب، فلا بد من المرور من الكتابة العشرية لمقابله، وهذا أمر غير ممكن. إن قبول خلاف هذا الطرح قد يعفي التلميذ من دراسة الأعداد الجذرية طيلة سنة كاملة، فقد تناولها بشكل ضمني في حل المعادلات من الدرجة الأولى بمجهول واحد. وإن قبول مثل هذا الطرح يطرح أسئلة منهجية في غاية من الأهمية، فكيف يمكن إقناع التلميذ بأن بعض المعادلات(تلك المعادلات من الدرجة الأولى بمجهول واحد معاملاتها أعداد صحيحة طبيعية خارجها ليس بالعدد العشري) لا تقبل حلا.

وقد يذهب البعض إلى تقديم المعادلات عن طريق تقديم نماذج من هذه المعادلات، والاكتفاء بالقول بأن هذه المتساويات هي معادلات تعالج بهذه الكيفية. ويعتقد أن التلميذ قد استوعب المعادلات من الدرجة الأولى بمجهول واحد، في حين يجد صعوبة في تعامله مع المعادلات من الدرجة الثانية بمجهول واحد ومع المعادلات البارامترية، إن صادفها في تمارين. وقد يرجع ذلك إلى كون خوارزمية حل النوع الثاني من المعادلات غير مباشرة.

الأعداد العشرية النسبية

ولا يخلو تدريس الأعداد العشرية الموجبة من صعوبات تحد من قدرة التلميذ على استيعاب المفاهيم المرتبطة بها، وربما يرجع ذلك إلى تلك الصعوبات الناتجة عن تعلم العدد الصحيح الطبيعي و نجد بروسو يرجع الصعوبات التي تعترض التلاميذ عند القيام بالعمليات على الأعداد العشرية إلى مفهوم العدد العشري نفسه، والذي يظهر كأنه عدد صحيح غير مستقل عن الوحدة، ويجرد مثالا على ذلك من التوجيهات التربوية المرافقة للبرامج الدراسية الفرنسية، والتي تنص على" أن$3,25$ هي 325 باعتبار المئات كوحدة".

ويجد التلميذ صعوبات عديدة في تعامله مع الأعداد العشرية النسبية، فبالإضافة إلى تلك الصعوبات الناتجة عن عدم القدرة على إجراء العمليات الأربع على الأعداد العشرية النسبية الموجبة، تأتي صعوبات أخرى تتعلق بمفهوم العدد العشري السالب والعمليات على الأعداد العشرية النسبية. فقد يرتكب بعض التلاميذ أخطاء عند حساب مجموع عددين عشريين مختلفي الإشارة، ولكنهم لا يخطأون عند حساب مجموع عددين عشريين لهما نفس الإشارة. وفي هذه الحالة، لا يمكن اختزال مسألة المعالجة في تذكير التلاميذ بالقاعدة وطرح أمثلة، لأن مصدر الخطأ قد يكون في كيفية تقديم قاعدة جمع عددين عشريين مختلفي الإشارة، التي تعتمد على مفهوم القيمة المطلقة ولو ضمنيا، أو يكون في طريقة تقديم العدد العشري النسبي وفق نموذج الربح والخسارة.

وعلى سبيل المثال، نجد بعض التلاميذ يرتكب أخطاء عند حساب مجموع عددين عشريين مختلفي الإشارة ولكنه لا يخطأ عند حساب فرق عددين عشريين موجبين في الحالة التي تعلمها في التعليم الابتدائي. وإذا حصل ذلك فإن مصدر تلك الأخطاء هو التعريف المتداول لجمع عددين عشريين مختلفي الإشارة. وفي هذه الحالة تكون معالجة هذه الأخطاء بطرح أمثلة حول طرح عددين عشريين موجبين في الوضعيات التي كانت فيها عملية الطرح غير ممكنة، وانتظار ما يقوم به التلميذ، ودون تقديم أية مساعدة له.

إن نموذج الربح والخسارة ليس كافيا من أجل التعامل مع الأعداد العشرية النسبية، لأن قصوره سيظهر جليا عند التطرق إلى جذاء عددين عشريين. لهذا وجب تنويع المقاربات عندما نطرح مجموع عددين عشريين، حتى لا يربط التلاميذ هذا المبدأ مع هذا المجموع، ويمكن كذلك طرح تقنية حساب مجموع عددين عشريين انطلاقا من الحاجة لفهم بعض الحسابات التي تجرى عن طريق الآلة الحاسبة.

إن صياغة قاعدة حساب مجموع عددين عشريين على الشكل المتعارف عليه قد تكون مصدرا لتلك الأخطاء التي يرتكبها بعض التلاميذ، وربما يعود ذلك إلى اللغة المستعملة في الصياغة اللفظية لهذه القاعدة، نظرا لكونها تعتمد على مصطلح يأتي من خارج سياق القاعدة (المقصود هنا هو: التعبير "مسافة عدد عن الصفر"، والذي جاء ليعوض القيمة المطلقة دون أن يدلل تلك الصعوبات الناتجة عن مفهوم القيمة المطلقة). لهذا لا بد من الربط المباشر والسريع بين هذه القاعدة و عملية طرح عددين عشريين موجبين، بالطريقة التي كان التلميذ يتعامل بها في التعليم الابتدائي. وفي هذا الصدد يمكن للتلميذ أن يدرك أن تلك العمليات التي كانت غير ممكنة الإنجاز أصبحت اليوم قابلة للإنجاز بفضل هذه القاعدة، من ثم يمكن صياغة هذه القاعدة بشكل سلس وإجرائي.

ويبدو من خلال بعض الممارسات أن العدد العشري السالب يكون دائما مصحوبا بقوسين، ويتم حذفهما بعد إنجاز عملية، وعلى سبيل المثال، نجد في التمارين المتداولة كثير من الأسئلة التي تصاغ بالكيفية التالية: أزل الأقواس ثم أحسب$(-3)\times(-2,12)$. وقد يتبادر إلى ذهن التلميذ بأن القوسين قد حذفا من أجل إجراء عملية الضرب، وليس لأنهما قد كتبا من أجل التمييز بين حدي هذا الجذاء. وقد يعتقد التلميذ أن هذا الجذاء يختلف عن الجذاء التالي: $-2,12\times(-3)$. وفي هذه الحالة يمكن معالجة أسباب هذا الخلط باللجوء إلى طرح مجموعة من الكتابات التي لا تستدعي استعمال الأقواس. ويمكن التأكد من وجود هذا الخلط عندما يكتب التلميذ عددا عشريا نسبيا سالبا معزولا عن العمليات الحسابية ولكنه مصحوبا بالقوسين، وعلى سبيل المثال نجد عند جل التلاميذ هذا النوع من الكتابات: $2,12\times(-3) = (-6,36)$. إن عملية الطرح كما يعرفها التلميذ الوافد من التعليم الابتدائي، ليست عملية قائمة بذاتها، لأن إجراء هذه العملية يخضع لشرط أساسي يتم التأكيد عليه في التعليم الابتدائي. ولكي لا يحدث التباس لدى التلميذ في وصف عملية حسابية، لابد من الانطلاق من كونها فرق عددين عشريين، إلى حين التطرق إلى الأعداد العشرية النسبية. وليس من العبث القول بأن معالجة الأخطاء التي ترتكب من طرف التلاميذ في مجال الأعداد العشرية النسبية تعتمد على مراجعة طريقة تقديمها والبحث عن مقاربات كفيلة بتدليل الصعوبات التي تعترض التلاميذ في تعاملهم مع الأعداد العشرية النسبية.

وكاقتراح، يمكن تقديم العدد العشري النسبي السالب كوسيلة للإجابة عن عدم إمكانية طرح عددين عشريين، التي كانت تطرح في التعليم الابتدائي أو كوسيلة لحل بعض وضعيات ملء الفراغ. ويجد هذا الاقتراح مشروعيته من المبدأ التربوي القائل بضرورة صيانة مكتسبات التلاميذ والسمو بها. وذلك من أجل إبراز مدى مساهمة هذا النوع من الأعداد في معالجة قصور معرفة التعليم الابتدائي.ويمكن تخصيص وقفة لتقديم العمليات على الأعداد الصحيحة النسبية، ومحاولة تجريدها من الاستعمال العشوائي للأقواس.

الأعداد الجذرية

تعتبر مرحلة تدريس الأعداد الجذرية محطة أساسية لاستيعاب عمليات الجبر بصفة عامة ولإدراك العمليات الحسابية التي توظف في التحليل على وجه الخصوص. وذلك لعدة اعتبارات موضوعية وعلمية. أولها كون الأعداد الجذرية تستمد أهميتها الديداكتيكية من الحاجة الملحة للحد من الصعوبات التي يطرحها تدريس الأعداد الكسرية والأعداد العشرية، وخصوصا وأن تدريس هذه المفاهيم في مرحلة التعليم الابتدائي يطرح عدة صعوبات على مستوى استيعابها من طرف التلاميذ، أو على مستوى تدريسها. وقد ذهب Charnay إلى القول بأن معنى تعبير مثل$\frac{2}{3}$ ليس موحدا لدى التلاميذ، إنها كتابة لا تعني إلا نفسها، ويضيف قائلا: "لقد رأينا بالنسبة للكسور أن معنى المفهوم الرياضي صعب الإحاطة به". ونجد بوفيي يعمم هذا الرأي على الأعداد الجذرية قائلا:" ليس العدد الجذري سوى تسمية لصنف من المشكلات".

ومن الناحية الابستمولوجية التكوينية فإن أصل العدد الجذري الموجب يرجع إلى كون الوحدة العددية غير قابلة للتجزئة، بينما الوحدات الهندسية فهي قابلة للتجزئة، وباعتبارها قياسا فإنها تطبق على المتصل الفضائي، وعلى الأشياء الفيزيائية. ويتوصل بياجي إلى نتيجة مفادها أن أصل الأعداد الجذرية الموجبة يرجع إلى التجربة الفيزيائية، التي موضوعها التجزئة من ناحية، ومن ناحية أخرى يرجع إلى اعتبارات مترية. ويخلص إلى فرضية مفادها أن العدد الكسري هو نتاج للاهتمامات الفضائية أكثر منها عددية.

إن تدريس مفهوم العدد الجذري الموجب ينطلق من وضعيات القياس، بمفهومه الواسع، تكون وحدة القياس مقسمة قبلا، لا يتدخل المتعلم في هذه القسمة، فمثلا عند تقديم العدد الجذري الموجب$1/3$ نقدم للتلاميذ قطعة مقسمة إلى ثلاث قطعة متقايسة، ونطلب منه التعبير عن قطعة من تلك القطع الثلاث، وأمام مسألة تجزئة شيء إلى أجزاء متساوية الحجم أو الطول... فإن التلميذ يجد صعوبة بالغة في ذلك.

ولقد تعامل التلميذ في السنة الأولى من التعليم الثانوي الإعدادي مع المعادلات من الدرجة الأولى بمجهول واحد، وقد وقف على أن البعض منها لا تقبل الأعداد العشرية كحلول، وتبعا إلى ذلك فإنه يمكن دفع التلميذ إلى الوقوف على ضرورة معرفة أعداد أخرى تستجيب عن ما لم تستجب له الأعداد العشرية النسبية. وعملا بالمبدأ التربوي القائل بضرورة صيانة مكتسبات التلاميذ والسمو بها فإن الانطلاق من المعادلات من النوع $ax = b$ ، حيث أنa و b عددان صحيحان نسبيان، يكون ملائما لتقديم الأعداد الجذرية.

إلا أن التصورات التي كونها التلميذ عن الأعداد الكسرية والأعداد العشرية النسبية قد تكون عائقا في طريق تعلمه للأعداد الجذرية. فلا يمكن أن ندله على الكيفية التي تحدد العدد الجذري، كقولنا أن العدد الجذري هو خارج عددين عشريين نسبيين، ونطالبه بنسيان ما قد تعلمه من قبل. فلا بد أن يقف التلميذ على قصور معرفة الأعداد الكسرية والأعداد العشرية النسبية أو عدم ملاءمتها لوضعيات جديدة، ويقول بروسو في هذا الصدد: "طالما أن التلميذ لم يقف بنفسه على قصور المعرفة الأولى أو عدم ملاءمتها فإنه سيحتفظ بها".

ويزكي هذا الاتجاه كون اكتشاف المجموعات العددية يرجع بالأساس إلى عدم كفاية مجموعة عددية لحل نوع من المعادلات, فالتأسيس التاريخي للأعداد الجذرية يعود إلى زمن الإغريق، وقد جاء كحاجة لحل المعادلات من النوع $ax = b$ حيث أن a و b عددان صحيحان طبيعيان، وبتعبير الإغريق البحث عن العدد المتناسب الرابع، وذلك لعدم كفاية مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية لحل هذا النوع من المعادلات.

وتشير بعض الروايات التاريخية إلى أن الإغريق كانوا يعتقدون أن هذا النوع من المعادلات لا تقبل حلولا جبرية، لأن العدد ax يمثل المساحة، بينما العدد b يمثل قياس طول قطعة، فلا يمكن أن يكون التساوي [1]. و لكن بفضل تحويل هذه المعادلات إلى معادلات من النوع $ax = bc$ تمكن الإغريق من تقديم تفسير هندسي لوجود أعداد كحلول لهذا النوع من المعادلات. ن طريقة الإغريق في تقديم العدد الكسري تعتمد على بعض الاعتبارات الوسيطية، التي قد تؤثر على الهدف المراد تحقيقه، فمن الضرورة الديداكتيكية، البحث عن تقديم ملائم للعدد الجذري، انطلاقا من بعض مكتسبات التلاميذ. وهكذا يمكن الاعتماد على المفهوم الحدسي للمساحة، وعلى تمثيل النقط في معلم متعامد ممنظم.

إن تقديم العدد الجذري، انطلاقا من التصورات التي كونها التلميذ عن الأعداد العشرية النسبية والأعداد الكسرية، قد يؤدي إلى تكوين عوائق أمام استيعابه لقاعدة جمع عددين جذريين، لأن هذه التصورات مازالت مرتبطة بمسألة تجزئة الأشياء الملموسة، وقد توصل بعض الباحثين في مجال ديداكتيك الرياضيات إلى نتيجة مفادها أن التلميذ ما زال غير قادر على تجريد المفهوم من الوضعيات الملموسة التي أنتجته.

جمع عددين جذريين

إن قاعدة جمع عددين جذريين تأسس اللبنة الأساسية للحساب الجبري، حيث أنها تزود المتعلم بنموذج لكيفية التعامل مع الكتابات الكسرية. ومن هذا المنطلق تستمد أهميتها في كل تفكير لتدليل صعوبات تعلم المادة، وبالإضافة إلى ما سبق فإن عدم استيعابها من طرف التلميذ قد يجعل هذا الأخير يواجه عدة صعوبات في تعلمه لمفاهيم جبرية أو تحليلية. ويقترح البرنامج الدراسي تقديم هذا الجمع على مرحلتين، تكون المرحلة الأولى(تتمثل في تقديم جمع عددين جذريين لهما نفس المقام) سببا في عدم القدرة على الاستعمال السليم لقاعدة جمع عددين جذريين في حالتها العامة، وفي عدم القدرة على التعامل مع الكتابات الكسرية.

ومن أجل أخذ الاحتياط اللازم لتقديم جمع عددين جذريين فإن تنوع المقاربات لهذا الجمع يكون أمرا محمودا، فالمقاربة الأولى تحاول أن تعمم قاعدة جمع عددين كسريين على الأعداد العشرية النسبية المعبر عنها بالكتابة الكسرية.أما المقاربة الثانية فإنها تستدعي استعمال الآلة الحاسبة التي تتوفر على الزر "قوس"، الذي يساعد على تقديم جمع عددين جذريين، دون أن تكون القيمة المقربة للعدد الجذري عائقا في هذا التقديم، وتستدعي كذلك حل معادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد. أما المقاربة الثالثة فتكمن في كون تقديم العدد الجذري كحل لمعادلة من النوع $ax = b$ ،حيث أن a و b عددان صحيحان طبيعيان، قد يساعد على تقديم مجموع عددين جذريين، كحل لمعادلة من نفس النوع.وينتج عن ذلك القاعدة العامة لجمع عددين جذريين. وبذلك يتم تقديم القاعدة العامة لجمع عددين جذريين، على أساس أن تكون قاعدة جمع عددين جذريين لهما نفس المقام كحالة خاصة.

ويجد هذا الاختيار مبررا له في أمرين: أولهما يتجلى في كون التمكن من التطبيق السليم للقاعدة العامة لجمع عددين جذريين قد يعفي التلميذ من معرفة حالتها الخاصة، ويكمن الثاني في كون عملية اختزال الأعداد الجذرية باستعمال المضاعف المشترك الأصغر لا تندرج ضمن محتويات البرامج الدراسية للسلك الثانوي الإعدادي، وبالإضافة إلى ذلك فإن تطبيق قاعدة جمع عددين جذريين يكون مباشرا، بخلاف تطبيق الحالة الخاصة لهذه القاعدة، لأنه يستدعي توحيد مقامي العددين الجذريين.

النموذج الجمعي للضرب

ولمقاربة مفهوم جذاء عددين جذريين توجد عدة طرق: تكمن الطريقة الأولى في تعميم قاعدة جذاء عددين كسريين، انطلاقا من مكتسبات التلميذ، وفي هذه الحالة يترك تكوين هذا المفهوم على عاتق التلميذ، وهذا ما ترفضه نظريات التعلم الحديثة. أما الطريقة الثانية فتعتمد على النموذج الجمعي للضرب، حيث يتم تقديم جذاء عدد جذري وعدد صحيح طبيعي كعمليات متكررة للجمع، كالقول أن جذاء العدد الجذري x والعدد الصحيح الطبيعي n هو مجموع n حدا يساوي العدد x . لكن لا يمكن تطبيق هذا النموذج

في حالة جذاء عدد جذري وعدد جذري آخر غير صحيح. وقد بينت بعض الدراسات في مجال ديداكتيك الرياضيات، أنه يمكن تفسير العديد من الأخطاء التي ترتكب من طرف التلاميذ بعدم فهم هذا النموذج الجمعي للضرب وعدم الوقوف على حدوده. وتشير *Berte* إلى أن هذا النموذج يظهر عندما يكون التلميذ مطالبا بالانتقال من عدد جذري إلى عدد جذري آخر يساويه، وينتج عن ذلك أخطاء من الصعب معالجتها، وخصوصا إذا ترسخ ذلك في ذهن التلميذ. وتكمن المقاربة الثالثة في تقديم هذا الجذاء انطلاقا من المعادلات من النوع المشار إليه سالفا، فرغم أن هذه المقاربة تتطلب نوعا من المهارات الحسابية على المعادلات، فإنها تبقى وسيلة لتقديم جذاء عددين جذريين بمعزل عن مفهوم جمع عددين جذريين.وقد تساعد على التمييز بين الجمع والضرب في مجموعة الأعداد الجذرية.

إن تقديم خارج عددين جذريين يعتمد على الجذاء، إلا أن تقديمه اللفظي يحتاج إلى تعريف مقلوب عدد جذري، وأن ترميز هذا الخارج يطرح صعوبات أمام التلاميذ، وخصوصا عند حساب خارج عدد جذري على عدد صحيح نسبي، لأن التلميذ مازال لا يدرك أن العدد الصحيح النسبي هو عدد جذري مقامه يساوي العدد واحد، وتشير *Berte* إلى أن ذلك يرجع إلى تصور الخارج كتجزئة الشيء إلى أجزاء متساوية.

القـــــوى

ورغم أن قوة عدد جذري أو عدد حقيقي ذات الأس الموجب ما هي إلا تعبير مختصر لجذاء عوامله متساوية، فإنها تطرح بإلحاح مسألة الترميز، الذي يلعب دورا أساسيا في تدريس وتعلم الرياضيات. فرمز قوة عدد هو رمز مركب من حرفين، لا يلعبان نفس الدور، وإن عدم التمييز بينهما قد يؤدي بالتلميذ إلى ارتكاب أخطاء كثيرة، وخصوصا وأن تلميذ هذا المستوى لم يسبق له أن تعامل مع الترميز المركب في وضعيات متنوعة. لهذا وجب أخذ الاحتياطات اللازمة عند تناول قوة عدد جذري، فمثلا يمكن وضع التلاميذ في بعض وضعيات مقارنة قوتين، مثل قارن العددين 3^5 و 5^3 ، رغم أن ترتيب الأعداد الجذرية يأتي بعد قوة عدد جذري. وخصوصا وأنه لا يمكن تقديم مفهوم القوى اعتمادا على الحوامل المرئية التي توفرها الهندسة. لأن تصور مربع عدد جذري موجب كمساحة المربع، أو تصور مكعب عدد جذري موجب كحجم مكعب، قد يؤدي إلى عدم استيعاب هذا المفهوم، وذلك بالنظر إلى أن اقتران الحروف والعمليات بالأشكال الهندسية قد حد من قدرة الجبر عند Viète عندما لا توجد أشكال هندسية لأعداد مثل x^4 ، إذ يعجز الخيال أن يجد شكلا هندسا بعد المكعب المعبر عنه بالعدد x^4. ولقد تعامل التلميذ، في السنة الأولى من التعليم الثانوي الإعدادي، مع قوة عدد عشري نسبي ذات الأس الموجب ككتابة مختصرة لجذاء عوامله متساوية. إلا أن هذه الكتابة تبقى رهينة بالوضعيات المألوفة، مثل اكتب الجذاء على شكل قوة، أو ما هي مساحة المربع ؟....، وهذا يحد من فعالية المفهوم. ويأتي برنامج السنة الثانية من التعليم الثانوي الإعدادي ليطرح بعض الوضعيات التي تبرز أهمية مفهوم القوى، ويتعلق الأمر بالكتابة العلمية لعدد عشري، ومقدار رتبة عدد.

إن عدم قدرة الهندسة على توفير وسائل لتقديم قوة عدد جذري ذات الأس السالب، ترك الفرصة للآلة الحاسبة لتوفير مقاربة لهذا المفهوم، فانطلاقا من حساب قوة عدد جذري أسها سالب، ومقارنة النتيجة مع قوة نفس العدد أسها هو مقابل أس الأولى، نخلص في الأخير إلى تقريب قوة عدد جذري ذات الأس السالب. إن إعطاء الأهمية لقوة العدد عشرة يجد تبريرا في كون التعامل مع الأعداد الكبيرة جدا أو الصغيرة جدا يفرض كتابة هذه الأعداد على شكل كتابات علمية، التي لا يمكن التعبير عنها سوى باستعمال قوة العدد عشرة.

إن تقديم قوة عدد كعملية قد يؤدي إلى الاعتقاد بأنها تتوفر على الخاصيات التي تتوفر في العمليات الفعلية، وقد ينتج عن ذلك بعض الأخطاء الممثلة في الخلط بين القواعد. ومن أجل إبراز ضرورة اللجوء إلى مفهوم القوى، يكون من الواجب الانطلاق من وضعية-مسألة، تبرز مدى قدرة التلميذ على استعمال هذا المفهوم في بعض الوضعيات غير المألوفة، ولا يتوقف الأمر عند هذا الحد، بل يجب إعطاء الفرصة للتلميذ للتعبير عن بعض الوضعيات باستعمال مفهوم القوى.

المجاميع الجبرية

ومن بين هذه الصعوبات نجد تلك التي تتمثل في عدم قدرة التلميذ على التعامل مع المجاميع الجبرية، حيث أنه لا يستطيع إنجاز بعضها بشكل سليم، لا بد أن يرتكب خطأ في فهمه لأحد مكونات هذه العمليات. ولا يمكن أن تكون معالجة هذه الأخطاء عن طريق إنجاز عدد كبير من التمارين، لأنه من غير المفيد أن نعود التلميذ على أن معالجة الأخطاء تتم عن طريق التكرار، كما كان معمول به عند تعلم اللغة. ومن بين الإجراءات التي يقترحها البرنامج الدراسي لمعالجة هذا النوع من الصعوبات، الفقرة التي تأتي تحت عنوان أسبقية العمليات. ورغم ذلك فإن المتعلمين يجدون صعوبة في تعاملهم مع المجاميع الجبرية. فلا يكفي تنبيه التلاميذ إلى تسلسل العمليات، لا بد أن يدرك التلميذ أن جذاء عددين عشريين مثلا ما هو إلا تعبير عن عدد عشري، وأن يدرك أن خارج عددين عشريين ما هو إلا تعبير عن عدد جذري. و بذلك يمكن عدم تنبيه التلميذ إلى تسلسل العمليات. وتكمن بعض هذه الأخطاء في عدم القدرة على الإدراك الجيد لقاعدة القوس المسبوق بعلامة ناقص، ورغم إلحاح المدرس على الصياغة اللفظية لها وتنبيه المتعلمين إلى كيفية تطبيقها تبقى الأخطاء الناتجة عنها كثيرة. وقد يعود ذلك إلى أحد الأمرين على الأقل: إما إلى عدم إدراك التلميذ للقاعدة الأساسية للنشر والتعميل، التي جاءت في مقدمة برنامج السنة الأولى من التعليم الثانوي الإعدادي. وإما إلى عدم إدراك التلميذ للتطابق بين مقابل عدد عشري نسبي و جذاء عدد عشري نسبي في العدد -1 .

وقد تعود بعض الأخطاء التي ترتكب في مجال المجاميع الجبرية إلى رغبة التلميذ في إنجاز أكثر من عملية حسابية في نفس الوقت، وفي هذه الحالة تكون المعالجة عن طريق العمل على جعل التلميذ يعيد قراءة جميع العمليات التي قام بها، والتوقف عند الأخطاء التي ارتكبها ومحاولة إقناعه بإمكانية تفادي هذه الأخطاء.

إن اللجوء إلى استعمال الأقواس أو المعقوفات في العمليات الجبرية جاء لضرورة تعريف مجموع ثلاث أعداد، فلا يمكن تعريف مجموع ثلاث أعداد دون الإشارة إلى المجموع الأول أو إلى المجموع الثاني. لهذا السبب لا يجوز القول أزل الأقواس ثم أحسب، إن في مثل هذا القول مغالطة قد تكمن وراءه صعوبة تؤدي بالتلميذ إلى ارتكاب أخطاء. ومن أجل مساعدة التلميذ على تفادي هذه الأخطاء كان من الممكن التوقف عند الأدوار التي تلعبها الأقواس، مع التركيز على أن المعقوفات ما هي إلا نوع آخر من الأقواس، تستعمل عند استنفاد استنفاد إمكانيات استعمال الأقواس.

بدايات علاقة الترتيب.

وعند تقديم الأعداد الكسرية أو الأعداد العشرية النسبية، كان ترتيبها يأتي قبل العمليات عليها، وذلك لضرورة التفريق بين عددين كرسيين أو عددين عشريين، لأن تعريف مجموعة، من الناحية الرياضياتية الصرفة، يفرض تعريف تساوي عنصريين منها. وهذا الأمر كان غير ممكنا بالنظر إلى كيفية تقديم مجموعة الأعداد الكسرية أو تقديم مجموعة الأعداد العشرية النسبية. إن الترتيب في هاتين المجموعتين لم يكن هدفا في حد ذاته، بل كان وسيلة للتمييز بين عناصر كل مجموعة من المجموعتين، والأمر يختلف تماما بالنسبة للأعداد الجذرية. ويمكن النظر إلى ترتيب الأعداد الجذرية من زاويتين: فيمكن اعتباره امتدادا لعملية مقارنة عددين كسريين، مع الأخذ بعين الاعتبار كيفية مقارنة عددين جذريين في الحالات المتبقية. إلا أن تصورات التي كونها التلميذ عن هذه المقارنة قد تخلق عائقا أمام استيعابه لعلاقة الترتيب في مجموعة الأعداد الجذرية. إذا كانت عملية ترتيب الأعداد الكسرية تمر وفق عدة قواعد (مقارنة عددين كسريين لهما نفس المقام، مقارنة عددين كسريين لهما نفس البسط....) فإنه لا يمكن إخضاع ترتيب الأعداد الجذرية لنفس المنهجية، لأن ذلك قد يحمل التلميذ أعباء يمكن الاستغناء عنها إذا تم التفكير بطريقة مغايرة.

ويمكن التخلص من ذلك، بإرجاع علاقة الترتيب في مجموعة الأعداد الجذرية إلى مقارنة عدد جذري والعدد الصفر. وتجد وجهة النظر هذه تبريرا لها، من الناحية الرياضياتية الصرفة، في كون تعريف علاقة الترتيب في مجموعة مصحوبة بقانون داخلي له عنصر محايد، يرجع إلى تحديد العنصر الموجب والعنصر السالب. وتجد تبريرا لها، من الناحية الديداكتيكية، في كون تعريف علاقة الترتيب انطلاقا من إشارة فرق عددين جذريين، له استعمالات مباشرة كخاصيات الترتيب والعمليات.

التمييز الشكلي بين طبيعة الأعداد

إن تدريس الجبر بالتعليم الثانوي الإعدادي يعطى أهمية شكلية لطبيعة الأعداد، فهو يقدم طبيعة الأعداد من خلال العناوين فقط، ولا يحاول خلق محطات من أجل خلق عمليات "عدم التوازن" في اكتساب المعرفة المرتبطة بهذه الأعداد. ومن الطبيعي أن نجد بعض التلاميذ يحاول التعامل مع جمع عددين جذريين كتعامله مع جمع عددين صحيحين طبيعيين، ونجد بعض التلاميذ يتعامل مع الجذور المربعة بنفس الطريقة التي يتعامل هذا البعض مع الأعداد الجذرية.وقد ينتج عن ذلك ظهور عدة أخطاء عند المتعلم. ومن بين الأخطاء الشائعة في هذا المجال، محاولة التلميذ الحصول على جمع عددين جذريين عن طريق جمع بسطيهما و جمع مقاميهما، وعدم قدرة المتعلم على جمع عدد صحيح طبيعي وعدد كسري أو ارتكاب أخطاء لا يمكن فهمها في حينه. ونجد مثل هذا الخطأ في التمييز بين الأعداد حتى في بعض الكتب المدرسية حيث يعنون أحد الدروس الوارد في أحد الكتب على الشاكلة التالية: العمليات الأربع على الأعداد الصحيحة والعشرية. وقد يوحي هذا العنوان إلى أن الأعداد الصحيحة الطبيعية ليست بأعداد عشرية. وقد يعتقد بعض التلاميذ أنه من غير الممكن كتابة عدد صحيح طبيعي على شكل عدد عشري. وقد يظهر ذلك عندما لا يستطيع التلميذ القيام بجمع عدد صحيح طبيعي و عدد عشري غير صحيح أو جمع عدد صحيح طبيعي وعدد كسري

لتجاوز الصعوبات الناتجة عن هذا التمييز الشكلي لا بد من إعادة النظر في كيفية تقديم الأعداد أو طرح وضعيات تجعل التلميذ يميز بين هذه الأعداد، ويتعامل مع العمليات على هذه الأعداد وفق طبيعتها. وفي هذا المجال يمكن طرح أسئلة على الشاكلة التالية: $\frac{1}{3}+12$، $\frac{1}{3}+1,6$، $\frac{1}{4}+1,2$. ففي العملية الأولى يكون التلميذ مضطرا إلى تحويل كتابة عدد صحيح طبيعي إلى كتابة كسرية، وفي الحالة الثانية يكون التلميذ مجبرا على تحويل كتابة عدد عشري إلى كتابة كسرية. أما في الحالة الثالثة فتترك للمتعلم الحرية لاختيار الكتابة المناسبة.وبفضل تنوع هذه الوضعيات يمكن للمتعلم أن يتجاوز الصعوبات الناتجة عن التمييز الشكلي بين طبيعة الأعداد.
الكتابات الكسرية.

ويقال إن التلميذ لا يستطيع توحيد المقام عندما يكون بصدد القيام بعملية جمع كتابتين كسريتين. إن اللائمة تعود على التلميذ مهما تكن الطريقة التي قدم بها مجموع عددين كسريين. وغالبا ما تنحصر المحاولات لمعالجة هذه الصعوبة في عمليات إنجاز بعض التمارين أمام التلميذ، ومطالبته بتقليد الآخرين، ولكن هذه الصعوبة تبقي عصية على المعالجة حتى عند تلاميذ الأقسام النهائية العلمية.

وغالبا ما تظهر هذه الصعوبة مجسدة في الخطأ الشائع المعبر عنه بمتساوية من الشكل: $\frac{a+b}{b}=\frac{a}{b}$ والتي يصمد لعدة محاولات تدوم عدة سنوات. فرغم إلحاح المدرسين على عدم صوابية هذه المتساوية وتقديم الأمثلة المضادة والبرهان بالخلف على عدم صلاحيتها فإن بعض التلاميذ يرتكبون هذا الخطأ.

ولا يجوز تحميل التلميذ المسؤولية لوحده. إن تقديم جمع عددين كسريين يتم عبر ثلاث مراحل: جمع عددين كسريين لهما نفس المقام، جمع عددين كسريين مقام أحدهما مضاعف مقام الآخر، جمع عددين كسريين عن طريق البحث عن المضاعف المشترك الأصغر لمقامي الكسريين. وتعاد نفس الطريقة لتقديم جمع عددين جذريين. وهنا تتجلى الصعوبة التي يعاني منها المستوى المعرفي للتلاميذ. وقد يلجأ التلميذ إلى خلق تقنيات للقيام بذلك، ويظهر ذلك جليا عندما يقوم التلميذ بجمع البسطين وجمع المقامين، وذلك بالمقارنة مع قاعدة جذاء كتابتين كسريتين.

إن طريقة التدريس لا تحدد صراحة للتلميذ ما يمكن معرفته في مجال جمع كتابتين كسريتين في جميع مستويات التعليم، وبذلك يمكن تحميل المسؤولية إلى البرامج الدراسية فيما يخص عدم قدرة بعض التلاميذ على الاستعمال السليم لقاعدة جمع الكتابات الكسرية. إن معالجة هذه الصعوبة تحتاج إلى إجراء دراسة في قسم تعليمي قدمت له القاعدة العامة لجمع عددين كسريين فقط، وملاحظة مدى قدرة تلاميذ هذا القسم على التعامل مع جمع الكتابات الكسرية.

وتأتي المقاربة، التي تنتهج في سبيل تقديم الكسور، لتضيف صعوبة أخرى، وتتمثل في كون هذه المقاربة تفترض أنه باستطاعة التلميذ أن يدرك معنى الكسر انطلاقا من بين الأعمال التطبيقية، كتجزئة قطعة عود أو علبة. وقد تتعقد هذه الصعوبة عندما يقدم الكسر لاحقا كأنه خارج عدد صحيح طبيعي على عدد صحيح طبيعي غير منعدم. إن هذا التصور للعدد الكسري يترك بصمات لا يمكن اكتشافها بإجراء روائز، بل يتطلب ذلك متابعة دقيقة للتلميذ أثناء اشتغاله، كما يمكن الوقوف على مصادر هذه الصعوبات عندما تتمكن المتابعة التعليمية من تنويع المقاربات للعدد الكسري.

إن موضوع العدد الكسري أساسي في عملية إعداد برنامج للدعم وذلك لعدة اعتبارات موضوعية. تتجلى الأساسية منها في كون التعامل السليم مع الأعداد الكسرية سيساهم في تدليل الصعوبات الناتجة عن الحساب العددي بصفة عامة، و في تدليل تلك الصعوبات التي تظهر عند تناول مفاهيم التحليل على الوجه الخصوص.

الحساب الحرفي وفق البرامج الدراسية

يعتبر الحساب الحرفي اللبنة الأساسية في بناء منظومة مفاهيمية تساعد المتعلم على التعامل مع جل المفاهيم الرياضياتية. فكل سوء فهم لهذا الجزء من البرنامج الدراسي قد يتولد عنه صعوبات يصعب معالجتها عند ظهورها. فلا بد أن يأخذ البرنامج الدراسي بواسطة التوجيهات المرافقة له جميع الترتيبات اللازمة لترشيد عملية تدريس الحساب الحرفي ولحث المدرس على عدم حصره في فصل معزول.

إن تخصيص البرنامج الدراسي وقفة للحساب الحرفي لا يعني أن دراسة التعابير الرياضياتية تتوقف عند التبسيط والتعميل، بل لا بد من توظيفه للدلالة على بعض الوضعيات التي صادفها التلميذ في السنوات السابقة، مثل التعبير عن بعض النتائج التي كانت تصاغ باللغة اللفظية. وذلك من أجل تبيان ضرورة إدخال بعض الرموز للدلالة على الكائنات الرياضياتية. ولا يمكن تحقيق ذلك إلا بطرح وضعيات تلزم التلميذ ابتكار وسيلة لمعالجتها. إن العلاقة التي تحدد جذاء عدد جدري في مجموع عدديين جذريين جاءت من أجل تحديد ماهية هذا الجذاء، وذلك من الناحية النظرية، لهذا يكون من الضروري نقل هذه المعرفة إلى التلاميذ بالشكل المناسب، من خلال وضع هذه المعرفة في موضع المساءلة.ومن أجل وضع التلميذ في وضعيات عدم التوازن، كان من الممكن طرح قاعدة حساب جذاء المجموعين كتطبيق مباشر لهذه المعرفة الجديدة، رغم أن التلاميذ قد صادفوا في السنة الماضية معرفة تماثلها. ولقد سبق للتلميذ أن تعامل مع بعض التعابير الجبرية من خلال صياغة بعض الخاصيات والتعاريف، ومن خلال فصلي النشر والتعميل والمعادلات الواردين في برنامج السنة الأولى من التعليم الثانوي الإعدادي. إلا أن ذلك غير كاف لإدراك الجدوى من استعمال الحروف للتعبير عن الأفكار الرياضياتية. ومن هذا المنطلق، فإن الحساب الحرفي هو الوسيلة التي تسمح بالتمييز بين النمط الحسابياتي والنمط الجبري، ويتيح الفرصة لتعميم بعض النتائج المحصل عليها عن طريق الأمثلة العددية. هذا التعميم كان يقوم به المدرس سابقا، وبفضل الحساب الحرفي قد نطالب التلميذ بتعميم بعض هذه النتائج.

ولتحقيق ذلك لابد من الانطلاق من وضعيات تستلزم اللجوء إلى الحروف، وتبرز أهمية استعمالاتها، حتى يتمكن التلميذ من الوقوف على الجدوى من معرقة مجالات استعمال الحروف، والعمل على التطبيق السليم لها.وبالإضافة إلى ذلك فإن للحساب الحرفي امتدادات على مستوى الجبر أو على مستوى الهندسة، فمبرهنة طاليس لا يمكن التعبير عنها ببساطة إلا عن طريق استعمال الحروف، ومن بين مجالات استعمال الحروف يأتي النشر والتعميل و التبسيط. وهذا يؤكد أهمية الحساب الحرفي داخل بنية برنامج السلك الثانوي الإعدادي.

إن ديوفانت هو أول من تعرض لفكرة إيجاد عدد مجهول نسبة إلى أعداد أخرى معلومة، ولكنه وقف في معالجته لهذه الفكرة عند الطريقة الفيثاغورسية التي كانت ترمز لكل عدد بشكل هندسي. وما سبب ذلك إلا أن رموز الأعداد والعمليات لم تكن معروفة في حضارتي اليونان والإسكندرية. وقد عرف الهنود أيضا تلك الطريقة، وكان براهامكبت يستعمل الألوان المختلفة رموزا للمجاهيل.

ولقد استخلص الخوارزمي من طريقتي الهند وديوفانت معا فكرتي الجبر والمقابلة، ليدل بهما على طريقتين خاصتين باستخلاص المجهول، اللفظ الأول كما يؤخذ معناه في اللغة العربية هو أن يجبر أو يكمل كل طرف من طرفي المعادلة، وذلك بأن تنقل الأعداد السالبة من طرف إلى آخر، فلا تبقي في الطرفين إلا الأعداد الموجبة. وأما المقابلة فهي الطريقة التي تقوم على حذف الأعداد المتقابلة في طرفي المعادلة. وهكذا فإن المعادلات قد ساهمت في تأسيس الجبر كعلم مستقل عن الهندسة، إلا أن استعمال الحروف الهجائية للدلالة على الأعداد هو الذي ساعد على بلورة علم الجبر في صورته الحالية.

ومن الثابت تاريخيا أنه قبل Viete كان علماء الرياضيات يستعملون اللغة الطبيعية للتعبير عن أفكارهم، فصياغة متساوية جبرية واحدة كانت تتطلب عدة جمل لغوية معقدة. وعلى سبيل المثال نجد أن الكرجي استعمل خطابا يصعب على المتعلم فهمه للدلالة على متساوية جبرية، حيث يقول:" كل عدد يقسم بقسمين فإن مربع مربع العدد المقسوم مساو لمربع مربع كل واحد من القسمين وضرب كل واحد من القسمين في مكعب الآخر أربع مرات وضرب مربع واحد منهما في مربع الآخر ست مرات". فليس من السهل على المتعلم أن يدرك الغاية من الحساب الحرفي بمجرد تخصيص وقفة له. وتقول بعض الروايات التاريخية أنه في القرن السابع عشر الميلادي قد توصل Viete إلى تخليص الجبر من استعمال ألفاظ لغوية، وحتى من القيم العددية، حين استعمل حروف الهجاء للدلالة على الأعداد، وحين أدخل بعض العلامات الدالة على العمليات التي تجرى على تلك الحروف. وقد نتج عن ذلك التمييز بين ما كان يسمى حينئذ "علم العدد" وهو علم الحساب، والعلم الأخر المسمى"علم الأنواع" باعتبار الحرف الهجائي بمثابة نوع لأعداد كثيرة.و يبدو أن استيعاب العقل البشري لاستعمالات الحروف للدلالة على الكائنات الرياضياتية قد استغرق زمنا لا يمكن اختزاله في عدة ساعات، الأمر الذي يجعل مسألة تقديم الحساب الحرفي في غاية من الأهمية، تفرض على المتدخلين أن يبحثوا عن وسائل كفيلة بضمان تحقيق ما يتوخى من إدراج الحساب الحرفي ضمن مضامين البرنامج الدراسي.

إن عملية التبسيط لا تنحصر في إعادة كتابة بعض التعابير، بل هي مرتبطة بإمكانية الاستمرار بإنجاز العمليات الحسابية. لهذا لا يمكن عزلها عن السياقات التي تأتي من خلالها. ولا يمكن اختزالها في عملية تبسيط كتابة بعض التعابير المعبر عنها بدلالة متغير أو عدة متغيرات، لأن ذلك قد يؤدي إلى الخلط بين القيمة العددية للتعبير وشكله الحرفي.ووفق ما سبق، تأتي جل الصعوبات التي تعترض المتعلم في تعلمه للمفاهيم الرياضياتية كنتيجة لعدم إعطاء الأهمية اللازمة للحساب الحرفي، واختزاله في بعض عمليات التبسيط والاختزال.

الجذور المربعة

من بين الأمثلة الأولى للأعداد الجذرية يأتي الجذر المربع لعدد جذري موجب. فمن الطبيعي أن تكون الجذور المربعة للأعداد الجذرية الموجبة هي اللبنة الأساسية لتأسيس مجموعة الأعداد الحقيقية.إلا أنه يجب الاكتفاء في هذه السنة بتحسيس التلاميذ بوجود أعداد أخرى غير المعروفة لديه، انطلاقا من أمثلة عددية أو هندسية.
ولتقديم الجذر المربع لعدد جذري موجب، توجد عدة مقاربات: تكمن المقاربة الأولى في استعمال الآلة الحاسبة العلمية غير المبرمجة لحساب بعض الجذور المربعة باستعمال الزر الدال على الجذر المربع، واستغلال ذلك لتقديم عملية الحصول على الجذر المربع كعملية عكسية لعملية الحصول على مربع عدد. إلا أن هذه المقاربة قد تدفع بعض

التلاميذ إلى الاعتقاد أن الجذر المربع لعدد جذري موجب هو عدد عشري، نظرا لكون الآلة الحاسبة العلمية غير المبرمجة لا تعطي إلا قيم مقربة لهذا الجذر المربع. وتتجلى المقاربة الثانية في استعمال مبرهنة فيثاغورس للوقوف على وجود أعداد أخرى كقياسات أطوال، وتجد هذه المقاربة تبريرا لها، من الناحية التاريخية، في كون اكتشاف الأعداد الحقيقية جاء لتلبية حاجة الهندسة لقياس الأطوال

لقد اصطدمت مبرهنة فيثاغورس منذ بدايتها بعقبة وهي ظهور الأعداد اللاجذرية، فعندما انتقل فيثاغورس من الهندسة إلى الحساب العددي لقياس أطوال الأضلاع ظهرت له هذه المشكلة، تلك الأعداد اللاجذرية التي لا يقابلها شكل هندسي ما سواء في مربعها لتكون مربعا قابلا للقياس على ضلع من أضلاع مثلث أم في جذرها المربع لتكون قطعة تقاس من أضلاع المثلث بعدد جذري على حد سواء.ولقد اعتبرها فيثاغورس فضيحة كتمها إلا عن تلاميذه وأوصاهم بألا يكشفوا سرها لكي لا يصيبهم شر.

إن عجز الطرق الحسابية، الذي كشف عنه وجود الأعداد اللاجذرية مند الخطوات الأولى للرياضيات في الحضارة اليونانية يبين سبب عدم الركون إلى علم العدد أو الحساب في حل المسائل الرياضياتية في تلك الحضارة، وبالتالي عدم تطوره إلى الجبر والتحليل.

وعلى المستوى الديداكتيكي فإن مقاربة الجذور المربعة بمبرهنة فيثاغورس تصطدم بعدة عوائق على مستوى التطبيق، فمثلا إذا طلب من التلميذ أن ينشأ قطعة طولها الجذر المربع للعدد $13,3$ فإنه يجد صعوبة في ذلك، لأن إنشاء هذه القطعة يتطلب إنشاء قطعة طولها الجذر المربع للعدد $0,3$ ، الذي يتطلب بدوره إنشاء قطعتين طولهما الجذر المربع لكل من العددين 3 و 10 واستعمال مبرهنة طاليس في المثلث. وفي العديد من الحالات فإن هذه المقاربة تتطلب استعمال مبرهنة فيثاغورس عدة مرات. ولتفادي هذه الصعوبات، توجد مقاربة ثالثة، تعتمد على إحدى العلاقات المترية في المثلث قائم الزاوية، تعرف بمبرهنة إقليدس، ويمكن البرهنة على صحتها بمعزل عن مبرهنة فيثاغورس. وعند إنشاء قطعة طولها الجذر المربع لعدد فإن هذه المقاربة تعفي التلميذ من كتابة هذا العدد على شكل مجموع أو فرق مربعي عددين، يكونا قياسي ضلعين لزاوية قائمة.

ومن بين الصعوبات التي تعترض التلاميذ في مجال الحساب العددي تتجلى في الأخطاء المرتكبة من طرف غالبية التلاميذ في العمليات على الكتابات التي تصاغ عن طريق الجذر المربع، والتي لا تعالج لا عن طريق التنبيه ولا عن طريق طرح الأمثلة المضادة ولا عن طريق طرح تمارين تكرارية مهما كثرت. ومن بين الأخطاء الشائعة في هذا المجال نجد الخطأ المعبر عنه بكتابة متساوية على الشكل $\sqrt{u} + \sqrt{v} = \sqrt{u+v}$. وهو خطأ ناتج عن تصور التلميذ للجذر المربع الذي كونه من خلال عملية التقديم فقط. ورغم الإلحاح على عدم صحة هذه المتساوية في الحالة العامة فإن التلميذ يلجأ إلى استعمالها عندما يكون في حاجة إلى جمع جذريين مربعين.فما هي الأسباب وراء صمود هذا الخطأ أمام جميع محاولات تصحيحه؟.

ولقد تعامل التلميذ مع الأعداد الجذرية خلال سنة كاملة، ويقدم له الجذر المربع كوسيلة لحل معادلة لا يمكن حلها بالأعداد الجذرية، وذلك ارتباطا مع مبرهنة فيثاغورس. وكنتيجة لذلك تكونت لدي التلميذ صورة حول كيفية التعامل مع الأعداد الجذرية في حين بقي الجدر المربع خارج المنظومة التي تأسست لديه. ووفق ذلك، يمكن له حساب مجموع عددين جذريين، فلماذا لا توجد طريقة مماثلة بالنسبة للجذور المربعة؟.

إن البرامج الدراسية والكتب المدرسية تساعد على ترسيخ هذا التصور، حيث أنها لا تخصص صراحة وقفات من أجل خلق قطيعة بين كيفية التعامل مع الأعداد الجذرية و تلك الممارسات التي تنتهج في سبيل التعامل مع الجذور المربعة. ويبدو من خلال هذا التصور أن الجذر المربع هو كائن غريب عن المنظومة المفاهيمية التي تكونت لدي التلميذ خلال تعامله طيلة سنة كاملة مع الأعداد الجذرية. فهل يكفي وقفة قصيرة لبناء منظومة مفاهيمية متعلقة بالعدد الحقيقي.

الأعداد الحقيقية بالتعليم الثانوي الإعدادي

إن الصعوبات الناتجة عن سوء استيعاب مفهوم العدد الحقيقي قد تؤثر سلبا على التحصيل الدراسي للمتعلم في كل ما يتعلق بالحساب العددي، وذلك خلال سنوات تمدرسه الثانوية. ولهذه الضرورة وقفة تحاول استقراء الإشكاليات الابستمولوجية والديداكتيكية التي يطرحها العدد الحقيقي، والتي لا تعير لها البرامج الدراسية اهتماما لازما، ولا نجد لها أجوبة في الكتب المدرسية، بل تزيد بعض الكتب المدرسية الأمر تأزما عندما يلمح أحد هذه الكتب إلى أن العدد الحقيقي ما هو إلا حرف لاتيني. الأمر الذي يستدعي التوقف، لأن الكتاب المدرسي في هذه الحالة يساهم في تكوين نظرة خاطئة حول العدد الحقيقي.

ولقد سبق للتلميذ الوافد من السنة الثانية من التعليم الثانوي الإعدادي أن تعامل مع بعض الأمثلة عن الأعداد اللاجذرية، دون التطرق إلى أن هذه الأعداد ليست بأعداد جذرية، نظرا لعدم إمكانية تقديم البرهان على أن الجذر المربع لعدد صحيح طبيعي غير كامل ليس بالعدد الجذري. فالبرهان المتعارف عليه على عدم انتماء العدد اللاجذري $\sqrt{2}$ إلى مجموعة الأعداد الجذرية يعتمد على بعض مفاهيم الحسابيات التي حذفت من البرنامج الحالي للسنة الثالثة من التعليم الثانوي الإعدادي.

وإذا كان من الممكن تقديم البرهان على لاجذرية $\sqrt{2}$ للتلاميذ تجاوزا، فكيف يمكن تقديم البراهين على عدم انتماء الجذور المربعة للأعداد الصحيحة الطبيعية غير الكاملة إلى مجموعة الأعداد الجذرية؟. ومن الناحية التاريخية فإنه هذا البرهان كان سببا في النهاية التراجيدية لصاحبه Hippase de Métaponte. وحسب إحدى الروايات الإغريقية، "كان مؤلفو هذه الأسطورة يرومون تعبيرا مجازيا تعين إخفاء كل ما هو غير معقول وعديم الشكل، هذا ما كانوا يرومون قوله. فإذا حاولت روح أن تلج إلى هذه الناحية السرية والإبقاء عليها مفتوحة، فإن بحر الصيرورة سيجرها إليه، لا محالة، فتغرق في مجاريه ولن تنعم بعد بالراحة". وتقول رواية أخرى أن تيودور واصل تقديم براهين على لا جذرية العدد $\sqrt{n}$ ، حيث أن n عدد صحيح طبيعي غير كامل أصغر من العدد 17.ونظرا لكثرة هذه الأعداد اللاجذرية(وقائع اللامعقول) يراجع هذا الأخير الفيثاغورسية البدائية ويقدم نظرية عامة تؤسس، بعقل جديد، وقائع اللامعقول، يستطيع أقليدس بعد ذلك تحرير كتابه العاشر من العناصر.

يطرح إذن تقديم الأعداد الحقيقية إشكالية تتعلق بالبرهنة على أن بعض الأعداد الحقيقية ليست بأعداد جذرية، ويمكن التعبير عنها بإشكالية ثانية تتعلق بتعريف للعدد الحقيقي. وتنتج عنها إشكالية أخرى تكمن في كيفية تقديم العمليات على الأعداد الحقيقية.

وبالنسبة للإشكالية الأولى فإنه يعتقد بأنه من الممكن معالجتها بالاستغناء عن تصنيف الأعداد، ولقد تمت الإشارة إلى ذلك عند الحديث عن التصنيف الشكلي للأعداد،كما يعتقد بأنه من الممكن معالجتها مرحليا بعدم التطرق إلى مصطلح المجموعة، وهذا ما يذهب إليه البرامج الدراسي للسنة الثالثة من التعليم الثانوي الإعدادي، فمسألة لا جذرية عدد حقيقي تبقى دون جدوى في غياب مفهومي المجموعة والتضمن والانتماء.

أما بالنسبة للثانية، فقد يعتقد بأنها تعالج بالتناول المباشرة للعمليات على الأعداد الحقيقية كأنها أعداد جذرية. فلا يوجد تلميذ، حسب هذا الاعتقاد، باستطاعته أن يطرح سؤال حول ماهية العمليات التي تقدم له. ويذهب أصحاب هذا الاعتقاد إلى الخلط بين الدال والمدلول، فالعدد الحقيقي أصبح حرفا لاتينيا. فلا عجب إن وجدت تلميذا يقوم بتعداد الأعداد الحقيقية.

وإذا كان التعامل مع الأعداد لا يطرح صعوبات عند تناول العمليات على الأعداد الجذرية، فإنه يطرح إشكالية عند تناول العمليات على الأعداد الحقيقية، وعلى سبيل المثال، يمكن دائما تحديد قيمة مجموع عددين جذريين معلومين، الشيء غير الممكن بالنسبة لعددين حقيقيين مثل $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$.

وتطرح هذه الإشكالية بقوة عند تناول التمارين حول الجذور المربعة،التي أسئلتها تصاغ بفعل بسط، مثلا بسط ما يلي: $\sqrt{18} + \sqrt{27} - \sqrt{8} - \sqrt{75}$

فكيف يمكن، إذن، التصرف أمام هذه الإشكاليات؟ إن هذا السؤال في غاية من الأهمية نظرا لكون هذه الإشكاليات تولد عقبات أمام المتعلم لاستيعاب مفهوم الحقيقي وكيفية التعامل به. وتظهر هذه العقبات من خلال أخطاء يرتكبها المتعلم، ولا نجد لها تفسيرا يساعد على معالجتها، وعلى سبيل المثال نجد البعض من تلاميذ الجدع المشترك العلمي يعتقد أن الجذر المربع للعدد الصفر يساوي 1. فكيف يمكن تفسير ذلك؟

إن المقاربة التي يمكن انتهاجها لتقديم العمليات على الأعداد الحقيقية هي تلك التي توظف مفاهيم الهندسة،وعلى سبيل المثال، يمكن تعريف العدد الحقيقي الموجب قطعا كطول قطعة. وتستمد هذه المقاربة مشروعيتها الديدكتيكية من التطور التاريخي لمفهوم العدد الحقيقي، سواء كان جذريا أو لاجذريا.

مبرهنة فيثاغورس وتقديم الجذور المربعة

إذا كانت مبرهنة فيثاغورس المباشرة غير كافية لتقديم الجذر الربع لعدد جذري موجب إلا في بعض الحالات فإنها تطرح إشكالية على مستوى تقديم الجذر المربع لعدد لاجذري. وعلى سبيل المثال، لإنشاء قطعة طولها الجذر المربع للعدد الحقيقي $\sqrt{2}$ ، يكون من اللازم كتابة هذا العدد على شكل مجموع أو فرق عددين حقيقيين قابلين للإنشاء، وهي عملية ليست في متناول المتعلم، وقد تشوش على الهدف المتوخى من طرح هذه المسألة. وإذا أردنا القيام بذلك فيمكن كتابة المتساوية: $\sqrt{2} = \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 -$ $\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$ وباعتبار هذه المتساوية نتيجة لعدة تحريات، يمكن القول أنه ليس من السهل إنشاء قطعة طولها الجذر المربع للعدد الحقيقي $\sqrt{2}$ باستعمال مبرهنة فيثاغورس.

وبالإضافة إلى ذلك يطرح سؤال أساسي، هل يمكن تطبيق ذلك على أي عدد لاجذري؟. ولمعالجة هذه الإشكالية يعتقد بأنه يكفي القول":إذا كان x عددا حقيقيا موجبا فإنه يوجد عدد حقيقي موجب y حيث أن: $x = y^2$ وهذا العدد يسمى الجذر المربع للعدد الحقيقيx. إن مثل هذا القول يترك على عاتق التلميذ مسألة إدراك وجود العدد y. وهذا يتنافى مع مبادئ التعلم الفعال. فما السبيل، إذن، لتقديم الجذر المربع لعدد حقيقي موجب وفق مقاربة تجعل التلميذ يشارك في بناء معارفه؟. وعلى سبيل المثال، كيف يمكن توظيف مبرهنة فيثاغورس عند الحديث عن العدد الحقيقي$\sqrt{3}$ مثلا؟.ويمكن القول للإجابة عن هذا السؤال أن الآلة الحاسبة تسمح بقديم هذا الجذر المربع، ويمكن القول بأنه يمكن إحالة التلميذ على إمكانية تمديد ما قد استوعبه عند تناول الجذور المربعة لأعداد جذرية موجبة. إن مثل هذا القول يجعل مسألة استيعاب هذا المفهوم على عاتق التلميذ.

إن النظرة الموضوعية إلى هذه الإشكالية ترفض مثل هذا الموقف، لأن التلميذ ليس هو المسئول الرئيسي عن تعلمه. إنها تحتم البحث عن وسيلة تساعد التلميذ على إدراك الجذر المربع لعدد حقيقي. وبكل بساطة فإنه يمكن معالجة هذه الإشكالية بالنظر إلى كون التلميذ يتوفر على مبرهنة فيثاغورس، التي قد تنتج مبرهنة أخري تساعد على تقديم الجذر المربع لعدد لاجذري، ويتعلق الأمر بمبرهنة أقليدس.

إن تدريس مفهوم العدد الحقيقي ينطلق من وضعيات القياس الهندسي، حيث يتم تقديم بعض الأمثلة عن الأعداد اللاجذرية عن طريق مبرهنة فيثاغورس. فمن الطبيعي أن تكون الجذور المربعة لأعداد جذرية موجبة هي اللبنة الأساسية لتقديم مجموعة الأعداد الحقيقية.إلا أن هذه المبرهنة لن تكون ذات فعالية عند الحديث عن الجذور المربعة لأعداد لاجذرية موجبة.

وتبقى مبرهنة أقليدس، بالنظر إليها كتطبيق لمبرهنة فيثاغورس، الوسيلة المناسبة لتقديم الجذر المربع لعدد حقيقي موجب، بغض النظر إلى كونه جذريا أم لا. لأنها لا تحتاج إلى كتابة العدد كمجموع أو فرق مربعي عددين قابلين للإنشاء، وحتى لا تطرح مسألة قابلية إنشاء العدد الحقيقي الموجب بشكل صريح. ويمكن التعامل مع هذه المبرهنة دون مأسستها، لأنها ناتجة عن معرفة مؤسساتية، بمعنى أنه من الممكن أن يقوم التلميذ بإعادة إنتاجها كلما دعت الحاجة إليها.

المتساويات الجبرية المسماة متطابقات هامة

إن عزل المتساويات الجبرية- التي يطلق عليها مصطلح المتطابقات الهامة- عن السياقات التي يمكن أن تظهر من خلالها قد يؤدي إلى اعتبارها هامة إلى درجة أن التلميذ يقوم بحفظها، وإن استعصى هذا الحفظ عليه فإن التلميذ يلجأ إلى تطبيقها على تلك الشاكلة التي ساعدته على الاحتفاظ ببعض المعلومات المرتبطة بها، وقد يظهر ذلك من خلال بعض الأخطاء التي ترتكب من طرف بعض التلاميذ أو من خلال الامتناع عن الإجابة عن الأسئلة التي تقترح في هذا الباب.

ومن بين أبرز الصعوبات الملاحظة في هذا المجال يتجلى في عدم قدرة التلميذ على الاستعمال غير المباشر لإحدى هذه المتساويات الجبرية، ويمكن تأويل مصدر هذه الصعوبات بالرجوع إلى الطريقة المعتمدة في تقديم هذه المتساويات. إن التقديم المتداول لهذه المتساويات ينطلق من كونها حالات خاصة لقاعدة نشر جذاء مجموعيين، الأمر الذي يلغي القراءة العكسية لهذه المتساويات من ذهن التلميذ. وفي بعض الحالات، تقدم هذه المتساويات الجبرية انطلاقا من الخاصية الجمعية للمساحة. ولا تؤدي هذه الطريقة إلى معالجة إشكالية القراءة العكسية، وتزيد في الأمر تعقيدا.

إن القراءة العكسية لهذه المتساويات الجبرية تشكل عوائق أمام تلميذ التعليم الثانوي، ففي الجدع المشترك، نلاحظ أن بعض التلاميذ يعاني الكثير في تعامله مع الشكل القانوني لثلاثية الحدود. ولا تأسس أرضية صلبة لكيفية التعامل مع المتساويات الجبرية الأخرى المدرجة في برامج التعليم الثانوي

إن معالجة الصعوبات المتعلقة بما يسمى المتطابقات الهامة لا تحتاج إلى إستراتيجية تعتمد على مجموعة من التمارين المتشابهة، بل تتطلب أولا إعادة النظر في طريقة تقديم هذه المتساويات الجبرية، وفي هذا المجال يمكن تقديمها كوسيلة للاستجابة عن حاجة، تكمن في معرفة إشارة تعبير أو حل معادلة أو تعميل تعبير. وبذلك يمكن تقديم القراءة الثانية لهذه المتطابقات على القراءة الأولى لها. ولا يمكن تقديمها كتطبيق مباشر لقاعدة نشر جذاء مجموعيين فقط. ويمكن في بعض الحالات التوقف عند الرمز الذي يشير إلى مربع المجموع، وعند الضرورة التي فرضت استعمال الأقواس.

الحساب العددي بالتعليم الثانوي التأهيلي

إذا كان عدم التمييز بين طبيعة الأعداد في مرحلة التعليم الثانوي الإعدادي ممكنا لضرورة ديداكتيكية كما يعتقد، حيث يمكن تقديم الأعداد بشكل تدريجي دون تسميتها، كما هو الشأن بالنسبة للتعليم الفرنسي، فإن تدريس الأعداد اللاجذرية يطرح إشكالية في التعليم الثانوي التأهيلي، نظرا لكون البرنامج الدراسي للجدع المشترك العلمي يحاول التمييز بين طبيعة الأعداد التي سبق للتلميذ التعرف عليها، وذلك من خلال التأكيد على دراسة مجموعات الأعداد. وعند التمييز بين الأعداد تقترح على التلميذ البرهنة على عدم انتماء العدد $\sqrt{2}$ إلى مجموعة الأعداد الجذرية.ولكن عند تقديم العمليات على الأعداد الحقيقية يتم الاكتفاء بالقول أنه من الممكن تعريف عملية الجمع والضرب في هذه المجموعة، وتحققان جميع الخاصيات المحققة في مجموعة الأعداد الجذرية.

ولا يكفي التوقف عند ذكر بعض خاصيات عمليتي الجمع والضرب في مجموعة الأعداد الحقيقية، لأن ذلك غير كاف لجعل التلميذ يعي بتلك الممارسات التي كان يقوم بها أثناء تناول التمارين المتعلقة بالحساب العددي. وعلى سبيل المثال، لا يبدو أن توفر عملية الجمع على العنصر المحايد ذو دلالة بمجرد ذكر هذه الخاصية، لأن هذه الخاصية مرتبطة بالنظرة العامة لمجموعة الأعداد الحقيقية، فالسؤال الذي يمكن طرحه في هذا المجال هو: كيف يمكن القيام بالعمليات الحسابية في هذه المجموعة إذا لم تكن تتوفر على هذه الخاصية؟ وعموما فإن معالجة عملية حسابية تتطلب القراءة الجيدة لنصها، والتي لا تتمثل فقط في استخراج المعطيات الصريحة للنص، بل تتمثل في استخراج المعطيات الضمنية للنص، والقيام بدراسة مدى مساهمة البعض منها في إنتاج حل للسؤال موضوع المعالجة. ويمكن إنجاز هذه القراءة عن طريق قراءة كل العمليات المكونة لهذه العملية، فلا يكفي التوقف عند جرد للمتطابقات الهامة دون الإشارة إلى الأدوار التي قد تلعبها في الحساب العددي، ودون الإشارة إلى دواعي استعمال تلك التسمية التي تطلق عليها.إن هذا النوع من التصرف قد يساعد التلميذ على الاستيعاب الجيد لتلك المفاهيم التي تقدم له، وتمكن المدرس من التوقف عند ماهية المفاهيم التي تشكل البرنامج الدراسي. إن عدم الوضوح في التعامل مع الأعداد الحقيقية قد يؤدي إلى وجود اختلافات جوهرية على مستوى تحقيق الأهداف المتوخاة من تدريس هذا النوع من الأعداد، و قد يؤدي إلى طرح إشكالية على مستوى تدريس الجبر والتحليل.

وتجد هذه الإشكالية جذورا لها في تاريخ الرياضيات، حيث أن اكتشاف العدد اللاجذري طرح صيغة جديدة لمشكل التعارض الظاهري ولمشكل التشاكل الحقيقي بين العمليات الحسابية والعمليات الهندسية. وإذا كان هذا الاكتشاف ناتج عن تطور الجذور المربعة لأعداد صحيحة غير كاملة أو لملاحظة وجود أعداد لاقياسية incommensurable فإنه كان نقطة البداية للأزمة فيثاغورسية، حيث أعلن الفصل بين النسب العددية البسيطة والعلاقات الفضائية الابتدائية. ولم تعالج هذه الإشكالية، على المستوى الرياضياتي الصرف إلا بظهور نظرية calcul infinitésimale وخصوصا مع البناء المزدوج (هندسي- حسابي) لمفهوم الاتصال.

وتزداد أهمية هذه الإشكالية بالنظر إلى المساهمة الكبيرة لتدريس الأعداد الحقيقية في بلورة بعض مفاهيم التحليل العددي، حيث أنه يطرح مسألة التقريب، المفهوم الأساسي في التحليل. فمثلا يمكن التعبير عن مفهوم الاتصال بمتفاوتات جبرية، ويمكن النظر إلى البرهنة على اتصال دالة عددية في نقطة لحل لنظمة متراجحتين بارامترتين بمجهول واحد. وكمثال آخر فإن تحديد مجموعة تعريف دالة عددية يحتاج على تقنيات حل معادلة أو متراجحة. وبالإضافة إلى ذلك فإنه يساهم في تدعيم ما قد استوعبه التلميذ بخصوص الحساب الحرفي، المادة التي تساهم دورها في بلورة بعض المفاهيم الجبرية، وخصوصا تلك المتعلقة بنظرية الأجسام. إن هذه المساهمة نابعة من كون التعامل مع العدد الحقيقي هو نفس التعامل مع الحروف، فالعدد الحقيقي $\sqrt{2}$ مثلا ما هو إلا رمزا لنهاية متتالية لأعداد جذرية، أو رمزا للمحد السفلي لمجموعة الأعداد الجذرية التي مربعاتها أكبر قطعا من العدد 2 .

ويجد الحساب العددي أهميته، من الناحية الرياضياتية الصرفة، من كون التحليل العددي يعتمد أساسا على بنية الأعداد الحقيقية في تأسيس مفاهيمه، فمجموعة الأعداد الحقيقية تتوفر على خاصية أساسية تسمح بتعريف مفهوم النهاية.ففي خريف 1858 أشار Dedekind إلى أن ما ينقص الحسابيات في مجموعة الأعداد الجذرية هو قاعدة علمية حقيقية، ويتجلى هذا النقص بالخصوص في الأسئلة المتعلقة بمفهوم النهاية، ويخص بالذكر البرهان على صحة الخاصية التي تفيد بأن كل متتالية تزايدية ومكبورة تقبل نهاية، حيث كان يلجأ عندها إلى الحدس الهندسي.وقد أدى ذلك إلى طرح مسألة البناء الأكسيوماتيكي لمجموعة الأعداد الحقيقية، فقد رأى Dedekind أن المفهوم الحدسي للعدد الحقيقي لم يكن كافيا لتعريف مفهوم النهاية، لهذا قام بتأسيس مجموعة الأعداد الحقيقية وفق نظرية تسمى نظرية:Coupure de Dedekind. وفي سنة 1869 نشر Méray نظرية دقيقة حول الأعداد اللاجذرية معتمدا على مفهوم متتالية كوشي Suite de Cauchy، القاعدة الأساسية في تصوره للتحليل.

ومن وجهة نظر ديدكتيكية، يرى Dedekind أنه من المفيد اللجوء إلى الحدس الهندسي عند التعامل مع الأعداد اللاجذرية، وذلك من أجل عدم تضييع الوقت، ولكن هذا اللجوء، حسب رأيه، لا يمكن اعتباره علميا. إن اللجوء إلى الحدس لا يعنى التنازل عن القيمة العلمية لأية مقاربة لمفهوم العدد الحقيقي، لا بد أن يكون لهذا الحدس حاملا مرئيا يجعله حدسا مشتركا لا يمكن لأحد أن يجادله.

إن بناء مجموعة الأعداد الحقيقية لم يكن هدفا في حد ذاته، بل كان غاية لتطور بطيء ومستمر للرياضيات، فقد كان التعامل مع العدد الحقيقي يتم بالتصور الحدسي إلى حدود نهاية القرن التاسع عشر، حيث حاول بعض علماء الرياضيات(أمثال Weierstrass وCantor وDedekind) طرح بناء متناسق ومنطقي لمجموعة الأعداد

الحقيقية.وكان هدف هذه المحاولات هو جعل تأسيس التحليل والحساب التفاضلي والرياضيات بصفة عامة على قواعد دقيقة وغير قابلة للمناقشة.وقد لاحظ هؤلاء عند القيام بهذه المحاولات غياب قاعدة منطقية تتأسس عليها الحسابيات.

مقاربة للعدد الحقيقي

إن اعتبار العدد الحقيقي الموجب كطول قطعة قد يجعل التلميذ يلامس العلاقات الممكنة بين الأعداد الحقيقية، مثل الجمع والضرب،... .فيمكن تقديم الجمع وخصائصه انطلاقا من الشرط اللازم والكافي لانتماء نقطة إلى قطعة، وتقديم الضرب وخصائصه اعتمادا على مبرهنة طاليس في المثلث، بالصيغة التي أتى بها برنامج السنة الثانية من التعليم الثانوي الإعدادي. ومن أجل تنويع طرق تقديم قاعدة النشر والتعميل(توزيعية الضرب بالنسبة للجمع) يمكن الاعتماد على المبرهنة السالفة الذكر، وعلى الشرط اللازم والكافي لانتماء نقطة إلى قطعة.أما بالنسبة لقاعدة نشر مجموعين أو المتطابقات الهامة فإن الأمر لا يستدعي سوى تطبيق قاعدة النشر والتعميل. إلا أن هذه المقاربة تطرح إشكالية قد لا تظهر على مستوى تقديم المادة التعليمية، وتكمن في وجود أعداد غير قابلة للإنشاء بواسطة المسطرة والبركار، مثل π .ويمكن في هذه المرحلة معالجتها باعتبار العدد π مساحة قرص شعاعه1 واعتبار العدد الحقيقي الموجب ،القابل للإنشاء بواسطة المسطرة والبركار، كمساحة مستطيل، وبالتالي يمكن جمع عدد حقيقي قابل للإنشاء بواسطة المسطرة والبركار والعدد π .

إن تصور العدد الحقيقي الموجب كطول قطعة له ما يبرره من الناحية الرياضياتية الصرفة، ويتجلى ذلك في كون دراسة الدوال العددية لمتغير واحد تعتمد على المستقيم العددي التي تعبر عن التشاكل التقابلي الموجود بين مجموعة الأعداد الحقيقية والمستقيم التآلفي. إن هذا التصور يجد تبريرا له في كونه يساعد على حل بعض المسائل الجبرية، التي يكون حلها الجبري مستعصيا أو يتطلب القيام بعمليات حسابية مكلفة، أو لا تؤدي إلى نتيجة حتمية.ولكي نكون أكثر وضوحا نقترح المثال التالي: أوجد العددين الحقيقيين x و y حيث أن:

$$\sqrt{x^2+a^2-\sqrt{3}ax}+\sqrt{y^2+x^2-\sqrt{3}xy}+\sqrt{b^2+y^2-\sqrt{3}by}=\sqrt{a^2+b^2}$$

ويبدو، من خلال النظرة الأولى إلى هذه المسألة، أنه من الصعب أن يجد التلميذ حلا لهذه المسألة. إن هذه النظرة لها من المصداقية ما يجعلها سائدة، نظرا لكون تقديم الأعداد الحقيقية يتم بمعزل عن ارتباطاتها الهندسية، باستثناء ذلك التقديم الذي يوحي بوجود أعداد مثل الجذر المربع لعدد صحيح طبيعي.

ووفق هذا التصور الهندسي للعدد الحقيقي يمكن تحويل كل عدد من الأعداد الثلاث التي تشكل الطرف الأيسر لهذه المتساوية إلى مسافة، سواء باستعمال المعلم المتعامد الممنظم أو استعمال مبرهنة الكاشي،وبذلك نحصل على متساوية من الشكل$AM+MN+NB=AB$،وبالاعتماد على المتفاوتة المثلثية يمكن الجزم بأن النقطتينMوN تنتميان إلى القطعة$[AB]$ وبذلك يتم تحويل مسألة جبرية إلى مسألة هندسية.

وعلى مستوى إنجاز التمارين المتعلقة بالأعداد الحقيقية، تطرح إشكالية حول تبسيط بعض الكتابات المعبر عنها بالجذور المربعة لأعداد حقيقية موجبة، وعلى سبيل المثال، فإن طريقة العمل بالمحاولة والخطأ هي الطريقة الوحيدة المتعارف عليها لتبسيط كتابة عدد يكتب على الشكل $\sqrt{a+b\sqrt{m}}$، حيث أن aو b عددان جذريان و m عدد صحيح طبيعي غير مربع كامل تحقق العلاقة$a+b\sqrt{m}>0$ وذلك بغية كتابة العدد$a+b\sqrt{m}$ على شكل متطابقة هامة، الشيء الذي لا يمكن القيام به دائما، مما يجعل اختيار التمارين يخضع إلى معيار يكون واضحا لدى التلميذ، بعدما يقوم بإنجاز مجموعة من التمارين المتشابهة.

وفي بعض الأحيان، تلجأ الممارسة إلى استعمال خاصية مجموع وجداء عددين حقيقيين، وذلك بشكل ضمني، نظرا لعدم إدراجها ضمن محتويات البرنامج الدراسي(عدم امكانية توظيفها في فترة تناول هذا النوع من التمارين على الأقل).ولا توجد في الكتب المدرسية إشارة واضحة لتجاوز الصعوبات الناتجة عن عدم قدرة التلميذ على مجاراة ما تقترحه هذه الكتب. فإذا كان من الطبيعي أن لا تشير البرامج الدراسية إلى طريقة لمعالجة هذه الإشكالية فإنه ليس من المنطقي أن تطرح الكتب المدرسية تمارين تعالج بطريقة المحاولة والخطأ أو بالاستعمال الضمني لبعض النتائج غير المؤسساتية.

إن الطريقة العـــــامة لتبسيط مثـــل هذه الأعداد تكمن في اعتبار العدد: $A=\sqrt{a+b\sqrt{m}}$ والعـــــدد $B=\sqrt{a-b\sqrt{m}}$ في الحالة التي يكون فيها العدد$a-b\sqrt{m}$ موجبا أو العدد $B'=\sqrt{b\sqrt{m}-a}$ في الحالة الأخرى، وبعد ذلك يتم حساب العدد $(A+B)^2$، الذي يمكن من حساب العدد $A+B$، وإذا أريد تفادي استعمال الترتيب يمكن حساب العدد A^2-B^2، الذي يمكن من حساب العدد $A-B$، أما إذا أريد توظيف الترتيب فيمكن حساب العدد $(A-B)^2$ وبذلك يمكن تبسيط العددينA وB.

ونلاحظ أن وجود هذا النوع من الإشكاليات مرتبط بكيفية تقديم المادة التعليمية فقط، فلا يمكن إذن النظر إليها من زاوية مواصفات التلميذ، فلا بد من تغيير النظرة لطريقة تقديم الأعداد الحقيقية.

الترتيب في مجموعة الأعداد الحقيقية

إذا كانت مقارنة عددين جذريين لا تطرح صعوبات على مستوى التطبيق، لأنه يمكن دائما حساب فرق عددين جذريين معلومين، فإن مقارنة عددين حقيقيين تطرح صعوبات أمام المتعلم، نظرا لعدم وجود قاعدة لحساب فرق عددين حقيقيين، كما هو الشأن بالنسبة للأعداد الجذرية، وعلى سبيل المثال، عند مقارنة العدد$\sqrt{10}+\sqrt{6}+1$ و$\sqrt{12}+\sqrt{2}+2$ يبدو تعريف علاقة الترتيب دون فعالية، لهذا تلجأ الممارسة إلى مأسسة بعض القواعد، قد تبدو ذات فاعلية في مجال محدود.

وعلى سبيل المثال، يبدو أن قاعدة مقارنة مربعي عددين حقيقيين غير مجدية في الإجابة عن السؤال السابق. إن هذه المقارنة تحتاج إلى ابتكار طريقة لا تنص عليها المعارف الأساسية المستهدفة صراحة، ويتعلق الأمر بإيجاد عدد حقيقي محصور بينهما(استعمال الخاصية التي كانت تسمى خاصية التعدي). الأمر الذي يستدعي استعمال القيمة المقربة لكل عدد من العددين. إنه مجرد سؤال، تحاول الممارسة تفاديها، بدعوى أن المستوى المعرفي للتلاميذ لا يسمح بتناول هذا النوع من الأسئلة. فلو طرح على التلاميذ لبرزت الصعوبات الجمة التي تعترض التلاميذ في مجالات الترتيب في مجموعة الأعداد الحقيقية.

إن ترتيب الأعداد الحقيقية يلعب دورا أساسيا في تزويد التلميذ ببعض المفاهيم والمهارات التي تتدخل في بناء مفاهيم التحليل العددي، فجل مفاهيم التحليل العددي تعتمد على علاقة الترتيب في تشكليها. ومن بين المفاهيم التي تطرح صعوبات سواء على مستوى التقديم أو على مستوى الاستيعاب نجد مفهوم النهاية، الذي يرتبط ارتباطا وثيقا بالمفاهيم المتعلقة بالترتيب في مجموعة الأعداد الحقيقية.

ومن بين هذه المفاهيم المرتبطة بالترتيب نجد مفهومي كابر وصاغر جزء من مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية، اللذان كانا يشكلان صعوبة لدى تلاميذ السنة الأولى سلك الباكالوريا- علوم رياضية،وربما كان من بين الأسباب التي أدت إلى حذفهما من البرنامج الدراسي. وبالنظر إلى علاقة الترتيب يمكن حل العديد من المسائل المرتبطة بهذين المفهومين.

ولنأخذ مثالا، نعتبر المجموعة:$\left\{\frac{x^4+x^2-1}{x+1}/x\in\mathrm{IR}^+\right\}$ ونطرح السؤال التالي هل هذه المجموعة مكبورة؟.إن التفكير المباشر في البحث عن الإجابة يدفع إلى حل متراجحة بارامترية من الدرجة الرابعة بمجهول واحد، الشيء الذي لا يمكن القيام به.كما يمكن التفكير في دراسة دالة عددية لمتغير واحد، وهذا يتطلب الاستعمال الضمني لمفهوم الكابر. ولكن إذا تم التفكير في إمكانية كتابة كل عنصر من عناصر هذه المجموعة على شكل مجموع عددين حقيقيين أحدهما موجب فإنه من الممكن الإجابة عن السؤال المقترح بسهولة، وذلك بالاعتماد على خاصية الترتيب والعمليات.

ومن المنطلق، فإن الصعوبات التي تظهر عند تدريس مفاهيم التحليل تكون ناتجة بالأساس عن الصعوبات المنتجة عن كيفية تقديم الترتيب في مجموعة الأعداد الحقيقية. فلا بد من محاولة فهم بعض الأخطاء التي تظهر عند المتعلم عندما يكون أمام مسألة تتعلق بالترتيب.

أول الأخطاء التي ترتكب من طرفي بعض المتعلمين في هذا المجال نجد تلك التي تنتج عن طريق التوظيف السيئ للرمز المخصص لعلاقة الترتيب. ويعتقد بعض التلاميذ أن الكتابتان التاليتان $x<y$ و $x>y$ مختلفتين. وخصوصا عندما يتم ربطها بقاعدة ضرب طرفي متفاوتة في عدد حقيقي سالب قطعا، لأن هذه القاعدة تصاغ بطريقة توحي بأن عملية الضرب تؤثر على رمز علاقة الترتيب.

إن عدم انسجامية علاقة الترتيب وعملية الضرب في مجموعة الأعداد الحقيقية يجعل البرنامج الدراسي يأخذ بعض الترتيبات من أجل الحد من تلك الصعوبات الناتجة عنها. فنجد البرامج الدراسية لا تتناول مفهوم المجال إلا انطلاقا من التعليم الثانوي التأهيلي، وتلغي دراسة بعض حالات التأطير بالتعليم الثانوي الإعدادي.

ورغم هذه الإجراءات فإن هذه الصعوبات تبقى صامدة لكل محاولة لمعالجتها، وتظهر بالجدية عندما يكون التلميذ مكلفا بحل متراجحة من الدرجة الأولى بمجهول واحد، رغم أنه بالإمكان تفادي وجود معامل المجهول عددا حقيقيا سالبا قطعا. ويمكن تحميل الممارسة مسؤولية ذلك، نظرا لكونها تقدم المتراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد مصنفة وفق أربعة أصناف لا رابطة بينها، دون التوقف عند إمكانية اختزال هذا التصنيف. ويطرح الترتيب إشكالية تأطير جذاء عددين حقيقيين، إشارة أحدهما أو كلاهما غير معلومة. وتتمثل معالجة هذه الإشكالية في حذف كل أسئلة هذا التأطير من التداول خلال السنة التي يتعلم فيها التلميذ مبادئ الترتيب. وقد يجد التلميذ نفسه أمام وضعيات،

يستعصي عليه حلها أو يرتكب فيها أخطاء، ومن النماذج التي يمكن طرحها في هذا المجال الخطأ الذي يرتكب من طرف بعض تلاميذ التعليم الثانوي التأهيلي، والذي يتجلى في اعتقاد هذا البعض أن العدد الصفر لا ينتمي إلى مجال من النوع $[-2;3]$. ومن بين الممارسات الناتجة عن عدم معالجة هذه الإشكالية نجد البعض من التلاميذ يقوم بضرب متفاوتين طرفا بطرف دون التأكد من إشارة أطراف هاتين المتفاوتين.

إن معالجة الصعوبات التي يطرحها الترتيب في مجموعة الأعداد الحقيقية لا تعالج بطرح قواعد مرحلية، تخاطب حالات خاصة من حالات الترتيب، بل تحتاج إلى إستراتيجية خاصة لمعالجة الصعوبات الناتجة عن المفاهيم المتعلقة بالترتيب في مجموعة الأعداد الحقيقية. ومن هذا المنطلق، تستمد الروابط بين علاقة الترتيب والعمليات أهميتها، سواء على المستوى الرياضياتي الصرف أو على مستوى التكوين المستقبلي للتلميذ، ويمكن تدعيم هذه المكانة التي يحتلها الترتيب باقتراح وضعيات مختلفة لمقاربة عددين حقيقيين تختلف حسب الطرق المستعملة في معالجتها.

الـــــمجـــالات

ومن بين المفاهيم التي تم حذفها من البرنامج الدراسي للسنة الثالثة من التعليم الثانوي الإعدادي نجد مفهوم المجال، وقد يعتقد أن هذا الحذف ناتج عن صعوبة تقديمه كمجموعة، إلا أن هذا الاعتقاد يصدم بمفارقة تتجلى في تقديم مفهوم قطعة كمجموعة.

وقد يعتقد أن تدريس الرياضيات بالتعليم الثانوي الإعدادي ليس في حاجة إلى مفاهيم لا تستعمل في صياغة مفاهيم أخرى من نفس البرنامج. إن مثل هذا الاعتقاد قد يصاب بالنقض عندما نطلع على أن هذه البرنامج تحتوى على مفاهيم لا تخدم إلا نفسها.

وقد يعتقد البعض أن مفهوم المتراجحة من الدرجة الأولى بمجهول واحد قد يساعد على استيعاب مفهوم المجال. إلا أن حل متراجحة لا يكفي بطرح مفهوم المجال، لأنه لا يضيف قيمة على التعريف الذي يقدم في هذا الصدد، بل مفهوم المجال هو الذي يضيف قيمة لحل متراجحة لأنه يستطيع تمثيل حلولها على المستقيم العددي، وقد يساعد على التعبير عن مجموعة حلولها. ولهذا يكون من الضروري الانطلاق من معرفة اقل كلفة على مستوى استيعابها. وفي هذا الصدد كان من الممكن طرح تعريف المجال كحاجة للتعبير عن علاقة ترتيب بين عناصر مجموعة من الأعداد الحقيقية.

إن الوسيلة المناسبة لتقديم مفهوم المجال تكمن في الانطلاق من أجزاء المستقيم، ليتم الربط بين مجالات مجموعة الأعداد الحقيقية بأجزاء المستقيم العددي، وفي هذا الصدد، كان من الممكن الربط بين المجال المغلق وقطعة والمجال المفتوح بقطعة محرومة من طرفيها... الخ. وبذلك يمكن له تقديم مركز وشعاع وسعة مجال مغلق على التوالي، كمركز تماثل القطعة وشعاع الدائرة التي أحد أقطارها القطعة الممثلة للمجال وطول القطعة. وذلك بغية العمل على جعل التلاميذ يستوعبون لماذا الاقتصار على المجال المغلق عند الحديث عن المركز والشعاع والسعة.

ويكون من الأفيد للمتابعة التعليمية عدم التركيز على اتحاد مجالين، لأنه في غالب الأحيان لا يمكن إيجاد كتابة أخرى لاتحاد مجالين تستعمل رمز المجال. ويكون من المجدي أيضا طرح وضعيات تستدعي استعمال تقاطع واتحاد مجالين، لأن هذين المفهومين لا يعتبران هدفا في حد ذاتهما، بل هما وسيلتين للتعبير عن بعض الوضعيات. ويكون من المفيد اعتماد التمثيل الهندسي للمجال من أجل تحديد تقاطع مجالين، حتى يتمكن التلاميذ من مواجهة الوضعيات، التي تتناول مسائل من الحساب الحرفي.

الحساب المثلثي

إن الخطوة الأساسية لتقديم الحساب المثلثي قد قدمت من خلال برنامج السنة الثانية من التعليم الثانوي الإعدادي، الذي طرح مفهوم جيب تمام زاوية حادة. ويأتي برنامج السنة الثالثة من التعليم الثانوي الإعدادي لطرح مفهومي جيب وظل زاوية حادة، وسرعان ما يتم محو ما تعلمه أغلبه التلميذ من خلال برامج التعليم الثانوي التأهيلي، حيث يتم بناء الحساب المثلثي انطلاقا من الأفاصيل المنحنية لنقطة على الدائرة المثلثية.

ويمكن النظر إلى جيب زاوية حادة من وجهتي نظر مختلفتين: تكمن الأولى في كون مفهومي جيب وجيب تمام زاوية حادة مفهومين متلازمين، بمعنى أن وجود أحدهما يفرض وجود الآخر، وفق العلاقة التي تربطهما، وحسب هذه الوجهة يمكن تقديم جيب زاوية حادة انطلاقا من جيب تمامها. وتنطلق الوجهة الثانية من كون الأولى تكون قاصرة على مستوى التطبيق، حيث أن لا يمكن اللجوء دائما إلى جيب تمام زاوية حادة لتحديد جيبها، وتفرض وجهة النظر الثانية تقديم جيب تمام زاوية حادة بمعزل عن جيب تمامها، لتأتي العلاقة بينهما في مرحلة لاحقة.

وعند تقديم جيب زاوية حادة وفق وجهة النظر الثانية، يعتمد على الإسقاط العمودي على ضلع لها، دون طرح مسألة ثبات تلك النسب عندما نختار الإسقاطين العموديين على الضلعين للزاوية الحادة. إن طرح هذه الإشكالية لا يهدف إلى التشكيك في مصداقية التقديم الممارس، ولكن يبتغي تقديم ملائم لجميع وضعيات الحساب المثلثي، والإجابة عن بعض الوضعيات غير الروتينية التي نصادفها في حل مسائل الحساب المثلثي أو المسائل المتعلقة بها. وفي هذا الصدد يمكن الاعتماد على مفهوم المساحة أو على اعتبار أن منصف الزاوية هو محور تماثلها لمعالجة هذه الإشكالية أو على مفهوم جيب تمام زاوية حادة

لدينا، إذن، ثلاث مقاربات لتقديم لجيب تمام زاوية حادة: المقاربة الأولى تعتمد على مفهوم مساحة مثلث، يمكن من إثبات النسب عندما نختار الإسقاطين العموديين على ضلعي تلك الزاوية، والمقاربة الثانية تعتمد على ثبات تلك النسب عند اختيار إسقاط عمودي على ضلع واحد لتلك الزاوية، على أساس أن يتدخل التماثل المحوري لإثبات ثبات تلك النسب عند الإسقاط العمودي الثاني. وهناك مقاربة ثالثة تعتمد على استخراج جيب زاوية حادة من جيب تمامها. أما بالنسبة لضل زاوية حادة فإن الأمر يعتمد على تلك المقاربة التي استعملت في تقديم جيب تمام زاوية حادة وجيبها، لتأتي الصيغة التي تحدده بدلالة الجيب والجيب تمام في مرحلة ثانية.

وعند التعليم الثانوي التأهيلي تطرح إشكاليات أمام تدريس الحساب المثلثي، لا تعالج إلا عن طريق الاعتماد على فطنة التلاميذ وعلى قدرتهم على مجاراة المدرس. ويتعلق بالإشكالية المترتبة عن الأفاصيل المنحنية، وتلك المرتبطة بتوجيه المستوى، والأخرى المتعلقة بالزوايا الموجهة، بالإضافة إلى إشكالية قياس الزوايا بالرديان.

ومن بين الأخطاء الشائعة في مجال الحساب المثلثي نجد الخطأ الذي يمكن التعبير عنه بالقول بأن التلميذ يخلط بين قياس الزاوية وإحدى نسبها المثلثية. إن هذا الخطأ لتعبير واضح لمخلفات هذه الإشكاليات، والذي لا يمكن معالجته بالقول للتلميذ بضرورة التمييز بين قياس الزاوية ونسبها المثلثية أو بالتجاهل.

ولا توجد محاولات مؤسساتية لمعالجة مخلفات هذه الإشكاليات، تبقى المحاولات الفردية، التي غالبا لا تنشر، هي الوسيلة الوحيدة لمعرفة كيفية تعالج هذه الإشكاليات بشيء من احترام المبادئ التربوية الدنيا. ولا يمكن تحميل المدرس المسؤولية لعدم وجود هذا النوع من المحاولات.

ويطرح الحساب المثلثي فكرة أساسية، تكمن أساسا في كونه وسيلة تسمح بتحويل قياسات الزوايا إلى علاقات مترية، يمكن التعامل معها بالطريقة الجبرية، ولن تظهر هذه الفكرة بصورة جلية إلا بعد دراسة الدوال المثلثية، التي يمكن القيام بها هندسيا وبعد مأسسة مبرهنة الكاشي.

ويمكن النظر إلى جيب تمام وجيب زاوية كإحداثيتي نقطة في معلم متعامد ممنظم، ويترتب عن ذلك بعض المفاهيم المتعلقة بالحساب العقدي، كالشكل المثلثي لعدد عقدي.وبالإضافة إلى ذلك فإنه يمكن توظيف الحساب المثلثي في حل العديد من المسائل الهندسية، وفي إنتاج بعض المسائل الجبرية. ومن هذا المنطلق، تكون الصعوبات الناتجة عن تدريس الحساب المثلثي أسبابا وجيهة لبعض الأخطاء التي ترتكب من طرف المتعلم عند تناوله تمارين من تمارين الحساب العقدي أو أسبابا لعدم قدرة التلميذ على توظيف مفاهيم الحساب المثلثي في حل بعض مسائل الرياضيات.

إن الغاية من تقديم الحساب المثلثي، انطلاقا من السنة الثانية من التعليم الثانوي الإعدادي، تتجلى بالخصوص في تزويد التلاميذ بنمط جديد للتفكير الرياضياتي، يسمح له الانتقال من المفاهيم الزاوية إلى المفاهيم المترية. وقد يؤدي ذلك إلى جعل التلميذ يباشر بعض الوضعيات، التي كانت معالجتها مستعصية في وقت سابق. وهذه مناسبة تمكن التلميذ من الربط بين موارده وتجنيد البعض منها. وهذه أسباب وجيهة تجعل من الضروري عدم تقديم الحساب المثلثي منعزلا عن المفاهيم الهندسية المرتبطة به، والأخذ ببعض الترتيبات التي تمكن من تقليص تأثير بعض المفاهيم المؤسسة له.

إن التقديم المتوارث لمفهوم جيب تمام سهل التطبيق ولكنه غير مكتمل، يقدم المعرفة ناقصة. لهذا يكون من الضروري التوقف عند هذه المعرفة قصد مساءلتها و محاولة استخراج ما يناسب التلميذ والمعرفة الرياضياتية معا. إن استعمال بعض المصطلحات (مثلا: جيب تمام زاوية حادة في مثلث قائم زاوية) قد توحي للتلميذ أن هذا المصطلح يخص وضعية بعينها، مثلا: قد يعتقد التلميذ أنه لا يمكن الحديث عن جيب تمام زاوية حادة لمثلث. لهذا كان من المفروض عدم ربط تقديم جيب تمام زاوية حادة بمثلث قائم الزاوية، ويمكن تحقيق ذلك إذا تمت مراجعة التقديم المتوارث لهذا المفهوم

صعوبات التحليل

ويعتبر التحليل جزءا هاما من مادة الرياضيات، يهتم أساسا بالتقريب ويتدخل في تفسير بعض الظواهر الطبيعية، وفي تفسير بعض خصائص الهندسة. وبما أن مفهوم الدالة هو اللبنة الأساسية للتحليل فإن تدريس التحليل يبدأ من السنة الثالثة من السلك الثانوي الإعدادي. لهذا يكون من اللازم أن يستمد مفهوم الدالة الخطية دلالته من بعض وضعيات الواقع المعيش، كأداة تحدد العلاقة السببية بين ظاهرتين، حتى يتمكن التلاميذ في وقت لاحق من استيعاب مفهوم الدالة.

ويأتي هذا البرنامج لتدعيم ذلك والسمو به، مقترحا نوعا آخر من الدوال العددية، ويتعلق الأمر بالدالة التآلفية. إلا ذلك ليس كاف من أجل تأسيس مفهوم الدالة العددية، ويبقى هذا المفهوم كتعبير لبعض وضعيات التناسبية، رغم أن البرنامج الدراسي ينص على ربط الدالة التآلفية بمعادلة مستقيم، دون تحديد آلية تمكن من ذلك، مما أدى

إلى بعض الانزلاقات، والتي تمثلت في اعتبار المستقيم كمنحنى دالة تآلفية! ويبدو أن تأسيس هذا المفهوم على هذه الشاكلة قد يكون له تأثيرات سلبية على تعامل التلميذ مع الدوال العددية.

ومن الناحية التاريخية، فإن $Leibniz$ هو أول من استعمل لفظ دالة للدلالة على المنحنى الهندسي، الذي يعبر عن علاقة متصلة بين كمين متغيرين. فقد ساد الاعتقاد إلى حدود أواسط القرن التاسع عشر أن كل الدوال متصلة. مما أدى إلى زعزعة الحدس الهندسي للاتصال.

ومن الناحية الديداكتيكية فإن مفهوم الاتصال لا يظهر إلا في المراحل المتأخرة من تنفيذ برامج السلك الثانوي، رغم أن تقديم بعض الدوال يكون في المراحل المتقدمة. إن هذا التقديم يتطرق ضمنيا إلى فكرة الاتصال عندما يقدم التمثيل المبياني لهذا الدوال بالاعتماد على الحدس الهندسي فقط.

ورغم أنه من الممكن استخراج مفهوم الدالة الخطية من بعض وضعيات الواقع المعيش، فإن صياغة تعريف لها يبقى صعبا من الناحية الرياضياتية الصرفة، لهذا يتم بالإشارة إلى هذا المفهوم بمعامل الدالة الخطية، مما يجعل مفهوم الدالة غير مدرج بشكل صريح في برامج السلك الثانوي الإعدادي. ويدفع إلى الاعتقاد بأن التلميذ الوافد من التعليم الثانوي الإعدادي استوعب مفهوم الدالة العددية، مما قد يشكل عائقا لاستيعاب مفهوم الدالة العددية كما هو مسطر في برامج التعليم الثانوي الإعدادي.

وبالإضافة إلى صعوبة استيعاب مفهوم الدالة من طرف التلميذ، تأتي صعوبات أخرى تنتج عن التقديم السريع للرمز المركب المخصص للدلالة على الدالة العددية، والتي تظهر على قصور في التعامل مع مفاهيم التحليل عموما.

ورغم هذه التحفظات قد يعتقد البعض أن التلميذ قد لا يجد صعوبة عند تناوله تمارين التحليل، ويعلل ذلك بالقول بأن التحليل ليس سوى خوارزميات، إن أحسن التلميذ تطبيقها فإن النتيجة تكون جيدة. إن هذا التصور يجد مشروعيته في مواضيع الامتحانات الإشهادية، حيث أن الأخيرة لا تعير اهتماما لمفاهيم التحليل إلا من زاوية التطبيق الداخلي المباشر لها. إن الموقف السائد من تدريس التحليل يجعل من الصعب التعرف على مكامن تلك الصعوبات التي تعترض التلاميذ في هذا المجال، وخصوصا وأن الأستاذ لا يجد عقبة تذكر أمام تقديم مفاهيم التحليل، لأن جل العقبات قد أزيلت سواء من طرف البرنامج الدراسي، أم من طرف العادات المتداولة، وقد لا يستغرق تدريس التحليل أكثر من شهر من طرف بعض الممارسات في السنة الثانية سلك الباكالوريا شعبة العلوم التجريبية.

نهاية دالة عددية

الكل يتفق على أن التعريف الرياضياتي لمفهوم النهاية المنتهية لدالة في نقطة لا يفيد التلميذ في تعامله مع حساب نهايات الدوال العددية، ويذهب البعض إلى القول بأنه لا يمكن للتلميذ أن يستوعب هذا التعريف. وهذا أمر طبيعي بالنظر إلى الكيفية التي تم بها توريث هذا التعريف، حيث كان يقدم هذا التعريف بكيفية يصعب على التلميذ قراءته، نظرا لاعتماد صياغته يعتمد على المكممات المنطقية، بطريقة متزامنة، بالإضافة إلى أن هذا التعريف يفترض معرفة النهاية قبل الشروع في البرهنة على أنها بالفعل نهاية.

إن التعريف المتعارف عليه للنهاية المنتهية لدالة لا يفيد في تقديم مفهوم النهاية، لأنه لا يحدد كيفية التوصل إلى تحديد هذه النهاية وبقي مفهوم النهاية مرتبط بهوية عدد حقيقي مجهول، فإنه يعرف عددا حقيقيا كنهاية دالة منتهية لدالة في نقطة. إنها أولى الإشكاليات التي يطرحها هذا المفهوم.

ومن خلال قراءة متفحصة لهذا التعريف، يمكن ملاحظة أن تعريف النهاية المنتهية لدالة عددية يلخص فكرة مفادها بأن هذه النهاية ما هي إلا نتيجة لعمليات التقريب. ولا تظهر هذه الفكرة من خلال ما يسمى التقديم الحدسي لمفهوم النهاية. إن تكريس هذا التوجه يتطلب أولا التعامل مع عمليات التقريب. و في هذا المجال، تكمن إشكالية استعمال الأداة المعلوماتية.

وتوجد قراءة أخرى لهذا التعريف، تمكن من تقديم هذا التعريف بسلاسة، تمكن التلميذ من معاودة إنتاج هذا التعريف، وتتلخص هذه القراءة في كون البرهنة على أن عدد حقيقي هو نهاية دالة عددية في نقطة تعود إلى الحل المحلي لمتراجحة بارامترية. وفي هذا الصدد، تظهر إشكالية عدم إدراج المتراجحات البارامترية.

إن المناداة بتقديم مفهوم النهاية عن طريق دراسة "حدسية" لسلوك بعض الدوال العددية تطرح عدة إشكاليات على مستوى ترجمة ما المقصود بالدراسة الحدسية. وفي هذا المجال، نجد البعض يكتفي بطرح هذه الدراسة عن طريق القيام ببعض الحسابات، ومطالبة التلاميذ باستخلاص نتائج لا نعرف ماهيتها. وكنتيجة لذلك تعوض كلمة نهاية بتعابير مثل تؤول، يقترب أكثر فأكثر... .

ولا يمكن الاعتماد على فطنة التلاميذ لتمرير بعض المفاهيم الرياضياتية، لأن هذا النوع من التصرف قد يؤدي ببعض التلاميذ إلى النفور من المادة، نظرا لعدم قدرتهم على مجارات ولائك التلاميذ القادرين على الانقياد أمام هذا الخطاب، فكيف يمكن أن يستوعب التلميذ مفهوم النهاية الذي يعتمد في صياغته مفهوم مرادف له. إن استعمال بعض المصطلحات بدون مرجعية (مثل استعمال مصطلح يؤول) قد يؤدي بالتلميذ إلى الاعتقاد بأن مجالات مجموعة الأعداد الحقيقية هي مجموعات متقطعة، وقد يؤدي إلى الاعتقاد أن كل دالة عددية تقبل نهاية في نقطة.

ومن بين الوسائل التي تقترحها التوجيهات التربوية المرافقة للبرامج الدراسية استعمال الأداة المعلوماتية من أجل قيام هذا النوع من الدراسة، إلا أن عدم وجود تصور واضح لمثل هذه الاستعمالات يبقى المجال مفتوحا لبعض الممارسات، لا تسعى إلى مساعدة المتعلم لاستيعاب مفهوم النهاية، لأنها لا تقترح على المتعلم أنشطة تستدعي استعمال هذه الأداة.

إن مفهوم نهاية دالة عددية في نقطة يكون كافيا لتقديم باقي أنواع النهايات بطريقة تجعل التلاميذ يشارك بفعالية في تقديم تعاريف لا تلجأ إلى الحدس في صياغتها، بمعنى أنه بالإمكان تقديم تعريف حدسي للنهاية المنتهية لدالة عددية في نقطة تجاوزا،على أساس أن يكون ما تبقى من المفاهيم المدرجة في درس نهاية دالة مواضيع لتمارين.

إن التلميذ يجد الصعوبة في إيجاد الطريقة الملائمة لرفع الشكل غير المحدد عند حساب نهاية دالة، ولا يمكن إقناع التلميذ بأن اللجوء إلى النهايات الأساسية لدوال مرجعية هو الوسيلة الوحيدة لتجاوز هذه الصعوبة. وفي هذا المجال يمكن إقناع التلميذ بأن قراءة مكونات الدالة المقترحة والبحث عن الترابطات بين هذه المكونات تسمحان في الحالة العامة برفع الشكل غير المحدد. وعلى سبيل المثال، إذا كانت نهاية دالة f عند نقطةa هي زائد مالانهاية و كانت لدالة أخرىg نفس النهاية في النقطةa فإنه ليس من الممكن التعرف على الطريقة العامة لحساب نهاية $f-g$ في النقطة a إلا في الحالة التي تكون فيها نهاية الدالة $\frac{f}{g}$ في النقطة a مخالفا للعدد 1

وقد يجد بعض التلاميذ صعوبة في استعمال تقنية تغيير المتغير عند حساب النهاية، لهذا يكون من الضروري ربط هذه التقنية بنهاية مركب دالتين، وخصوصا عند الاستعمالات الأولى لهذه التقنية. وخصوصا وأنه جرت العادة في الامتحانات الإشهادية أن تعطى للتلميذ المتغير الجديد، فلا بد أن تساهم المتابعة التعليمية في إفهام التلميذ هذا الاختيار ولو أنه ليس مطالبا بابتكاره.

إن استعمال الأداة المعلوماتية لا ينحصر في كونها أداة تعفي المتعلم من القيام بحسابات قد تقوم بها الآلة الحاسبة، بل تمكن الأستاذ من إبراز طبيعة مجالات مجموعة الأعداد الحقيقية(مفهوم الاتصال) التي تؤسس مفهوم النهاية، وتمكن المتعلم من إدراك مفهوم نهاية دالة عددية كتعبير لسلوك هذه دالة على مجال معلوم.

ولا يمكن استغلال البرانم المعلوماتية كوسيلة تعفي الأستاذ من أجل رسم المنحيات، فهي تتوفر على خدمات في غاية من الأهمية تمكن المتعلم يدرك مفهوم النهاية(وتتلخص هذه الخدمات في إمكانية التكبير والتصغير و في إمكانية الحركية عند رسم الأشكال).

اشتقاق دالة عددية

إن كل معرفة رياضياتية لها خلفية قد تساهم في توسيع دائرة استيعابها من طرف التلميذ. وهذه الخلفية قد تكون ناتجة عن كيفية تقديم هذه المعرفة. فإذا أخذت هذه الخلفية بعين الاعتبار عند إعداد أية مقاربة لهذه المعرفة فإن عملية استيعابها من طرف التلميذ قد تكون متيسرة: إن مفهوم الاشتقاق على اليمين أو على اليسار يبدو طبيعيا إذا طرحت دالة معرفة فقط على اليمين أو على اليسار، نظرا لأن تعريف هذا المفهوم يتطلب ذلك. ومن أجل جعل التلميذ يدرك ضرورة التقيد بالشروط الواردة في أي تعريف يكون من اللازم على المتابعة التعليمية أن توفر للتلميذ وضعيات تبرز أهمية هذه الشروط و إلزامية التقيد بها. وعلى سبيل المثال فإن خلفية طرح قابلية اشتقاق دالة على اليمين في نقطة تكمن أساسا في كون هذه الدالة غير معرفة على يسار هذه النقطة أو أنها معرفة على مجالين بشكلين مختلفين.

إن جل الصعوبات المتعلقة بالاشتقاق هي الصعوبات الناتجة عن عدم الاستيعاب الجيد للعمليات على النهايات، وتبقى صعوبة ناتجة عن عدم الإدراك الجيد للرابطة بين قابلية اشتقاق دالة في نقطة وحساب النهاية، وقد يمكن معالجة هذه الصعوبة عن طريق الاختيار المناسب للتمارين.

إن معالجة التمارين تخضع لمنطق، لا بد أن يبادر الأستاذ إلى التحديد العلني لملامحه من خلال كل مناسبة يقترح فيها تمرينا، حتى يتمكن التلميذ من الإدراك الجيد للعمليات الذهنية التي يتطلبها حل تمرين، والتي تمكنه من القدرة على معاودة إنتاج حلول التمارين التي يصادفها. فهناك أسئلة تبقى عالقة في دهن التلميذ، وعلى سبيل المثال، لماذا نلجأ إلى الاختزال أو استعمال المرافق عند دراسة اشتقاق بعض الدوال.

المعادلات التفاضلية الخطية

ومن بين ما ينص عليه البرنامج الدراسي تقديم المعادلات التفاضلية انطلاقا من حلولها، بمعنى أنها لا تقدم لغاية التعرف على كيفية حل نوع خاص من المعادلات، أو تقديم مجموعة من الدوال تحقق علاقة تحليلية. ويعتقد البعض أن هذه الطريقة هي الأنسب، نظرا لكون طريقة حل هذا النوع من المعادلات المتعارف عليها تحتاج إلى مفاهيم لا ينص عليها البرنامج الدراسي. إن مثل هذا القول لا يسعى إلى فتح المجال للاجتهاد، ويحاول معاودة إنتاج المعرفة بأقل تكلفة. وبمجرد قراءة معادلة تفاضلية خطية من الدرجة الثانية قد نتوصل إلى طريقة لحلها في حالتين، أما في الحالة الثالثة فإن محاولة الربط بين الحل المعلوم وبين متغيرات المعادلة تكون كافية من أجل طرح طريقة لحلها.

وتجد الدعوة إلى تقديم المعادلات التفاضلية انطلاقا من حلولها مبررا لها في كون البرنامج الدراسي يهدف إلى المساهمة في إنتاج بعض المفاهيم من العلوم الفيزيائية. إن هذا المبرر يصطدم بواقع يجعله دون جدوى، لأن مدرس العلوم الفيزيائية يقدم هذه المعرفة بنفس الطريقة التي يقدمها مدرس الرياضيات وقد يتفوق الأول على الثاني عندما يقدم تطبيقا لها في حينه.

وقد ينتج عن هذا التصرف إحساس لدى الدارس والمدرس بـأن المعادلات التفاضلية الخطية مقحمة عنونة في البرنامج الدراسي، وأنها عبارة عن صيغ يجب التعامل معها دون الاجتهاد. وقد يؤدي هذا الإحساس إلى عدم الاهتمام بها. ويتأكد ذلك عندما نجد الامتحانات الإشهادية لا تعطيها مجالا ضمن مواضيعها.

وقد يتأكد هذا الإحساس عندما نرى البرنامج الدراسي لا يسمح بربط المعادلات التفاضلية بالمفاهيم الأخرى المدرجة في نفس البرنامج، وعلى سبيل المثال، لا يمكن طرح دراسة دالة عددية معرفة عن طريق معادلة تفاضلية غير تلك المشار إليها في البرنامج. وذلك لعدة أسباب، أولها حصر دراسة المعادلات التفاضلية في نوع خاص، لا يسمح بتوسيع الفكرة الرئيسية التي يحملها مفهوم المعادلة التفاضلية.

تدريس الأعداد العقدية

إن التلميذ الجيد يتعامل مع الأعداد العقدية كأنها كائنات تخضع لبعض القواعد، فالنجاح فيها مرتبط بمدى تمكن التلميذ من هذه القواعد. ولكن إذا سألته عن ضرورة معرفة هذه الأعداد، لكان جوابه يشير إلى ضرورة الحصول على نقط تساعده على النجاح في الامتحان الإشهادي. إن البرنامج الدراسي لا يقدم الأعداد العقدية كوسيلة لتلبية بعض الحاجيات الفكرية للتلميذ، والتي تتمثل في مساعدته على توسيع مخيلته، لأن هذا البرنامج يفرض قيودا يجعل من الصعب على المدرس أن يقدم هذه الأعداد كتصور جديد للممارسة الرياضياتية.

وأمام صعوبة إيجاد مقاربة ملائمة للعدد العقدي تلجأ الممارسة إلى التلميح بوجود مجموعة من الأعداد تحقق جملة من الشروط، تطرحها الممارسة بشكل ضمني ضمن صياغات مبهمة، كأنها تريد القول بأن مأسسة العدد العقدي ملقاة على عاتق التلميذ. وهنا يظهر أصل الصعوبات التي تعترض التلاميذ عند معالجة تمارين حول الأعداد العقدية وإلى جانبها تظهر أخطاء تعبر عدم الإدراك الجيد لمفهوم العددي العقدي، وعلى سبيل المثال، نجد بعض التلاميذ يعتقد دوما أنه من الممكن مقارنة عددين عقديين، رغم الإلحاح على أنه من غير الجائز الحديث عن الترتيب في مجموعة الأعداد العقدية. ولا يقف هذا البرنامج الدراسي في إنتاج الصعوبات، عندما ينص على حذف المعادلات من الدرجة الثانية بمجهول واحد معاملاتها أعداد عقدية، لأن التلميذ قد يصادف هذه المعادلات، ولا أحد يتكلم عنها، علما أن المدرسة ليست هي المكان الوحيد الذي يتعلم فيه التلميذ، وبالإضافة إلى ذلك، فإن التلميذ قد يعتقد أن هذا الحذف هو ناتج عن عدم قدرته على استيعابها. وهذا الاعتقاد قد يشكل صعوبة في حد ذاته. إن مجرد التفكير في كيفية حل هذا النوع من المعادلات دون استعمال طريقة المميز أو طريقة الشكل القانوني يؤدي بشكل طبيعي إلى القول بأنه باستطاعة التلميذ حل هذا النوع من المعادلات.

إن الأعداد العقدية تأسس نمط جديد من التفكير، يساعد على معالجة بعض المسائل الهندسية التي كانت مستعصية الفهم أو الحل، وخصوصا وأنها وسيلة فعالة تستطيع ترجمة جميع خاصيات الهندسة المستوية بلغة بسيطة وإجرائية. فمن الطبيعي أن تكون الهندسة المستوية مدخلا أساسيا يبرز الحاجة إلى حلقة نقط المستوى بطريقة تسمح بالتعامل الجبري مع هذه النقط، وتكون الأعداد العقدية هو الوسيلة التي تحدد منظومة ومن قواعد هذه الحلقة. ونجد البرنامج الدراسي يشير إلى ما يخالف هذا التصور، حيث أنه يشير إلى تقديم العدد العقدي بشكل يجعل ازدياد العدد العقدي يسبق توظيفه الهندسي، وهذا لا يساعد على استيعاب المفاهيم المرتبطة بالأعداد العقدي.

الحسابيات في مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية

تعتبر مفاهيم الحسابيات في مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية بسيطة التقديم ولكن أغلب التمارين المتعلقة بها مستعصية الحل ، مما يجعل البعض يطلق عليها نعت "السهل الممتنع". إن الطابع الذي تصبغ به تمارين هذا الجزء من الرياضيات ناتج عن التصور السائد عن الرياضيات التي تخصص لشعبة العلوم الرياضياتية. وهذا اعتراف ضمني بأن هذه الحسابيات تشكل عوائق أمام التلاميذ، وفي المقابل نجد الكتب المدرسية لا تقدم وسائل كفيلة بتدليل هذه الصعوبات.

وقد حاولت البرامج الدراسية أن تعطي لمعالجة هذه الصعوبات مكانة ضمن اهتماماتها دون تحديد طريقة لمعالجتها، فقد اكتفت هذه البرامج بإطالة مدة مزاولة التمارين فقط.

إن تقديم المتعارف عليه للحسابيات في مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية يخضع إلى نظرية الحلقة، ولو بشكل غير مباشر، ووفق هذا المنطق لا يجوز الحديث عن خارج عدد صحيح نسبي على عدد صحيح نسبي غير منعدم إلا في حالة قابلية القسمة. وهذا ما يجعل الكثير من مسائل الحسابيات غير قابلة للمعالجة من طرف التلميذ. وعلى سبيل المثال، فإن حل المعادلة من الدرجة الأولى بمجهولين في مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية يتطلب أولا البحث عن حل تافه، إلا أن التفكير في الخروج عن المجموعة للقيام بالعمليات الحسابية اللازمة قد يساعد على حل هذا النوع من المعادلات، دون اللجوء إلى مبرهنة بيزو ولا مبرهنة كوص. إنه مجرد مثال قد يدفعنا إلى إعادة النظر في طريقة تقديم الحسابيات في مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية.

إن النظرة إلى الحسابيات بمعزل عن النظرية التي أنتجتها قد يساعد على إيجاد وسائل كفيلة بتدليل الصعوبات على المتعلم، بغض النظر إلى الشعبة التي ينتمي إليها، وعلى سبيل المثال، يمكن تقديم حل لمعادلة ديوفانتية باستعمال مكتسبات تلميذ الجدع المشترك، فلسنا بحاجة إلى مبرهنات كبرى لمعالجة هذا النوع من المسائل. ويمكن حل بعض المعادلات مجموعاتها المرجعية هي مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية باستعمال بعض العمليات الحسابية، التي يمكن القيام بها بكل بساطة. يجب فقط التفكير في التجرد من البناء الأكسيوماتيكي الضمني للحسابيات.

التعداد وحساب الاحتمالات

إن معالجة تمارين التعداد تتطلب عمليات عقلية، لا يعبر عنها في الغالب بطريقة شكلانية (formelle). الشيء الذي يجعل إدراكها من طرف التلميذ من الأمور المستعصية، رغم المجهودات التي يبدلها الأستاذ في سبيل تدليلها.وبهذا تكون شجرة الاختيارات في بعض الحالات الوسيلة الأنجع لتفسير هذه العمليات العقلية وبالتالي الوسيلة الأفضل لحل التمارين التعدادية حول السحبات أو التي تصاغ على نفس الشاكلة.

ومن أجل تفادي الصعوبات التي يطرحها حساب الاحتمالات تلجأ الممارسة الحالية إلى تمرير الخطاب الاحتمالي عن طريق ربط بعض التعابير اللغوية بصيغ رياضياتية، دون أن تكون هذه الرابطة موضوع دراسة أو مناقشة. وهذا ما يلاحظ من الخطاب المتداول من خلال الكتب المدرسية والكتب الموازية، رغم عدم إلزامية تداولها.

ولا تقدم التوجيهات التربوية المرافقة للبرنامج الدراسي وسيلة لتدليل الصعوبات الناتجة عن تقديم مفهوم الاحتمال، فتكتفي بالدعوة إلى استعمال المحاكاة عن طريق الآلة الحاسبة أو الأداة المعلوماتية، دون أن تكون بعض الاستعمالات المعلوماتية محطة للتعلم، تجبر المدرس على إدراجها ضمن اهتماماته.

ومن أجل خلق تجديد في هذه الممارسة لابد من التفكير في خلق آليات جديد لإفهام التلميذ المبادئ الأولية لحساب الاحتمالات، وخصوصا وأن المؤسسة التعليمية تتوفر على الأداة المعلوماتية التي قد تساعد على التدليل من هذه الصعوبات.

إن الشرح التفصيلي لوضعيات تعدادية لا تكون له فائدة في جميع الحالات، فمثلا عندما يكون عدد الكرات المسحوبة كبيرا نسبيا، فلا ينفع معها طرح أمثلة ولا شجرة الاختيارات. لهذا فلا بد من طرح القوانين التي تفسر الوضعيات التعدادية تفسيرا رياضياتيا، والأخذ بعين الاعتبار الصياغات الممكنة لهذه الوضعيات. وتوجد عدة محاولات، تستعمل الأداة المعلوماتية، لتدليل الصعوبات الناتجة عن بعض المفاهيم المرتبطة بالتعداد أو بحساب الاحتمالات، فيكون الإطلاع عليها وسيلة لتسهيل عملية استيعاب هذه المفاهيم من طرف التلميذ وتشجيعه على التعامل معها.

إن المبدأ العام للتعداد وسيلة ذات الأفضلية من الناحية الرياضياتية، ولكنه يشكل صعوبة بالغة عند تطبيقه، لان محدداته النظرية لا تكون قابلة للترجمة العملية. فمن المفيد عدم الرجوع إليه لتفسير بعض نتائج حساب الاحتمالات، حتى لا يبدو حساب الاحتمالات كمادة لا يمكن إدراكها من طرف التلميذ أو لا يمكن التعامل مع مسائله دون مساعدة خارجية.

صعوبات تدريس الهندسة

وتمتاز الهندسة، من الناحية الرياضياتية الصرفة، بالتفرع الثنائي: مستوى – فضاء، فنلاحظ من خلال قراءة أعمال بعض علماء الرياضيات أن هؤلاء كانوا دائما يفرعون الهندسة إلى هندسة مستوية وهندسة فضائية مع التمييز بينهما، ولا يسعنا المجال إلا لذكر مقولة للعالم الرياضياتي Hadamard التي تؤكد ذلك:" إني لم أحاول مرة،

أن أدمج الهندسة المستوية والهندسة الفضائية، هذا الإدماج مفضل من وجهة نظر المنطق الصرفة، أريد ذلك، لكن يظهر لي أنه من الضرورة البيداغوجية التفكير في تجزئة الصعوبات، أولها الرؤية في الفضاء، التي هي صعوبة حقيقية، لا يمكن إضافتها إلى الصعوبات الأخرى".

وفي الفترة الممتدة بين 1950و1970، تم الحفاظ على هذا التفرع الثنائي في أغلب الأحيان، رغم ظهور بعض الاعتراضات على ذلك، والتي كانت تتمثل في كتابات بعض أساتذة الرياضيات، وكمثال على ذلك ما قام به Deltheil وCaire عند تناول المتجهات في كتابهما الصادر سنة 1954 ، حيث أنهما لم يميزا بين متجهات المستوى ومتجهات الفضاء سواء عند التعريف أو عند تناول العمليات على المتجهات.

ولقد تم إلغاء هذا التفرع الثنائي للهندسة في البرامج الدراسية للسلك الثانوي لسنة 1970، حين أنها نصت على تناول النظام الأكسيوماتيكي للهندسة. وبحلول الثمانينات تمت العودة إلى هذا التفرع الثنائي في السلك الثانوي، حيث نجد في هذه البرامج فصولا خاصة بالهندسة الفضائية وأخرى خاصة بالهندسة المستوية.

إن تنوع مضامين الهندسة له فائدة من الناحية الديدكتيكية، حيث يوفر إطارات مختلفة لمعالجة بعض مسائل هذه الهندسة.فيمكن معالجة مسألة من مسائل الهندسة التآلفية باستعمال المعلم، أو باستعمال المتجهات.ويستمد هذا التوجه مشروعيته التاريخية من كون اكتشاف الهندسة التحليلية جاء أساسا بغية حل بعض مسائل الهندسة الصرفة، التي كان حلها الهندسي مستعصيا على وجه العموم. وهذا تأكيد على وجود صعوبات تنتجها المادة وتحاول معالجتها بابتكار طرق أخرى للمعالجة. ومن ناحية أخري، تمتاز الهندسة عن الجبر والحسابيات مـــن خلال مـــــفهوم الحقل المفاهيمـــيchamp conceptuel، حيث يقول Vergnaud : "إن مفهوم الحقل المفاهيمي يطبق على الهندسة بشكل أكثر تعقيدا من تطبيقه على الجبر أو الحسابيات.إن السبب الرئيسي وراء ذلك هو كون المجالات الثلاث الكبرى للتجربة الفضائية، التي تستمد منها الهندسة مواضيعها، متداخلة ومتشابكة، ويتعلق الأمر بالمجالات التالية:

هندسة الأشكال La géométrie des figures .

الهندسة الأوضاع La géométrie des positions .

هندسة التحويلاتLa géométrie des transformations ."

ويضيف Vergniaud قائلا: "من الصعب إعداد وضعيات أو تمارين حول هندسة الأشكال، دون التعرض في نفس الوقت، إلى أسئلة حول الأوضاع النسبية أو حول التحويلات. ونفس الشيء يقال بالنسبة لهندسة التحويلات."

بعد التأكيد على أن الهندسة تتدخل بواسطة مواضيعها، ونصوصها وطرقها والتمثيلات التي تقترحها في ميادين أخرى من الرياضيات والعلم ، يحدد بروسو الخاصيات الديداكتيكية للهندسة في النقط التالية:

إنها تتيح للأستاذ الإمكانية لخلق نشاط رياضياتي فعلي لذي التلميذ:فبفضلها يمكن طرح مجموعة كبيرة من النصوص المتفاعلة، انطلاقا من مجموعة صغيرة من المواضيع، والتي يمكن تجميعها بواسطة مجموعة من المبرهنات المتجانسة.

إنها وسيلة ديدكتيكية لمقاربة مفاهيم الرياضيات والعلم والثقافة.

إن تدريسها يحمل في طياته إبستمولوجية عفوية: مجوعة من الاعتقادات والتصريحات حول ماهية الرياضيات، وحول ما يمكن فعله بها.

عدم التجانس في تقديم مفاهيم الهندسة

وتأتي مفاهيم الهندسية في البرامج الدراسية للتعليم الثانوي الإعدادي متناثرة، بمعنى أنه من غير الممكن تحديد الخيط الرابط بين تلك مفاهيم، ذلك الخيط الذي يوضح دواعي اختيار تلك المضامين. فتارة تقدم هذه البرامج مفاهيم معللة بمفاهيم أخرى، وتارة يقدم البعض منها منعزلة عن السياق العام للبرنامج الدراسي. فكيف يمكن فهم الغاية من إدراج التحويلات الاعتيادية متباعدة فيما بينها زمنيا؟ ولا تظهر الغاية من إدراج بعض المفاهيم في مستوى معين إلا من خلال إنجاز بعض التمارين (إذا قرر الأستاذ ذلك) التي يمكن طرحها في شأنها. فما الغاية من إدراج خاصية طاليس(دون تسميتها) في برنامج السنة الثانية من التعليم الثانوي الإعدادي؟ ولا يخصص هذا البرنامج لها مجالا لمعاودة إنتاج بعض مضامينه. وما الهدف من إدراج التماثل المحوري في نفس البرنامج؟ و لا يسمح هذا البرنامج بإدراج وضعيات تبرز الحركية التي يوفرها التماثل المحوري.

إذا كان من مميزات التفكير الرياضياتي تقديم الحجج والبراهين، فإن هذه البرامج لا تعطي أهمية لتنمية مستلزمات التفكير الرياضياتي، ويظهر ذلك من خلال الشروط التي تفرضها التوجيهات التربوية المرافقة لهذه البرامج. وعلى سبيل المثال تشير هذه التوجيهات إلى قبول خاصية مجموع قياسات زوايا مثلث وتطبيقها وتشير كذلك في نفس السياق إلى أنه يبرهن علي هذه الخاصية في فقرة المتوازيين والقاطع. إن مثل التصرف قد يؤدي إلى الاعتقاد بأن البرهان هي عملية مزاجية، لا تخضع إلى المعايير الدنيا لطبيعة التفكير الرياضياتي.

إن البرامج الدراسية على هذه الشاكلة تنتج صعوبات أمام تعلم مادة الهندسة، فإذا كان من بين الغايات القديمة الجديدة للهندسة غاية تتجلى في تزويد التلميذ بنماذج من البراهين الرياضياتية فإن التصرف المزدوج للبرامج أمام البرهان الرياضياتي قد يخلق لدى التلميذ إحساسا بعدم القدرة على مجاراة أولائك الذين يستطيعون القيام بالبراهين الدقيقة. وأما هذا الالتباس قد تلجأ الممارسة إلى حصر البرهان الرياضياتي في إنجاز التمارين وفق قاعدة تدليل الصعوبات أمام التلميذ، وهكذا تظهر الهندسة كأنها مادة مليئة بالتعليمات، ويظهر البرهان الرياضياتي كشبح يخيف المتعلم، وقد يذهب البعض إلى اعتباره مضيعة للوقت.

إن غياب تصور واضح لتوظيف الهندسة من أجل تعلم التلميذ البرهان الرياضياتي قد يوحي بأن النجاح أو الفشل في الإجابة عن أسئلة الهندسة رهن بقدرة المتعلم على تقليد المدرس عند اشتغاله بتمارين هندسية، أو قدرة على حفظ نماذج من حلول لتمارين.

التوظيف المفقود للهندسة المدرسية

إن محتويات محور الأنشطة الهندسية، المقررة في التعليم الثانوي الإعدادي، تمتاز ببعض الخصوصيات تجعلها أساسية في تعلم وتدريس مادة الرياضيات. فيمكن الاعتماد عليها في تقديم بعض المفاهيم الجبرية، كتقديم الأعداد الجذرية والأعداد الحقيقية، وفي تقديم بعض المفاهيم التحليلية، كالتمثيل المبياني لبعض الدوال العددية. كما أنها توفر الحوامل المرئية supports visuels لتوضيح بعض الأفكار والمفاهيم. ومن الناحية التاريخية، فالهندسة كانت،منذ القديم، تعتبر كتصور للعالم.فأفلاطون يرجع تكوين العالم إلى تأليفات بسيطة لخمس مجسمات منتظمة، تعرف الآن تحت اسم المجسمات الأفلاطونية أو الأشكال الفضائية. ويظهر تاريخ الرياضيات الدور الذي تلعبه الهندسة، وخصوصا الهندسة الفضائية، في مجالات مختلفة كعلم الفلك والبصريات، والهندسة المعمارية، والرسم.... وإجمالا يحدد بونكاريه هذا الدور في كون دراسة الظواهر الفيزيائية لا تتم إلا على مستوى الفضاء ذو ثلاثة أبعاد.

ولا نجد في التوجيهات التربوية المرافقة للبرامج الدراسية توجها واضحا لاستعمال مفاهيم هندسية في تقديم مفاهيم أخرى غير هندسية، إلا تلك التي تعتمد على الهندسة في صياغتها. فكيف يمكن للمدرس أن يجتهد من أجل إعطاء الهندسة الدور التي تستحقه؟

إن تقديم مضامين هذه الهندسة بتلك الطريقة، التي لا تراعي المبادئ الدنيا للتفكير الرياضياتي، قد يجعل تلك الخصوصيات لا تظهر على مستوى تدريس المادة، وعلى سبيل المثال قد تجد أصوات تعارض استعمال الهندسة في تقديم بعض المفاهيم الجبرية، بدعوى أنها تضيف عائقا. ولإعطاء الهندسة الوظيفة التي تستحقها في تعلم الرياضيات لا بد من البحث عن براهين بسيطة لبعض نتائجها، لا تتطلب مجهودا كبيرا على مستوي التقديم أو الاستيعاب. ولا بد من انتهاج أسلوب تدريسي يعمل على تعويد التلاميذ على قراءة نصوصها بالشكل الذي يسمح للتلميذ معرفة الأفكار الأساسية المولدة للإجابات عن أسئلة هذه النصوص.

البعد التكويني للهندسة

ومن ناحية علم النفس التكويني فإن تعلم التلميذ لمفاهيم الهندسة يتم بكيفية تعاكس التدرج التاريخي لاكتشاف مفاهيمها، فالتلميذ يتعلم أولا بعض المفاهيم الطبولوجية والاسقاطية، ويتمثل ذلك في تعلم الطفل أولا كيفية تكوين بعض الأشكال الهندسية ووصفها، مثل بعض الرباعيات، بعض المجسمات الفضائية، ثم يتعلم المفاهيم المترية للهندسة. ومن الناحية التاريخية فإن اكتشاف الهندسة الطبولوجية والاسقاطية جاء بعد اكتشاف الهندسة المترية. أما التأسيس التاريخي للجبر فبدأ بالعدد الصحيح الطبيعي، بيد أن اكتشاف الأعداد الأخرى، وخصوصا الأعداد الجذرية، أتى فيما بعد. وبنفس التدرج التاريخي لاكتشاف مفاهيم الجبر يتم تعلم الطفل لهذه المفاهيم. وبدراسة هذه الظاهرة في ميادين علمية أخرى، يخلص بياجي إلى كون الهندسة تمتاز بمفارقة أطلق عليها مصطلح المفارقة التكوينية، ويصوغها بما يفيد بأن ترتيب الاكتشافات التاريخية لمفاهيم الهندسة هو عكس ترتيب مفاهيم الهندسة التي يتعلمها التلميذ. ولا تحاول البرامج الدراسية للسلك الثانوي الإعدادي أن تجد مكانا لهذا البعد التكويني للهندسة، حيث أنها تنص إلى الانتقال السريع من الوصف والميادية إلى بناء المنظومة المفاهيمية. وربما يعود ذلك إلى الاعتقاد بأنه من غير الممكن الاشتغال بالهندسة بعيدا عن هذه المنظومة. إن التلميذ يجد صعوبة بالغة للتعبير عن ما يلاحظه عندما يقوم برسم الأشكال، وعند ذلك تتدخل المتابعة التعليمية لتزويده بمنظومة مفاهيمية لم يشارك في بنائها. وهنا يكمن جل الصعوبات التي تعترض التلاميذ في تعلمهم لمادة الرياضيات.

إن مضامين الهندسة التي تقدم للتلميذ هي مضامين ستاتيكية، لا تمكن من إبراز ثوابت الأشكال، التي تأسس المنظومة المفاهيمية الخاصة بالهندسة. ففي سبيل تقديم خاصيات بعض الأشكال، تكفي المتابعة التعليمية بطرح شكل واحد للقول بأن مثل هذا الشكل يتوفر على خاصية ما. وهذا يفسر التصاق التلميذ بالشكل في المراحل التعليمية المتقدمة. ونجد برنامج السنة الأولى من السلك الثانوي الإعدادي تكرس هذا التوجه من خلال التوجيهات المرافقة لها، حيث تنص على تقديم المفاهيم الأساسية المؤسسة للهندسة من خلال وصف بعض الأشكال الهندسية وحساب محيطاتها، مع الإشارة إلى أنها مألوفة لدى التلاميذ.

وهكذا تلقى مسؤولية بناء هذه المنظومة المفاهيمية على الغائب المتمثل في التعليم الابتدائي. ومن أجل تخليص التلميذ من هذه العادة، التي تعوق تعلم البرهان، لا بد من التفكير في تخصيص وقفات للملاحظة من خلال رسم الأشكال عدة مرات، أو من خلال استعمال أحد برانم الهندسة الديناميكية. وهذا يتطلب إعادة النظر في بناء البرامج الدراسية، بشكل يجعل من السهل خلق قطيعة بين الملاحظة والبرهان الرياضياتي.

النظام الاستنتاجي المفقود في تدريس الهندسة

إن تدريس الهندسة يشهد تيارين: أحدهما يرى أن فشل تدريس الهندسة يرجع إلى كونها تعتمد على نظام استنتاجي يكون مفروضا على التلميذ، ولا يمكنه له المساهمة في بلورته، والآخر يرى أن تدريسها قد فشل لكونها ليست استنتاجية بما فيه الكفاية. ومن خلال النظر إلى الممارسات نجد التخلي شبه الكامل عن البرهان الرياضياتي عند تقديم خاصيات الهندسة، بدعوى أن المستوى المعرفي للتلاميذ لا يسمح بتقديم تلك البراهين. وقد نجد تشجيعا للتخلي عن البرهان الرياضياتي في التوجيهات التربوية المرافقة للبرامج الدراسية. وفي المقابل نجد أن التلميذ مطالب بالقيام ببراهين رياضياتية من خلال الأسئلة التي تطرح في الاختبارات المدرسية أو تمارين آخر الدرس. إنها ازدواجية في التصرف أمام حاجة فكرية هامة تساهم في تكوين العقل.

إن الإطلاع على البراهين المتوارثة قد يعطي انطباعا يفيد بأنه لا يمكن اقتراح هذه النماذج على التلاميذ، وبالتالي يكون مصير هذه النماذج الإقصاء، ولا يمكن الحديث عن البرهان الرياضياتي في ضل وجود هذه النماذج المعقدة. وعلى سبيل المثال، لقد اقترح أحد البرامج الدراسية القديمة البرهنة على خاصية موقع المنصف الداخلي لزاوية مثلث، وقد كانت الممارسة تلجأ في هذا الصدد إلى اعتبار مستقيم يوازي هذا المنصف الداخلي ويمر من أحد طرفي القاعدة، الأمر الذي جعل هذا البرهان يبدو مستعصي الفهم. وربما كان ذلك هو السبب الذي أدى إلى إلغاء تلك الخاصية من مضامين البرنامج الدراسي الحالي. إنه تصرف لا يفكر في تكوين التلميذ أكثر من التفكير في تبسيط عملية التدريس.

ومن أجل جعل تدريس الهندسة يعتمد على نظام استنتاجي، يمكن لتلميذ التعلم الثانوي الإعدادي من المساهمة في بنائه، ترى لجنة كهان أن مفهوم المساحة أداة للبرهان الرياضياتي بامتياز: إنه مفهوم حدسي، ووسيلة فعالة في بناء العديد من البراهين الرياضياتية، بالإضافة إلى أن تبرير استعماله تؤكده نظرية الثوابت، وتشير هذه اللجنة إلى أن استعماله في هندسة المثلثات بسيط، إلا أن الدفاع عن المساحة كأداة للبرهنة لا يلغي بطبيعة الحال استعمال الأدوات الأخرى المدرجة في برامج السلك الثانوي الإعدادي، وخصوصا التماثل المحوري و التماثل المركزي. لأن المهم هو البحث عن توازن بين جميع وجهات النظر في الهندسة. ومن أجل ذلك تقترح هذه اللجنة أربع خاصيات كمدخل للبرهان الهندسي.

إن الاعتماد على خاصيات المساحة في تقديم بعض البراهين له ما يبرره من الناحية الرياضياتية الصرفة، ويمكن تلخيص ذلك في كونها تعبير عن جذاء عددين حقيقيين. ولكن لا يمكن النظر إلى مفهوم المساحة من الناحية الجبرية فقط، بمعنى أن لا ينحصر مفهوم المساحة في الصيغ المعروفة، بل يجب من الناحية الديداكتيكية الاهتمام بالجانب الحدسي لهذا المفهوم. وخصوصا وأن تلك الخاصيات الأربع قابلة للملاحظة عن طريق عمليتي التقطيع والتجميع. وفي هذا الصدد تشير دوادي وكلوران إلى أنه لا يجب أن ينحصر تقديم مفهوم المساحة في التعليم الابتدائي والتعليم الثانوي الإعدادي على إعطاء الصيغ، يجب ترجيح طرق التقطيع والتجميع.

إن فهم البرهان الرياضياتي والمشاركة في إنتاجه يتطلبان من المتابعة التعليمية العمل على تعويد التلاميذ على قراءة النصوص الرياضياتية، بشكل يسمح استخراج المعطيات الصريحة والضمنية، والكفيلة بإنتاج حلول لأسئلة هذه النصوص. ولن يتم ذلك إلا عن طريق اقتراح وضعيات تكون نصوصها تحقق مبدأين أساسيين، وهما تحقيق هدف أو أهداف محددة سلفا و تحقيق تفاعل بين النص والتلميذ.

هندسة التحويلات

لقد أصبحت الهندسة علم التحويلات بامتياز انطلاقا من القرن التاسع عشر مع برنامج Erlangen لصاحبه Klein حيث أصبحت تهتم بتغيرات الأشكال بارتباط مع الثوابت المصاحبة لها. ومن الطبيعي أن يخلق هذا البرنامج تأثيرا على مستوى تدريس الهندسة في التعليم الثانوي، فعلى سبيل المثال، أصبح تدريس الهندسة في فرنسا في بداية القرن العشرين يهتم بدراسة زمر التحويلات.ومن الطبيعي أيضا أن يخلف هذا البرنامج تأثيرا على تصور الهندسة لدى أساتذة مادة الرياضيات. وليس من الغريب أن نجد من يدافع على استعمال التحويلات كأدوات لمعالجة مسائل الهندسة، ومن يتحفظ على ذلك.

ولقد قدمت هندسة التحويلات وجهة نظر لها من الأهمية ما يجعلها تحتل مكانة أساسية في بناء البرامج الدراسية لمادة الرياضيات، وتستمد هذه الأهمية مشروعيتها من الناحية الديداكتيكية من النقاش الدائر حول الدور الذي قد تلعبه في المساهمة لتحقيق أهداف تدريس هذه المادة.

ومن بين المدافعين على استعمال التحويلات كأدوات لتقديم الهندسة نجد Gleaser، حيث نجده يصف الهندسة بفن التحويلات، ويشير إلى أن الكثير من الأشكال الهندسية يمكن تعريفها باستعمال التحويلات، ويذكر على سبيل المثال: أن المثلث المتساوي الساقين هو مثلث له محور تماثل، وأن متوازي أضلاع هو رباعي له مركز تماثل. ولا يقف عند هذا الحد، بل يذهب إلى القول بأن الخاصيات المتعلقة بالمثلث المتساوي الساقين وبمتوازي أضلاع، التي تقدم بطريقة غير موفقة حسب تعبيره، يمكن استخراجها بنظرة واحدة، ويضيف قائلا: أن العديد من الخاصيات الهندسية تنتج ببساطة بتحويل شكل عام إلى شكل خاص.

ومن بين المحافظين نجد Perrin حيث يشير إلى أن استعمال مفهوم المساحة في البراهين الرياضياتية يستمد مشروعيته النظرية من هندسة التحويلات نفسها، ويستمد مشروعيته الديداكتيكية من كون هذا المفهوم حدسي، ويؤكد أنه في حالة هندسة المثلثات يكون استعمال مفهوم المساحة بسيطا. ويضيف قائلا: إن هذا التحفظ لا يعني عدم تناول الأدوات الأخرى التي توفرها البرامج الدراسية للسلك الثانوي الإعدادي، وخصوصا التحويلات، ويعلل ذلك بالقول أن الهدف هو الاستمرار في البحث عن توازن جديد بين جميع وجهات النظر المختلفة للهندسة.

ويعتبر برنامج السنة الأولى من التعليم الثانوي الإعدادي التماثل المركزي إلى جانب متوازي الأضلاع كأداة فاعلة لحل مسائل متنوعة، بعدما اعتبره ضمن مكتسبات المتعلم. وبهذا يشير هذا البرنامج إلى أن خاصيات التماثل المركزي ليست كافية لوحدها لحل المسائل، وقد يؤدي ذلك إلى الالتباس الحاصل في تأويل ما جاء في هذا البرنامج، ويبدو ذلك جليا في الكتب المدرسية، حيث تقوم هذه الكتب بتقديم خاصيات التماثل المركزي انطلاقا من بعض الملاحظات الموضعية، رغم أن البرنامج يعتبرها من المكتسبات. وذلك بهدف البرهنة على خاصيات متوازي الأضلاع، مرورا بخاصيات المتوازيين والقاطع. إن مجرد ملاحظة خاصيات متوازي الأضلاع أو قبول خاصية مجموع قياسات زوايا المثلث تمكن التلميذ من إدراك خاصيات التماثل المركزي وتوظيفها توظيفا سليما.

إن برنامج السنة الثانية من التعليم الثانوي الإعدادي ينص صراحة على أن يعاد تقديم التماثل المحوري، وعلى توظيفه في البراهين الرياضياتية، بمعنى أنه يقدم في هذه السنة كأداة للبرهان الهندسي.مما يدفع إلى طرح بعض الأسئلة حول سيرورة تعلم التلميذ لمفهوم التماثل المحوري، وتشير بعض الدراسات التربوية في هذا المجال إلى أن تعلم التلميذ لهذا المفهوم يمر من ثلاث مراحل: في المرحلة الأولى يقدم كعلاقة بين شكلين، أو بين جزأين من شكل واحد. وفي المرحلة الثانية يقدم كتطبيق من مجموعة نقط المستوى نحو نفس المجموعة يتوفر على بعض الخاصيات.أما في المرحلة الثالثة فإنه يقدم كأداة وظيفية، تعالج بواسطتها بعض المسائل الهندسية. ونلاحظ من هذا الوصف أن البرنامج الدراسي يوحي بأن الغاية من إدراج التماثل المحوري هو استعماله في البراهين الرياضياتية، في حين نجد هذا البرنامج لا يخصص محطات إلزامية للقيام بمهمة البرهان بعيدا عن وضعيات تمارين آخر الفصل.

ويأتي برنامج الجذع المشترك ليخصص وقفة لإعادة دراسة التماثل المركزي والتماثل المحوري و الإزاحة، وينص في هذا الباب على أن توظيفها في حل المسائل يندرج ضمن القدرات المستهدفة. ومن خلال التوجيهات المرافقة له يشار إلى إمكانية تعريف هذه التحويلات متجهيا أو تآلفيا، في حين نجد البرنامج الدراسي يلغي الصيغ التحليلية لهذه التحويلات باعتبارها خارج البرنامج الدراسي. ويقترح نفس البرنامج دراسة التحاكي عن طريق أمثلة بنفس الطريقة التي قدمت بها التحويلات السابقة!.

ويقترح برنامج السنة الثانية من سلك الباكالوريا درسا خاصا بالدوران، ومن بين القدرات المستهدفة من هذا الدرس نجد القدرة على توظيف الدوران في وضعية هندسية بسيطة! ما المقصود بوضعية هندسة بسيطة؟ وبعبارة أخرى، ما هي الحدود التي يرسمها البرنامج في شأن تداول الدوران؟.

ونلاحظ أن التوجيهات التربوية المرافقة للبرامج الدراسية ليست واضحة بالقدر الذي كان من المفروض أن تأتي به، وإلا فلا داعي من طرح بعض الأفكار التي قد تعلل بعض الانزلاقات، وعلى سبيل المثال، قد تلجأ بعض الممارسات على عدم إدراج الدوران ضمن سير المتابعة التعليمية، نظرا لعدم كفاية الغلاف الزمني لتدريس المادة.

إن اعتبار خاصيات المثلث المتساوي الساقين و المستطيل كمنطلق يكون كاف للبرهنة على خاصيات التماثل المحوري ، بمعنى أن هذين الشكلين كافيين لاختزال الخطاب حول التماثل المحوري، كما أن اعتبار خاصيات متوازي أضلاع يكون كفيلا باختزال خاصيات التماثل المركزي. وعلى المستوى الديداكتيكي، تكون معرفة خاصيات تلك الأشكال أسهل من معرفة خاصيات التماثلين،لأنها تعتمد على حوامل مرئية(الصور) بخلاف خاصيات التماثلين التي تعتبر أكثر تجريدا. لهذا نجد من يقول أنه من الممكن تقديم التماثل المحوري كمعرفة، وأخذ الاحتياط عند تقديمها كأداة.

وهكذا، يتضح أن عمر التحويلات المفترض طويل، إلا أن ملابسات تنفيذ البرامج الدراسية قد تجعله قصيرا جدا، حيث يتم حصر دراسة هذه التحويلات في إطار فصول تدوم ساعات، ولا يؤثر في كيفية الاشتغال بالرياضيات وفق النظرة التي تسعى نظرية التحويلات إلى تحقيقها. وتبقى المسائل المرتبطة بهذه التحويلات مستعصية الحل، وقد تصبح في سلة المهملات إلا إذا تدخل الامتحان الإشهادي، وهو أمر غير ممكن وفق النظرة التي تصاغ بها مواضيع الامتحانات الإشهادية.

ومن الواضح،إذن، أن هذه البرنامج تسلك ازدواجية في التصرف إزاء مفاهيم في غاية من الأهمية سواء على مستوى تكوين الفرد المتعلم أو على مستوى تقديم المادة بالشكل الذي يحترم المعايير الدنيا للتفكير الرياضياتي، وتساهم في إنتاج عوائق لتعلم مادة الرياضيات.

مبرهنة طاليس والقياس الجبري

طرح برنامج السنة الأولى من التعليم الثانوي الإعدادي مفهوم التوازي من خلال ربطه بتقايس زاويتين، وذلك انطلاقا من خاصيات المتوازيين والقاطع لهما.ورغم محدودية هذه الأداة في معالجة بعض المسائل الهندسية المتعلقة بإثبات توازي مستقيمين، فإنها أبرزت الحاجة إلى بناء معرفة أخرى تستجيب لمتطلبات هذه المسائل، وهذه المعرفة هي خاصية طاليس العكسية، في حين نجد برنامج السنة الثانية من التعليم الثانوي الإعدادي يطرح خاصية، سميت بخاصية المستقيم الموازي لضلع مثلث، تسمح بترجمة توازي مستقيمين باستعمال المسافات. ورغم أن هذه الخاصية لا تتناول سوى حالة خاصة لخاصية طاليس المباشرة فإنها تسمح بالبرهنة على صحة هذه الخاصية في حالتها العامة. ويأتي برنامج السنة الثالثة من التعليم الثانوي الإعدادي ليطرح مبرهنة طاليس في وضعية المثلث، دون استعمال القياس الجبري، وهذا يشكل إحدى الاختلافات بين البرنامج القديم والبرنامج الحالي. وكنتيجة لذلك فإن التعامل مع مبرهنة طاليس العكسية يكون مرتبطا أساسا بالشكل، الذي يحدد ترتيب النقط.

وتحاول الممارسة الحالية إعادة إنتاج خاصية طاليس المباشرة انطلاقا من تعريف جيب تمام لزاوية حادة، ونظرا لكون هذا المفهوم الأخير يعتمد على خاصية طاليس المباشرة في تأسيسه، فإنه من المنطقي التساؤل حول الجدوى من تقديم هذا النوع من البراهين، والتساؤل حول الغاية الحقيقية من تقديم براهين على صحة مفاهيم سبق للتلاميذ التعامل معها في مناسبات سابقة، ومن المنطقي طرح أسئلة أخرى حول صيانة بعض المكتسبات(في هذه الحالة مفهوم جيب تمام) دون الأخرى(في هذه الحالة خاصية طاليس المباشرة). إنها ازدواجية في التصرف قد تترك آثارا على مستوى التعامل مع مادة تعتبر دقيقة في مفاهيمها وتقنياتها. فكيف يمكن التصرف إزاء هذه الحالة؟

وعند دراسة لبحث حول الصيغ المختلفة لتقديم مبرهنة طاليس في التعليم الفرنسي خلال النصف الثاني من القرن العشرين، يخلص بروسو إلى نتيجة مفادها أن مبرهنة طاليس تقدم وفق ثلاث وجهات نظر أساسية:

- الحفاظ على الأفاصيل(على متقاطعين)
- الحفاظ على التناسبية بالإسقاط.
- التمديد la dilatation.

إن صيغة مبرهنة طاليس، كما حددها برنامج السنة الثانية من التعليم الثانوي، هي التي تعبر عن وجهة النظر الثالثة، والتي تتقدم على الصيغ الأخرى لهذه المبرهنة، ففي كتاب العناصر لأقليدس نجد تلك المبرهنة مصاغة بالكيفية التالية:"الموازي لضلع مثلث يحدد على الضلعين الآخرين أجزاء متناسبة".

وقد نجد تبريرا آخر لهذا التقدم بالرجوع إلى تاريخ الرياضيات، حيث أن هذه المبرهنة قد صيغت في أول الأمر في المثلث القائم. نقل ديوجانس عن لاييرس عن هييرونيم أن طاليس قام بقياس الأهرام بواسطة ظلها، بعد أن لاحظ أن طول قامة يساوي طول ظلها في لحظة معينة. وقال بلوتارك لطاليس "...قد أُعجبت بطريقتك في قياس الهرم... لما اكتفيت بوضع العصا عند حد ظله، ولما كان شعاع الشمس المماس يُولد مثلثين، فإنك بينت أن نسبة الظل الأول إلى الثاني هي نسبة الهرم إلى العصا. لكنهم اتهموك كذلك أنك تكره الطغاة" . وفي تعقيب له على هاتين الروايتين يقول *Serres*:" تتجلى في هذين النصين مبرهنة طاليس، التي يقارن شكلها بين مثلث يتكون من هرم وظل هذا الهرم على الرمل، وشعاع الشمس المُسَيَّفِ، ومثلث ثان، يتكون من جسم، يقاس ارتفاعه بسهولة، وظل هذا الجسم من جديد، وشعاع مماثل: كلاهما قائم الزاوية.لقد نقل هييرونيم الحالة الخاصة لمثلثين متساويي الساقين، ولقد نقل بلوتارك الحالة العامة".

إن ما يمكن استنتاجه مما سبق هو أن خاصية طاليس، كما جاء بها برنامج السنة الثانية من التعليم الثانوي الإعدادي، هي القاعدة الأساسية لتقديم مبرهنة طاليس، علما أنه من الممكن استنتاج الخاصية العكسية من الخاصية المباشرة. فبقراءة صيغة خاصية طاليس المباشرة الواردة في برنامج هذه السنة يمكن أن نقف على أن هذه الخاصية قد طرحت من خلال وضعيتين: الوضعية الأولى هي وضعية الخاصية التي سميت بخاصية المستقيم الموازي لضلع مثلث، والوضعية الثانية تؤول إلى الوضعية الأولى باستعمال التماثل المركزي أو خاصيات متوازي أضلاع.

ويمكن النظر إلى خاصية طاليس المباشرة من زاوية تكبير وتصغير الأشكال، وخصوصا وأن التلاميذ قد سبق لهم أن تعاملوا مع تكبير وتصغير الأشكال، إلا أن ذلك لا يكون كافيا لإبراز الدور الأساسي الذي تلعبه هذه الخاصية في الهندسة، وخصوصا وأن هذه الخاصية تطرح في حالة خاصة، تسمح بالبرهنة على صحة الحالة العامة لمبرهنة طاليس، ولأن مفهومي التكبير والتصغير مرتبطان بمفهوم التحاكي، الذي يعتبر أداة أكثر فعالية من مبرهنة طاليس. وكخلاصة القول فإن مبرهنة طاليس تحمل فكرة أساسية، قد تفيد الفرد المتعلم عند مباشرة بعض المسائل الهندسية، وهذه الفكرة تفيد بأن هذه المبرهنة توفر إمكانية ترجمة التوازي بمتساوية جبرية.

إن الفكرة التي تحملها مبرهنة طاليس، لها من الأهمية ما يجعل هذه مبرهنة تتصدر البرامج الدراسية لكل العصور، إلا أن هذه الفكرة لا تظهر من خلال التوجيهات المرافقة للبرامج الدراسية الحالية، وذلك لعدة أسباب، منها حذف القياس الجبري وعدم تعويض الدور الذي كان يلعبه في صياغة بعض المفاهيم الرياضياتية)، وقد يقال بأن هذا الحذف كان نتيجة لوجود صعوبات ناتجة عن تدريسه، وهو قول لا فائدة منه، لأن الحذف يكون نتيجة لعدة محاولات لتذليل تلك الصعوبات الملاحظة، وفشل هذه المحاولات، ومنها أيضا ارتباط تطبيق خاصية طاليس العكسية بالشكل، الذي يشير مسبقا إلى النتيجة المراد تحقيقها من خلال تطبيق هذه الخاصية، فكيف يمكن إقناع المتعلم بضرورة تطبيق تلك الخاصية لإثبات توازي مستقيمين مستعملا الشكل، الذي يؤكد للمتعلم أن ما يريد إثباته مرئي؟ وإذا كان من الضروري استعمال الشكل لتحديد أحد شروط تطبيق خاصية طاليس العكسية فلماذا لا يتم قبول النتيجة التي يمكن ملاحظتها من خلال الشكل نفسه. وهكذا تظهر ضرورة استعمال القياس الجبري في صياغة خاصية طاليس العكسية، دون تخصيص وقفة لدراسة القياس الجبري لذاته. وهناك تصور آخر لتقديم خاصية طاليس العكسية في حالة المثلث غير قائم الزاوية دون استعمال ترتيب النقط ولا القياس الجبرى.

ولهذه الأسباب يكون من المنطق البحث عن مقاربات جديدة من أجل تذليل الصعوبات التي تعترض المتعلم في تعلمه لبعض المفاهيم الرياضياتية، لأن حذف مفهوم من البرنامج الدراسي، دون تبصر، قد يؤدي إلى إنتاج عوائق أكثر تعقيدا من تلك التي ينتجها المفهوم المحذوف.

الإسقاط ومبرهنة طاليس

يؤكد البرنامج الدراسي للجذع المشترك على أن القدرة المستهدفة الوحيدة من فصل الإسقاط هي الترجمة المتجهية لمبرهنة طاليس، ويمكن تعليل ذلك بالرجوع إلى محتويات الفصل الواردة في هذا البرنامج، حيث أنه ينص البرنامج على تناول خاصية الحفاظ على معامل استيقامية متجهتين، بعد تعريف الإسقاط على مستقيم بتواز مع مستقيم لا يوازيه والتذكير خاصيتي طاليس المباشرة والعكسية. وتشير التوجيهات التربوية المرافقة لهذا البرنامج إلى أنه يتعين تجنب أي بناء نظري لمفهوم الإسقاط.

إن هذه القراءة تؤكد أن تداول بعض المفاهيم، مثل النقطة الصامدة بإسقاط و صورة قطعة بإسقاط وخاصية الحفاظ على المنتصف بإسقاط، يكون خارج البرنامج الدراسي. ولا يجوز في هذه الحالة تبرير استعمال هذه المفاهيم من أجل البرهنة أو تقديم خاصية الحفاظ على معامل استقامية متجهتين، والقول بأن الكتاب المدرسي قد تناولها بهذه الكيفية. ونلاحظ من خلال صياغة خاصية طاليس المباشرة أن تطبيق هذه خاصية مرتبط بوجود مثلث، وبذلك فإن خاصية طاليس المباشرة في شبه المنحرف لا تندرج ضمن برامج التعليم الثانوي الإعدادي.

فكيف يمكن التصرف إزاء هذا الموقف؟

إن التفكير في حل هذه الإشكالية يحتم على المدرس عدم اللجوء إلى تلك المصادر، التي لا تعير اهتماما للمتغيرات التي تطرأ على البرامج الدراسية، ولا تحاول معالجة الإشكاليات التي تطرحها هذه المتغيرات. إن معالجة هذه الإشكالية يكمن في مادة الرياضيات، إذا توفرت الرغبة لمعالجتها.

إن هذا الفصل يأتي بفكرة هامة على المستوي الديداكتيكي، وتتجلى في كون الترجمة المتجهية لمبرهنة طاليس تذلل الصعوبات التي كانت تعترض التلميذ عند تناوله للمسائل المتعلقة بمبرهنة طاليس، بشقيها المباشر والعكسي. ويأتي بفكرة هامة على الصعيد الرياضياتي، وتكمن في كون هذه الترجمة تمكن من تحويل التوازي كمفهوم تآلفي إلى علاقات متجهية، يسهل التعامل معها حسابيا، وتحدد الخاصية المستهدفة من هذا الفصل تشابكا معرفيا، بحيث يمكن ربطها بالخاصية المميزة للتحاكي في حدود معينة.

ويبدو من خلال التوجيهات التربوية المرافقة لهذا البرنامج أن لا شيء من هذا القبيل يدخل في اهتمامات من يقوم بتنفيذ هذا البرنامج الدراسي، فالمسألة ستصبح محصورة في تقديم محتويات فصل الإسقاط وإنجاز مجموعة من التمارين، لينتهي العمر الافتراضي لهذه الخاصية عند حدود آخر تمرين يقترحه المدرس.

المبرهنة المفقودة

تندرج هذه المبرهنة ضمن ما يسمى العلاقات المترية في المثلث قائم الزاوية، وتأتي في إشارة ثانوية من خلال التوجيهات التربوية المرافقة لبرنامج السنة الثالثة من التعليم الثانوي الإعدادي(تنص هذه التوجيهات إدراجها ضمن تمارين فصل مبرهنة فيثاغورس).وتسمى هذه المبرهنة مبرهنة أقليدس، وتنص على أنه إذا كان ABC مثلثا قائم الزاوية في A و H المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (BC)فإن:$AB^2 = BH \times BC$

وتلعب هذه المبرهنة دورا أساسيا في تقديم بعض المفاهيم الرياضياتية، رغم أن البرامج الدراسية لا تعطيها أهمية تذكر، وهنا تكمن المعضلة الكبرى في بناء البرامج الدراسية. وبالنظر إلى كونها تكافئ مبرهنة فيثاغورس، فإن المبرهنة الأخيرة لا تضاهيها على مستوى التطبيق. وعلى سبيل المثال، فإنها تمكن من إنشاء الجذر المربع لعدد حقيقي موجب، قابل للإنشاء بواسطة المسطرة والبركار، بساطة تامة. والتطبيق الأساسي لهذه المبرهنة يمكن في مساهمتها في تعريف النسب المثلثية لزاوية حادة. إنها تسمح بإنتاج برهان بسيط على صحة مبرهنة فيثاغورس، وتتجلى هذه البساطة على مستوى تقديم البرهان، حيث أنه يكفي ثلاث أسطر لإنتاج البرهان على صحة خاصية فيثاغورس المباشرة. وتتجلى هذه البساطة على مستوى فهم البرهان، حيث أنه يكفي تطبيق مبرهنة اقليدس مرتين للحصول على البرهان المتوخى. ويمكن البرهنة على صحة مبرهنة أقليدس باستعمال بعض المعارف الواردة ضمن مضامين البرنامج الحالي للسنة الثانية من التعليم الثانوي الإعدادي. ويمتاز هذا البرهان بالبساطة سوي على مستوى التقديم أو على مستوى الصياغة، وحتى على مستوى معاودة إنتاجه.

وهذا ما يعطي لهذه المبرهنة المشروعية الديداكتيكية لكي تتصدر البرامج الدراسية، وتتأكد هذه المشروعية بالنظر إلى إمكانية تطبيق مبرهنة طاليس في إنتاج برهان على صحتها، عملا بمبدأ إشراك المتعلم في بناء معارفه.

إن عدم إدراج هذه المبرهنة في البرامج الدراسية بشكل صريح لا يمنع من توظيفها كلما لاحظ المدرس استفادة من استعمالها، وفي هذه الحالة، يمكن للمتعلم من استعمال مبرهنة فيثاغورس مرتين ليجد هذه المبرهنة أمامه.

مبرهنة فيثاغورس والتعامد

إن التعرف على تعامد مستقيمين انطلاقا من قياس الزوايا لا يكون فعالا في كثير من الوضعيات الهندسية، بمعنى أن هذا التعريف الزاوي angulaire للتعامد يكون غير كاف للتعامل مع تعامد مستقيمين. فمن الضرورة الديدكتيكية تزويد التلميذ بخاصية تمكنه من التعامل مع تعامد مستقيمين في بعض الوضعيات التي كانت لا تستجيب للأداة القديمة. الأمر الذي لا تتعامل معه البرامج الدراسية بالجدية المطلوبة، حيث أن هذه البرامج تخصص وقفتين منفصلتين زمنيا ومكانيا لتدريس مبرهنة فيثاغورس بشقيها المباشر والعكسي.

ويشهد تدريس مبرهنة فيثاغورس(خاصيتي فيثاغورس مجتمعتان) مرحلتين، تفصل بينهما فترة زمنية مهمة، قد تساهم في تبديد تلك الأهداف المرجوة من تدريسها. فبرنامج السنة الثانية من التعليم الثانوي الإعدادي يقترح تدريس خاصية فيثاغورس المباشرة، التي تسمح بتحويل مفهوم التعامد إلى علاقة مترية، في حين نجد أن برنامج السنة الثالثة من التعليم الثانوي الإعدادي يقترح تدريس خاصية فيثاغورس العكسية، التي تسمح بالتعرف على التعامد انطلاقا من علاقة مترية. وباعتبار الخاصية الأخيرة نتيجة مباشرة للخاصية الأولى فإن خاصية فيثاغورس المباشرة تبقى هي المفهوم الأساسي في هذا المجال. ومن ما يجعلها كذلك هو وجود عدة امتدادات أساسية لها مثل مبرهنة الكاشي والجذاء السلمي....ووجود تطبيقات لها في الجبر.

وفي المقابل نجد أن مبرهنة فيثاغورس تنصهر ضمن نتائج الجبر الخطي في التعليم الثانوي التأهيلي، ويبدو من خلال ذلك أنها تطبيق بسيط لمفهوم الجذاء السلمي لمتجهتين. الشيء الذي يدفع إلى طرح سؤال حول الجدوى من معرفتها وامتداداتها. وفي هذا الصدد يقول سيريس :" هل نجوب هنالك زمنا حلزونيا يمر من الأصل عدة مرات؟ فبعد هذه الأصول، تدفع مسألة المنظم والجذاء السلمي مبرهنة فيثاغورس إلى ما هو أبعد في السلسلة بكثير، كتطبيق بسيط. ومنه هذا الحكم التاريخي: لو اهتدينا إلى ذلك من قبل، لاقتصدنا أكثر من عشرين قرنا من التحليل السطحي لمفهوم الفضاء".

إن مبرهنة فيثاغورس تأتي بفكرة هامة على المستوي التربوي، وتتجلى في كونها أداة تترجم التعامد، المفهوم التآلفي، إلى علاقة مترية. وبذلك فإنها تذلل الصعوبات التي كانت تعترض التلميذ عند تناوله للمسائل المتعلقة بتعامد مستقيمين. وتأتي كذلك بفكرة هامة على الصعيد الرياضياتي، وتكمن في كونها تمكن من حساب مسافة بين نقطتين، مما يمكن من إنتاج حلول للمسائل التي تصاغ بمفهوم المسافة.

ويبدو من خلال التوجيهات التربوية المرافقة لهذا البرنامج أن لا شيء من هذا القبيل يدخل في اهتمامات من يقوم بتنفيذ هذا البرنامج الدراسي، فالمسألة تصبح محصورة في تقديم محتويات الفصل المتعلق بخاصية فيثاغورس والفصل الخاص بمبرهنة طاليس، وإنجاز مجموعة من التمارين، لينتهي العمر الافتراضي لهذه الخاصية عند حدود أخر تمرين يقترح المدرس. ويبدو من خلال برامج التعليم الثانوي التأهيلي أن لا مكان لمبرهنة فيثاغورس ضمن مضامينها.

وبغض النظر عن هذه التعقيدات فإن مبرهنة فيثاغورس تلعب دورا أساسيا في إنتاج حلول لمجموعة من المسائل الهندسية، التي يمكن نعتها بالتاريخية، فبواسطتها يمكن أن نطرح مبرهنة الكاشي، شريطة تعريف جيب تمام زاوية منفرجة، والتي تقوم بدورها بتوليد حلول لهذه المسائل التاريخية.

المبرهنات الأربع المتكافئة

ومن الواضح أن مبرهنة أقليدس تكافئ مبرهنة فيثاغورس، وأنه من الممكن إثبات هذا التكافؤ باستعمال المفاهيم المدرجة ضمن مضامين برنامج السنة الثالثة الثانوية الإعدادية. ومن الواضح أيضا أن مبرهنة الكاشي على شكلها القديم تكافئ مبرهنة فيثاغورس، ويمكن إثبات هذا التكافؤ باستعمال مفاهيم برنامج السنة الثالثة الثانوية الإعدادية، شريطة تعويض القياس الجبري بدراسة حالتين. وينص الشكل القديم لمبرهنة الكاشي على أنه إذا كان ABC مثلثا و H المسقط العمودي للنقطة B على المستقيم (AC) فإن:$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overline{AH} \times \overline{AC}$

وتأتي مبرهنة رابعة لتضاف إلى هذا النظام، وتعرف في بعض المراجع تحت اسم مبرهنة ثابت بن قرة، وتنص على ما يلي:نعتبر مثلثا ABC و E و F نقطتين من القطعة $[BC]$. إذا كان $A\hat{F}C = B\hat{E}A = B\hat{A}C$ فإن $AB^2 + AC^2 = BC(BE + CF)$.

ومن الواضح أن هذه مبرهنة فيثاغورس هي حالة خاصة لمبرهنة ثابت بن قرة. وباستعمال مبرهنة الكاشي بالشكل المتعارف عليه يمكن إثبات مبرهنة ثابت بن قرة.

وهكذا يتضح أن المبرهنات الأربع متكافئة من الناحية الرياضياتية، بمعنى أن صحة إحداها لا تلغي صحة الأخريات.ولكن على مستوى الديداكتيكي فإن فعالية كل واحدة منها رهين بعدة معايير.إننا أمام أربع مبرهنات متكافئة من الناحية الرياضياتية، ولكنها غير متكافئة من ناحية التوظيف الديداكتيكي للمفاهيم الرياضياتية. إنها مفارقة لا يمكن فهمها بمجرد طرحها.

إن البرامج الدراسية لا تعير اهتماما لمثل هذا التشابك المعرفي، ولو باب الثقافة، مما يجعل المعارف تأتي متناثرة، لا رابطة بينها، خلاف واقع الأمر. ومن الأمور التي تدفع إلى طرح تساؤلات حول بناء البرامج الدراسية كون هذا النوع من التشابك يعطى مثالا على مدى صلابة البناء الرياضياتي، فرغم أن هذه المبرهنات قد صدرت في أزمنة مختلفة ومن طرف أشخاص مختلفين فإنها تبقى مرتبطة فيما بينها. ومن هذا المنطلق، لابد من إعطاء مبرهنة فيثاغورس أهمية، لا تتجلى فقط في كونها أداة لتقديم بعض المفاهيم،كالجذور المربعة لبعض الأعداد الجذرية أو لتقديم بعض المفاهيم المتعلقة بالمثلث القائم، بل يجب النظر إليها كوسيلة لمعاودة إنتاج بعض حلول لمسائل هندسية.

إن عدم الاهتمام بالمبرهنات التاريخية، كمبرهنة ثابت بن قرة، قد يحرم التلميذ من الإطلاع على إنتاج الآخرين، الهدف الذي يسعى إلى تحقيقه كل منهاج دراسي.

وقد نجد تفسيرا لعدم أهمية مبرهنة ثابت ابن قرة في البحث الديداكتيكي في كونها تستعمل في صياغتها معطيات غير متوفرة ظاهريا في كل مثلث، وفي كون استعمالها يستدعي اعتبار نقطتين وفق شروط. الشيء الذي يجعلها توظيفها في الكشف عن المعارف الأخرى من الأمور المستعصية. إلا أنها متكافئة مع مبرهنة فيثاغورس. إنها ملاحظة تطرح أكثر من سؤال حول طبيعة مادة الرياضيات.

مبرهنة الكاشي.

ومن بين المحاولات التي أدت إلى تعميم مبرهنة فيثاغورس نجد مبرهنة تحمل اسم الكاشي في بعض المراجع العربية و الغربية، وتعرف باسم قانون الجيب ($loi\ de\ cosinus$) في بعض المراجع الغربية، أما المراجع الأخرى فتعتبرها ضمن نتائج الجذاء السلمي، دون تسميتها.

ومن خلال البرامج الدراسية، تندرج مبرهنة الكاشي ضمن تطبيقات الجذاء السلمي، ويبدو من خلال تقديمها أنه لا يمكن فصلها عن مفهوم الجداء السلمي لمتجهتين، رغم أن بعض التطبيقات التي تقترح في مجال الجداء السلمي لا يستدعي استعمال مفهوم المتجهة.ونجد أنها لا تكون موضوع الطرح بكيفية صريحة إلا انطلاقا من التعليم الثانوي التأهيلي.

وقد تبدو مبرهنة الكاشي،من خلال بعض الكتب التي تتناول الهندسة المستوية، كنتيجة ثانوية، بحيث يتم تقديمها كالمربع السلمي لمتجهة. رغم أن شكلها القديم يسمح بتعريف الجداء السلمي نفسه، ويسمح بتعريف جيب تمام لزاوية مثلث، الذي يسمح بدوره بطرح مبرهنة الكاشي على شكلها المتعارف عليه.

ولماذا يتم التعامل مع هاته المبرهنة بهذا النحو؟. إن محاولة الإجابة عن هذا التساؤل سيدفعنا إلى طرح أسئلة أخرى عن الأهداف المتوخاة من إطلاق تسمية على خاصية أو مبرهنة،إذا لم تكن ناجعة على مستوى توليد المعارف أو على مستوى تعلم المادة؟ وإلى طرح أسئلة أخرى، تتعلق بالموقف الذي يتخذ من طرف علماء ومدرسي

الغرب. وإلى رفع المزيد من الأسئلة حول مدى إدراك هؤلاء للدور الذي قد تلعبه مبرهنة الكاشي في توليد مجموعة من نتائج الهندسة المستوية، وفي معاودة إنتاج العديد من نتائج الجبر العددي، وفي إثبات صحة بعض النتائج الهندسية التي كانت تمتاز بالصعوبة عند معالجتها في وقت من الأوقات.

وفي مقابل ذلك، نجد اهتماما متزايدا بمبرهنة فيثاغورس في المراجع العربية والغربية، وخصوصا في الكتب المدرسية، حيث تولي هذه الأخيرة أهمية لها من خلال تناولها في مناسبات عديدة، ومن تخصيص فصل خاص بها، وحسب المنطق التي أعتمد في تأليفها فإن ذلك يرجع بالأساس إلى تدخلها في بناء معارف أخرى، ولكن هذا الاهتمام يقصي جانبا مهما من تلك المبرهنة، ويتعلق الأمر بالبرهان على صحتها. حيث يقدم برهان جزئي على صحتها، أو تفسير حدسي لصلاحيتها.ويمكن إرجاع ذلك إلى صعوبة إيجاد حجة على صحتها ينسجم مع المستوى الإدراكي للمتعلم، أو مع منطق تسلسل المفاهيم داخل بنية البرامج الدراسية.

إن محاولة التفكير في التأرجح بين الاهتمام بالحالة الخاصة لمبرهنة الكاشي وبين عدم الاهتمام بالحالة العامة، قد يؤدي إلى البحث الذاتي عن التفسيرات المقنعة لهذا التأرجح، حتى نقف على الجدوى من معرفة إحداهما دون الأخرى.

إن أول تفسير لذلك يجد مصدره في كون تقديم مبرهنة فيثاغورس لا يتطلب أدوات رياضياتية،يستغرق استيعابها وقتا من زمن التعلم ومن زمن التعليم وغير مكلف على مستوى الإنجاز،في حين يتطلب تقديم مبرهنة الكاشي أدوات رياضياتية،مكلفة على مستوى زمن التعليم والتعلم، وعلى مستوى المجهود الذي يبذل في سبيل تقديمها ، فيكون إدماجها ضمن معارف أخرى أحسن وسيلة لتجاوز ذلك. إنه تفسير نريده من أجل الحفاظ على ممارسة تقوم بمعاودة نفس النموذج التقليدي لتدريس مادة الرياضيات.

ويأتي التفسير الثاني كجواب عن مدى تأثير المنظور الأكسيوماتيكي- الشكلاني للفكر الرياضياتي على الكتابات التاريخية حيث يلغي هذا المنظور أية معرفة لا تنبثق عن بنية مفاهيمية، وحيث يتم استعراضها كتحف تاريخية من أجل التأمل فقط. فلكي تكون مبرهنة الكاشي معرفة مقبولة وفق هذا المنظور، يجب البحث عن بنية أكسيوماتيكية تثبت صحتها. لهذا نجدها تنصهر داخل الجبر الخطي، ويبدو أنه من الممكن أن لا نستعملها أو لا نعترف بوجودها، لأن قواعد الجبر الخطي كفيلة بالقيام بدورها.

أما التفسير الثالث الذي يمكن تقديمه يكمن في كون علماء الرياضيات لا يهتمون بالنتائج التي سبق إثبات صحتها، بل يهتمون بالإشكاليات الكبرى التي تطرحها المسائل المعلقة،ويبقى للمدرس أمر البحث في تحديد أهمية و نجاعة المفاهيم المقترحة في إطار البرامج الدراسية. الشيء الذي لا نلاحظه لعدة اعتبارات موضوعية.

ومن بين التفسيرات، التي يمكن إسنادها إلى عدم الاهتمام بمبرهنة الكاشي على مستوى البحث الرياضياتي، هو كونها متكافئة مع مبرهنة فيثاغورس، أو إلى كون استعمالها يصبغ الهندسة المستوية طابعا حسابيا، كما يقوم بذلك الجداء السلمي،الذي يمكن تعميم نتائجه على فضاءات أخرى، الشيء غير الممكن بالنسبة للنتائج المتولدة عن مبرهنة الكاشي. أما على مستوى البحث الديداكتيكي، فإن عدم الأخذ بعين الاعتبار الدور الذي قد تلعب مبرهنة الكاشي في جعل التلميذ يكتشف بنفسه جزءا مهما من معارفه، لا نجد له تفسيرا. وخصوصا وأن استعمال مبرهنة فيثاغورس يفرض البحث عن مثلث قائم الزاوية، الشيء الذي يتطلب جهدا ليس في مقدرة جميع المتعلمين بدله. في حين أن استعمال مبرهنة الكاشي لا يتطلب استعمال اعتبارات وسيطية التي لا يمكن للمتعلم تظننها، سوى تلك التي تفرضها العمليات الحسابية الناتجة عن هذا الاستعمال.

ومما يجعل مبرهنة الكاشي أداة فعالة في إنتاج مجموعة من النتائج الهندسية، توفرها على عدة صياغات، فالشكل القديم لها سمح بكتابة هذه المبرهنة على الشكل المتعارف عليه، الذي يتيح كتابتها على شكلين آخرين، يسمحان بالاستنتاج المباشر لقانون الجيب غير التام، الذي يؤسس مع مبرهنة الكاشي نظاما لما يسمى بحل المثلثات *resolution des triangles*.

ومما يجعلها تلعب دورا هاما في الهندسة المستوية، الإمكانية التي توفرها لإثبات تقابلية الدالة جيب تمام، الشيء الذي يسمح بالقول بأنها وسيلة تتيح معرفة قياسات زوايا مثلث انطلاقا من قياسات أطوال أضلاعه فقط، وتتيح معرفة قياسات أطوال أضلاع مثلث، بنسبة تقريبية، انطلاقا من قياسات زواياه فقط. ويمكن تلخيص ذلك في ما يفيد بأن مبرهنة الكاشي توفر رابطة انعكاسية بين ما هو زاوي *angulaire* في الهندسة المستوية بما هو متري فيها. وهنا يتجلى الدور الأساسي الذي تلعبه مبرهنة الكاشي في توليد مجموعة النتائج الهندسية، وفي إنتاج البراهين على صحة مجموعة من النتائج وفي تحويل بعض النتائج الهندسية إلى نتائج جبرية.

وبغية إبراز الفكرة الأساسية التي تحملها مبرهنة الكاشي، والتي تفيد بإمكانية حساب مسافة نقطتين، يمكن جرد مجموعة من المسائل الهندسية التي تتناول حساب المسافات في وضعيات متنوعة، تتأرجح بين الصعب والسهل.وذلك حتى تتمكن المتابعة التعليمية من تبيان مدى إمكانية مباشرة هذا النوع من المسائل من طرف التلميذ، بدون مساعدة الطرف الآخر.

ومن أجل تزكية هذا الطرح، يمكن طرح مجموعة من المسائل ، التي تبرز بعض الخاصيات التي يتوفر عليها المثلث، والتي تبدو صعبة الحل، إذا كان التفكير فيها بخلفية تطبيق النتائج الهندسية المترتبة عن كيفية تدريس الهندسة الأقليدية.فمثلا، إذا كانت المسألة تهدف إلى مقارنة طول ضلع مثلث ومسافة نقطتين توجدان على الضلعين الآخرين للمثلث،فإن معالجتها تتطلب البحث عن إنشاءات وسيطية تمكن من تحويل تلك المسألة إلى مسألة مقارنة قياسي ضلعين لمثلث.وهنا تكمن صعوبة حل هذه المسألة.أما إذا تم التفكير في معالجتها باستعمال مبرهنة الكاشي، فإن الأمر لا يتطلب سوى القيام ببعض العمليات الحسابية. ومن أجل توضيح هذه الفكرة، سنحاول القيام بمعالجة هذه المسألة بالطرقتين معا، وقبل ذلك، يكون من اللازم صياغة هذه المسألة: ليكنABC مثلثا بحيث الزاوية $[\widehat{BAC}]$ منفرجة،MوNنقطتان تنتميان على التوالي إلى القطعتين $[AB]$و$[AC]$ وتختلفان عنBوCوA.قارنBCوMN.

وتكمن الطريقة الأولى لحل هذه المسألة في إنشاء النقطةP بحيث يكون الرباعي$MNCP$ متوازي أضلاع. وجاء هذا الإنشاء من أجل تحويل المسألة موضوع المناقشة إلى مسألة مقارنة قياسي ضلعي مثلث، وبالاعتماد على مسلمة من مسلمات الهندسة الأقليدية. والتي تفيد بأن أكبر ضلع في مثلث تقابله أكبر زاوية فيه.وبهذا الإنشاء، تكون الزاوية$[\widehat{BPC}]$ منفرجة. ويمكن تعليلها بالاعتماد على بعض خاصيات المتوازي أضلاع.وبالرجوع إلى مسلمة أخرى لتلك الهندسة، تكون للمثلثBCP زاوية منفرجة وحيدة. وبذلك نتوصل إلى النتيجة: $MN < BC$.وتتلخص الطريقة الثانية، في حساب الفرق$MN^2 - BC^2$ باستعمال مبرهنة الكاشي. ولأنه من الممكن أن نعالج مجموعة كبيرة من المسائل الهندسية، انطلاقا من بعض المفاهيم البسيطة، التي تندرج ضمن مضامين البرنامج الدراسي للسنة الأولى إعدادي.

ومن هذا المنطلق، يكون من الضروري البحث عن برهان على صحة مبرهنة الكاشي، يعتمد على أقل ما يمكن من المفاهيم الهندسية، لا تستغرق وقتا في تلقينها، حتى نتمكن من تأكيد أهميتها وفعاليتها.وبما أنه من الممكن استنتاج الشكل القديم لمبرهنة الكاشي من خاصية فيثاغورس المباشرة أو من مبرهنة أقليدس، فإن الأمر أصبح يتعلق بالبحث عن برهان على صحة إحدى المبرهنتين الأخيرتين، وفق منظور لا يسعى إثقال كاهل المتعلم أو يضيف عبئا على البرامج الدراسية الخاصة بالتعليم الثانوي الإعدادي .

إن البحث عن هذا النوع من البراهين يستلزم طرح العديد من الأسئلة حول تدريس بعض المفاهيم الأولية للهندسة المستوية، وتكون هذه المساءلة اللبنة الأولى في تحديد المفاهيم الأساسية والوحيدة التي بنبي عليها البرهان على صحة مبرهنة فيثاغورس، وهذا ما يذهب إليه أي تفكير جدي في بناء البرامج الدراسية.

إن مبرهنة الكاشي تتدخل في الهندسة المستوية على ثلاث واجهات: واجهة حل بعض المسائل الهندسية المقترحة سلفا،وواجهة إنتاج مسائل هندسية جديدة، وواجهة ثالثة، تكمن في جبرنة الهندسة. ورغم كل ما قيل حول هذه المبرهنة بقيت مجرد تطبيق منفرد للجداء السلمي.

مبرهنة الكاشي والجداء السلمي

ومن بين تطبيقات الجداء السلمي، نجد مبرهنة المتوسط، التي تحدد المسافة بين رأس للمثلث ومنتصف الضلع المقابل له، بدلالة قياسات أطوال أضلاعه، في حين لا نجد التطبيقات التي تحدد المسافات بين جميع عناصر المثلث، بدلالة قياسات أطوال أضلاع هذا المثلث. فهل التلميذ الذي تمكن من مفهوم الجداء السلمي قادر على أن يقوم لوحده بتحديد تلك المسافات؟.إنه سؤال تتطلب الإجابة عنه، القيام بعدة تحريات حول المفاهيم التي يجب استعمالها في البحث عن ذلك. وعلى سبيل المثال، إذا أردنا البحث عن المسافة AD ، حيث أن النقطة D هي موقع المنصف الداخلي للزاوية $[\widehat{BAC}]$ ، يجب أولا تحديد المتجهة $\overrightarrow{AD}$ بدلالة المتجهتين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$. وفي هذه الحالة، فإن المسألة قابلة للمعالجة، لأن النقطة D محددة بنسبتانية معلومة. ولكن إذا أردنا البحث عن المسافةAH ،حيث أن النقطةH هي مركز تعامد المثلثABC ، فإن المسألة ليست بتلك البساطة، لأن النقطة H غير محددة بكيفية معلومة،ولا توجد على أي ضلع من أضلاع المثلث، إلا في الحالة الخاصة، كما هو الشأن بالنسبة لموقع المنصف الداخلي لزاوية مثلث. ولمعالجة هذه المسألة وجب مبدئيا تحديد المتجهة $\vec{A}$ بدلالة المتجهتين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$، حيث أن النقطة K هي المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (BC)،تم تحديد المتجهة $\overrightarrow{AH}$ بدلالة المتجهة $\overrightarrow{AK}$. وذلك تبعا لطبيعة زوايا المثلث.

وكخلاصة، فإن تطبيق الجداء السلمي لتحديد المسافة AH ، يتطلب العمل بالصيغة التحليلية له في معلم غير متعامد، تجنبا للصعوبات التي يطرحها البحث عن معلم متعامد وممنظم مناسب. في حين نجد أن تطبيق مبرهنة الكاشي لا يتطلب ذلك.وبالإضافة إلى هذا، فإن مبرهنة الكاشي ستكون حاضرة في تطبيقات الجداء السلمي.

ولقد اعتبر إثبات صحة المتساوية التي تحدد المسافة ضمن المسائل غير المدرسية في وقت من الأوقات(أنظر موضوع الأولمبياد الكندية لسنة 1969).فهل كانت معالجة هذه المسألة في غاية من الصعوبة، لكي تقترح في هذا الإطار؟ أو هل كان البرنامج الدراسي في ذلك الوقت لا يسمح بمعالجتها؟.في حين نجد أن من بين المسائل التي تقترح في إطار تطبيق مفاهيم البرنامج الدراسي إثبات المتساوية التالية:$\frac{1}{AC}+\frac{1}{AB}>\frac{2}{AD}$.

وبالإطلاع على الحل المقترح لهذه المسألة، نلاحظ مدى صعوبة هذا الحل، وأنه لا يمكن للتلميذ معاودة إنتاجه، وأنه لا يمكن للممارس سبق الإطلاع عليه أن يعيد إنتاجه بعد أن يتم نسيانه، وذلك نظرا لاعتماده على بعض الاعتبارات الوسيطية، التي لا يمكن تظننها إلا بعد إيجاد تفسير مقنع لها.

إن القدرة على تحديد المسافةAD قد تعفي الممارس من عناء البحث عن إثبات صحة تلك المتفاوتة. ومن الطبيعي، وفق ما سبق، اللجوء إلى استعمال مبرهنة الكاشي لتحديد تلك المسافة. ونلاحظ أن انتهاج الطريقة الجذاء السلمي لتحديد المسافة AD قد تكلف الممارس عدة عمليات،كان من الممكن الاستغناء عنها، إذا تم التفكير في البحث عن تلك المسافة باستعمال مبرهنة الكاشي.وبالإضافة إلى ذلك فإنه قد يستعمل في هذه الطريقة نتيجة من الصعب استنتاجها باستعمال الجذاء السلمي دون الاستعانة بمبرهنة الكاشي، ويتعلق الأمر بخاصية موقع المنصف الداخلي لزاوية مثلث.و التي يمكن استنتاجها بسهولة باستعمال قانون الجيب، أحد توابع مبرهنة الكاشي.

مبرهنة الكاشي وحساب المثلثات

يقترح برنامج الجذع المشترك دراسة مبرهنة الكاشي، في حين نجد أنه لا يمكن تناول بعض مسائل الحساب المثلثي إلا انطلاقا من السنة الأولى من سلك الباكالوريا. مع العلم أنه من الممكن معالجة هذه المسائل باستعمال مبرهنة الكاشي بكل بساطة. وقد يقال أنه من الطبيعي أن يتم تجزئة المفاهيم على هذا النحو. إلا أن عدم خلق سياق في برنامج السنة الأولى من سلك الباكالوريا من أجل توظيف مبرهنة الكاشي يطرح عدة علامات الاستفهام حول إمكانية إدماج المعارف. وعلى سبيل المثال، نجد من بين تمارين حساب المثلثات، مسائل تتعلق بمتفاوتات مثلثية، تستعمل في صياغاتها قياسات زوايا مثلث.

إن التفكير في إيجاد حل لهذا النوع من المسائل قد يدفع المدرس إلى طرح أسئلة مساعدة من أجل تطبيق إحدى صيغ حساب المثلثات، أو إلى تحديد القيمة القصوية أو دنوية لدالة مثلثية أو لدالتين مثلثيتين. ولكن هذا النمط من التفكير قد لا يقود المتعلم إلى معالجة مسائل أخرى ببساطة. وخصوصا إذا صادف المتعلم دوال مثلثية تمتاز إشارة دوالها المشتقة بصعوبة بالغة. وقد يؤدي التفكير في حل هذا النوع من المسائل إلى استعمال مبرهنة الكاشي على شكلها المتعارف عليه، وعند ذلك قد نجد صعوبات على مستوى إنجاز العمليات الحسابية، التي تفرضها هذه المعالجة. إن تحقيق إنتاج لهذا النوع من المسائل يتطلب القيام بعمليات حسابية نتائجها غير مضمونة ظاهريا، إلا إذا تم التفكير في تبسيط هذه الكتابة، مما يؤدي إلى استعمال مبرهنة الكاشي على شكل من أشكالها المبسط.

وهكذا يتبين أن هذا النمط من لتفكير يتطلب مهارات محددة، من الصعب امتلاكها بسهولة، وخصوصا إذا كانت دراسة إشارة الدوال المشتقة غير ممكنة عمليا. ولا تساعد البرامج الدراسية على تزويد المتعلم بأدوات هذا النمط من التفكير، وذلك لأنها تشير بعبارة عابرة عن تقديم مبرهنة الكاشي، دون تخصيص وفقة لها من خلال التوجيهات المرافقة لها، لكي توضح للمدرس ما يجب القيام به من أجل تدليل بعض الصعوبات الناتجة عن نمط التفكير في حل بعض مسائل حساب المثلثات.

مبرهنة الكاشي ومفاهيم مترية

تتميز مبرهنة الكاشي بالقدرة على ترجمة المفاهيم المترية بعلاقات تتدخل في صياغاتها قياس الزوايا، حيث نجد أنها تتدخل من أجل التعبير عن بعض المفاهيم المترية بواسطة مفهوم زاوي، وعند ذلك، فهي تساعد على حل بعض المسائل، معطياتها معبر عنها بقياس الزوايا، والمطلوب هو تحديد عنصر متري، وعلى سبيل المثال، إذا كانت المسألة موضوع المعالجة تهدف إلى تحديد منتصف قطعة انطلاقا من قياسات زوايا المثلث، فإن معالجتها تتطلب معرفة منتصف القطعة استنادا على المعطيات المتوفرة والتي لا تشير إلى قياسات الأطوال، وهنا تظهر ضرورة البحث عن ما يميز منتصف قطعة عن باقي النقط الأخرى المتدخلة في صياغة المسألة.

ولكي نكون أكثر وضوحا، نصيغ هذه المسألة بالكيفية التالية: حدد منتصف ضلع للمثلث إذا علمت بقياسات زواياه. ومن خلال قراءة نص هذه المسألة، يظهر أنه من الصعب معالجتها بالاعتماد على المعطيات المتوفرة فقط. وتبرز الحاجة إلى معرفة معلومات أخرى، مثل العلاقة التي تربط بين منتصف قطعة، كمفهوم متري، بزاوية مثلث كمفهوم غير متري.

وتستمد مبرهنة الكاشي هذه القدرة من كونها تمكن من البرهنة على تقابلية قصور الدالة جيب تمام على المجال $[0;\pi]$، الأداة التي تسمح بتحويل ما هو زاوي إلى ما هو متري وبالعكس أيضا. ومن المفارقات التي تحدث في البرامج الدراسية لمادة الرياضيات نجد أن هذه الأخيرة تهمل هذه النتيجة، في حين نجد هذه النتيجة تتدخل بشكل قوي في طرح نمط جديد من التفكير في حل مسائل الهندسة.

مبرهنة الكاشي وبعض المفاهيم التآلفية

تبدو الهندسة المستوية، من خلال البرامج الدراسية، عاجزة عن إنتاج إجابات عن أسئلتها، فهي تقدم المستقيمات الكلاسيكية للمثلث، ونقصد بها: المتوسطات، الواسطات، والارتفاعات وأخيرا المنصفات الداخلية والخارجية لزوايا المثلث.وتكون هذه المستقيمات مواضيع للعديد من المسائل الهندسية، ويكون ذلك من أجل إبراز خاصية تتعلق بصنف واحد من هذه المستقيمات.وقد لا نتطرق إلى العلاقات التي تربط كل صنف من الأصناف الخمسة بالصنف الآخر، فقليلا ما نجد سؤالا يتعلق بتحديد نقطة تقاطع المتوسط والمنصف. وربما يرجع ذلك إلى الاعتقاد السائد بأن التقاطع مفهوم تآلفي، يصعب تحديده هندسيا، إلا أن مبرهنة الكاشي، وعلى الأصح قانون الجيب، يكون كفيلا بالقيام بذلك.وهذا ما يجعل ذلك الاعتقاد موضوعا للمساءلة.وقليلا ما نجد أسئلة حول تقاطع هذه المستقيمات الكلاسيكية للمثلث ودوائره، وعلى سبيل المثال، متى يكون ارتفاع مثلث قاطعا للدائرة المحاطة بهذا المثلث؟ إن محاولة إنشاء شكل لهذه الوضعية كفيل بالإجابة عن هذا السؤال، وقد يبدو البرهان على صحة الملاحظة في متناول أي ممارس أراد تطبيق مبرهنة الكاشي.

وأثناء تدريس الهندسة المستوية، نقف على نتائج مهمة مثل:متوسطات مثلث تتلاقى، المنصفات الداخلية تتلاقى، ارتفاعاته تتلاقى.وبفضل مساءلة هذه الخصوصية التي يمتاز بها المثلث يمكن طرح السؤال التالي: ما هي المستقيمات المرتبطة بالمثلث التي تتلاقى ؟.

إنه سؤال يهدف إلى إبراز بعض المستقيمات الخاصة المثلث، والتي يتلاقى البعض منها في نقطة واحدة، بغية التمكن من نماذج أخرى من المستقيمات المتلاقية في المثلث. إن البحث عن الإجابة يحيلنا إلى البحث عن العناصر المشتركة بين المستقيمات المتلاقية المتعارف عليها. إن هذه الخصوصية التي تمتاز بها تلك المستقيمات تؤدي بشكل طبيعي إلى طرح مفهوم قاطع المثلث، الذي لا نجد له أثر في البرامج الدراسية، وفي المقابل نجد أن مبرهنة الكاشي كفيلة بمعاودة نتائج متعددة حول قواطع مثلث.

ومن بين المسائل التي اقترحها الكتاب المدرسي في نهاية الثمانينات، نجد تلك المسألة التي تهدف إلى مقارنة مجموع مسافات نقطة داخل المثلث و محيط هذا المثلث.وقد أثارت هذه المسألة آنذاك نقاشات حادة حول حلها، وحول الاعتبار الوسيط الذي أستعمل في معالجتها. لكن هذه النقاشات لم تطرح مسألة تكميم مفهوم داخل المثلث،كما عولج مفهوم داخل الدائرة. إن البحث عن عناصر الإجابة عن هذه المساءلة قد يعفي الممارسة من اللجوء إلى التنقيب عن حلول هذا النوع من المسائل في المراجع التي اقترحتها. وقبل التفكير في حل المسائل التي تصاغ بواسطة مفهوم داخل المثلث، لابد من طرح التساؤل الذي يبتغي تحديد مميزات للنقط التي توجد داخل المثلث، أو بتعبير أكثر دقة، لا بد من التفكير في تعريف إجرائي لمفهوم داخل المثلث، المفهوم الذي لا نجد له مكانا ضمن محتويات البرامج الدراسية.

ويمكن طرح هذا التكميم الذي نبحث عنه بكيفيات متعددة، منها ما هو قابل للتطبيق على مستوى معالجة هذا النوع من المسائل، ومنها ما هو حدسي، يساعد على موضعة النقط ذهنيا فقط. وقد لا نجد له أثر في البرامج الدراسية، مما يعني أن المسائل المتعلقة به لا تندرج ضمن التمارين المدرسية.

إن تكميم مفهوم داخل المثلث، قد يؤدي إلى البرهنة على صحة بعض النتائج قبل التطرق إليها بصفة مؤسساتية، مثل الخاصية التي تفيد بأن أكبر زاوية في المثلث يقابلها أكبر ضلع. ورغم محدودية هذه الخاصية، فإنها تطرح فكرة هامة تطرحها مبرهنة الكاشي، ويتعلق الأمر بالربط بين ما هو زاوي في الهندسة المستوية بما هو متري فيها.

إن أول تكميم لمفهوم داخل المثلث، يأتي كتعبير عن انتماء نقطة من داخل المثلث إلى قاطعين داخليين لهذا المثلث، وبتعبير أدق نقول إن النقطة M توجد داخل المثلث ABC إذا وفقط إذا كان المستقيم$\left(AM\right)$ يقطع القطعة$\left[BC\right]$ في نقطة N ، وإذا كان المستقيم$\left(BM\right)$ يقطع القطعة$\left[AC\right]$ في نقطة P . ويمكن طرح تعريف آخر متكافئ مع السابق كما يلي: النقطة M توجد داخل المثلث ABC إذا وفقط إذا كان المستقيم$\left(AM\right)$ يقطع القطعة$\left[BC\right]$ في نقطة N ، وبحيث أن النقطة M تنتمي إلى القطعة$\left[AN\right]$.

وهذا التكميم مرتبط ببعض المفاهيم المترية والتآلفية للهندسة المستوية، مما قد يجعله غير فعال في معالجة بعض المسائل المتعلقة بالمفاهيم الزاوية. لهذا وجب تحديد تكميم آخر قد يساعد على القيام بذلك.ويتجلى هذا التكميم في ما يلي: إذا كانت النقطة M من داخل المثلث ABC فإن: $M\hat{B}C \leq \beta$ و $M\hat{C}B \leq \gamma$.وينتج عنه تكميم آخر، ويصاغ كما يلي: إذا كانت النقطة M من داخل المثلث ABC فإن: $\alpha \leq B\hat{M}C$

مبرهنة الكاشي و حساب المساحات

إن حساب مساحة أحد أشكال الهندسة المستوية، بدلالة تأليفة من عناصره، يطرح عدة أسئلة. وعلى سبيل المثال، هل يمكن حساب مساحة رباعي محدب، بمعرفة قياسات أطوال أضلاعه فقط؟. إذا كان هذا الرباعي دائريا فإن الإجابة تكون بالإيجاب، نظرا لكون صيغة حساب مساحة رباعي دائري معروفة. وهل يمكن تحديد مساحة مثلث بدلالة قياسات زواياه فقط؟ في هذه الحالة يمكن الإجابة بالنفي، لأنه يوجد عدة مثلثات لها نفس الزوايا، ولكنها مختلفة المساحة. وهذا لا يمنع من التفكير في الإجابة عن ذلك السؤال، شريطة إضافة بعض العناصر، مثلا شعاع الدائرة المحيطة بالمثلث. ويتطرق برنامج الجذع المشترك إلى صيغتين فقط من صيغ حساب مساحة مثلث تجيب عن السؤال السابق، ولقد أقحمت في فقرة من فقرات فصل الحساب المثلثي. ويبدو من خلال استعراضهما أنهما يأتيان من أجل طرح قانون الجيب فقط أو من أجل إنجاز بعض التمارين. وبذلك فإن هذا البرنامج يقدم معارف مترابطة بشكل لا يساعد على طرح أسئلة حول ماهية المفاهيم التي يقترحها.

وتقدم مبرهنة الكاشي إجابة عن السؤال المتعلق بحساب مساحة مثلث بدلالة تأليفة من عناصره، حيث أنها توفر صيغ متعددة لحساب مساحة مثلث، قابلة للبرهنة بكل بساطة. وإذا كانت مساحة مثلث محددة بدلالة قياسات أطوال أضلاعه(صيغة هيرون)، فمن بين الأسئلة التي يمكن طرحها في مجال مساءلة هذه النتيجة، نجد السؤال الذي يرمي إلى تحديد مساحة مثلث، بدلالة قياسات أطوال متوسطاته، لأن هذه الأخيرة محددة بدلالة قياسات أطوال المثلث. وعند الإجابة عنه، سنجد صيغة تشابه صيغة هيرون.

إن هذا التشابك المعرفي لجدير بالاهتمام من طرف المدرس، لأنه يساعد التلميذ،إن قدم له بالكيفية الملائمة، على أخذ موقف إيجابي اتجاه الرياضيات.

ويتضح مما سبق أن العمل ببعض عناصر المثلث، يتيح تقديم عدة صياغات متكافئة لمساحة مثلث. قد يظهر البعض منها أساسيا في معالجة بعض المسائل الهندسية المتعلقة بحساب المساحات،كمسائل القيم القصوية والدنوية لمساحة مثلث. أو في إثبات بعض المتساويات الجبرية أو المثلثية.

إن الاهتمام بحساب مساحة المثلث، لا يمنع من التطرق إلى تحديد مساحة رباعي محدب بدلالة قياسات أطوال أضلاعه وقياس الزاوية المحددة بقطريه. وإلى حساب مساحة بعض الرباعيات الخاصة، مثل شبه منحرف ومتوازي أضلاع. كل هذه النتائج قابلة للمعاودة بفضل مبرهنة الكاشي، التي أتى بها البرنامج الدراسي للجذع المشتركة كنتيجة هامشية.

مبرهنة الكاشي وحل بعض المسائل الهندسية.

تبدو الهندسة المستوية، من خلال الحلول المتداولة لمسائلها التاريخية، مادة يغلب عليها الطابع الأوريستيكي.مما يجعل أغلب هذه المسائل لا تندرج ضمن مضامين المتابعة التعليمية-التعلمية، رغم أن تدريس الهندسة المستوية قد استكمل في التعليم الثانوي، ولا سيما وأنه يمكن استخراج بعض المسائل التاريخية من التحريات التي يخضع لها الشكل الهندسي، بمعنى أنها تكون قابلة للملاحظة انطلاقا من إنشاء عدة أشكال لنفس الوضعية، فمثلا مبرهنة مستقيم سمسون تكون قابلة للملاحظة، ونفس الشيء بالنسبة لمبرهنة مستقيم أولير ومبرهنة فيورباخ. وينتج عن ذلك عدة أسئلة: فهل يمكن طرح هذه المسائل ضمن مضامين البرامج الدراسية ؟.وما هي الوسائل التي تمكن من إنتاج حلول لها ينسجم مع المفاهيم المدرجة في هذه البرامج ؟.وهل يمكن تشجيع التلاميذ على مباشرة هذا النوع من المسائل. ولتحديد بعض عناصر الإجابة عن هذه الأسئلة، لا بد من اقتراح مجموعة من المسائل التاريخية، يمكن معالجتها بالاعتماد على مبرهنة الكاشي، أو على نتيجة تبرهن بواسطتها.

وبذلك يحاول توظيف مبرهنة الكاشي تقديم نموذج للتفكير في مجال فهم الإنتاج الرياضياتي، الذي كان يطرح عدة أسئلة في وقت من الأوقات، تتعلق بصحة بعض النتائج الرياضياتية، وكيفية معالجتها.

إن مبرهنة الكاشي كفيلة بتحديد المسافات بين النقط الهامة للمثلث، وهذا يمكن من التوصل إلى مجموعة من الصيغ، التي قد تساعد على معالجة جملة من المسائل الهندسية، منها ما يندرج ضمن النتائج الهندسية التاريخية، والتي تحمل أسماء خاصة.

إن الوظيفة التي يمكن إسنادها لمبرهنة الكاشي تتلخص في كونها أداة تساعد المتعلم على فهم الإنتاج التاريخي الخاص بالهندسة، وتساعد المتعلم على مباشرة بعض المسائل الهندسية التي كانت تبدو مستعصية الحل. فلا مجال لتهميشها عند إعداد البرامج الدراسية.

المتجهات و الإزاحة

كان تأسيس الهندسة التحليلية المستوية، يرمي أساسا إلى استعمال طرق الحساب العادي في حل المسائل الهندسية، التي كان حلها بالطرق الكلاسيكية الموروثة أساسا عن الإغريق، يتطلب التخيل، الذي لا يمتلكه عموم الممارسين، أو يكون ناتجا عن الحظ،...، أو عن عبقرية. وإن كانت هذه الهندسة قد استطاعت حل المسائل الهندسية المتعلقة بالمنحنيات، فإنها كانت معطلة في بعض الوضعيات بسبب كثرة العمليات الحسابية، أو صعوبة إيجاد معلم مناسب. مما أدى إلى ظهور مفاهيم جبرية، مثل مفهوم المتجهة، ومفهوم المصفوفة.... ويعتبر مفهوم المتجهة عنصرا مؤسسا للهندسة المتجهية، التي تصبغ الهندسة الأقليدية بطابع جبري، فبفضل هذا المفهوم يمكن بناء نسق متكامل يترجم مفاهيم الهندسة الأقليدية بعلاقات جبرية. وعلى مستوى تدريس الهندسة المتجهية، يأتي مفهوم المتجهة كمنطلق لتحديد العمليات في مجموعة المتجهات، بما فيه جداء متجهة في عدد حقيقي، ليأتي بعد ذلك تقديم الهندسة التحليلية.

ومن الناحية الديداكتيكية، فإن تقديم مفهوم المتجهة تراوح في السنين الأخيرة بين مقاربتين: المقاربة الأولى تكمن في تحديد هذا المفهوم بعناصره، أما المقاربة الثانية فتتجلى في استعمال المفهوم الحدسي للإزاحة لتقريب مفهوم المتجهة.

وينص برنامج السنة الثانية من السلك الثانوي الإعدادي على أن يكون تعريف المتجهة بتعريف عناصرها انطلاقا من التصور الأولي للإزاحة الذي اكتسبه التلميذ الوافد من التعليم الابتدائي. ليأتي مفهوم الإزاحة كرابطة متجهية لنقط المستوى، وهكذا تتدخل التوجيهات التربوية المرافقة للبرنامج الدراسي من أجل طرح شروطا تجعل أمر إيجاد مقاربة ملائمة لمفهوم الإزاحة مستعصي، إن لم نقل مستحيل.

ويعتبر مفهوم المتجهة وسيلة لطرح رابطة متجهية بين نقط المستوى، ولترجمة الخاصية المتجهية لمتوازي أضلاع في حالة عدم استقامية النقط. وبذلك يمكن النظر إلى الإزاحة من زاوية متوازي أضلاع، الشيء الذي قد يدفع إلى طرح السؤال حول الجدوى من معرفة الإزاحة بهذا الشكل، لأنها لا تضيف شيئا إلى الخاصيات التي يخولها متوازي أضلاع.

وينتج عن هذا التصور عدة مقاربات لا تسعى إلى تدليل الصعوبات التي تنتج عن مفهوم المتجهة، ولا تسعى إلى خلق أرضية ملائمة لتقديم بقية المفاهيم المرتبطة بهذا مفهوم. ومن بين الصعوبات التي تعترض التلاميذ في مجال الحساب المتجهي تتدرج تلك الناتجة عن تقديم جداء متجهة في عدد حقيقي. وفي هذا المجال تأتي التوجيهات التربوية المرافقة لبرنامج السنة الثالثة من التعليم الثانوي الإعدادي لتنص على ضرورة طرح هذا الموضوع من خلال وضعيات بسيطة، على أساس ترك مسألة التمكن من الموضوع على عاتق برنامج الجذع المشترك، رغم أن جداء متجهة في عدد حقيقي يوفر الأرضية الملائمة لترجمة خاصيات الهندسة التآلفية باستعمال المتجهات،ويساعد على حل العديد من المسائل الهندسية، التي يكون حلها الهندسي مستعصيا، وقد نجد تبريرا لذلك في كون إدخال المتجهات في الرياضيات كان نتيجة لوجود بعض المسائل الهندسية التي كان حلها يحتاج إلى بعض الاعتبارات الوسيطية. إنه تدخل لا يفيد المدرس في شيء، ويساعد على وجود عدة تأويلات لا تخدم المتعلم، ويفيد البعض في التهرب من مواجهة الإشكالية التي يطرحها هذا الجداء، التي تبقى حية حتى في برنامج الجدع المشترك، ويتم معالجتها اعتمادا على فطنة التلاميذ أو اعتبار هذا الجداء ضمن المكتسبات المفترضة.

ورغم الطابع المتجهي للإزاحة فإنها تتدخل في تشكيل بعض التحويلات التآلفية غير تلك المعروفة، كالتماثل المركزي والتماثل المحوري، والدوران....، وهذا يؤكد أهميتها الرياضياتية، ويؤكد مدى إمكانية توظيفها في إنتاج بعض النتائج الهندسية، رغم أنها لا تظهر بالقوة اللازمة في حل المسائل الهندسية التي يمكن اقتراحها في هذا المستوى، وفي المقابل نجد البرامج الدراسية للتعليم الثانوي لا تخصص لهذا التصور مكانا ضمن مضامينه، وقد يستدعي ذلك إلى طرح عدة تساؤلات حول طرح مفهوم الإزاحة من خلال عدة برامج دراسية.

ولتهيئ التلاميذ لاستيعاب مفهوم جداء متجهة في عدد حقيقي، يقترح برنامج السنة الثانية من التعليم الثانوي الإعدادي تناول جداء متجهة في عدد صحيح نسبي، والذي يمكن تقديمه كعمليات جمع متكررة، في حين نجد برنامج السنة الثالثة من التعليم الثانوي الإعدادي لا يشير إلى ذلك، ويترك الأمر مبهما. إن مثل هذا التصرف يجعل إشكالية تقديم جداء متجهة في عدد حقيقي دون معالجة لتضاف إلى إشكاليات أخرى.

وإذا كان من الممكن تقديم جداء متجهة في عدد جذري انطلاقا من جداء متجهة في عدد صحيح نسبي، فإن تقديم جداء متجهة في عدد لاجذري يطرح إشكالية، لا يمكن معالجتها في هذا المستوى، بالنظر إلى الجانب الرياضياتي الصرف. لهذا فإن اللجوء إلى حامل مرئي قد يساعد على تجاوز هذه الإشكالية يبقى من الضرورة الديداكتيكية.

ولقد تم الربط بين تساوي متجهتين بمتوازي الأضلاع، الأمر الذي يمكن التعامل مع المتجهات. فهل يمكن ربط جذاء متجهة في عدد حقيقي بأحد الأشكال الهندسية. إن الإجابة تبدو واضحة انطلاقا من كون شبه منحرف هو الشكل أكثر ملاءمة لهذا الربط.
ونلاحظ أنه بمجرد التفكير في إيجاد تعبير متجهي عن شبه منحرف على غرار التعبير المتجهي لمتوازي أضلاع قد نجد معالجة بسيطة وغير مكلفة لإشكالية تقديم جذاء متجهة في عدد حقيقي.

إن ربط مفهوم الإزاحة بمتوازي أضلاع قد يجعل هذا المفهوم وسيلة للتعبير اللفظي لوضعية هندسية، لا يلبي جميع مواصفات تلك الوضعية. الشيء الذي يجعل التلميذ غير قادر على توظيف هذا المفهوم في غياب متوازي الأضلاع.كما أن ربط مفهوم الإزاحة بمدلوله اللغوي له تبعات لا يمكن التنبؤ بها . ولكن يمكن تحديد بعض ملامحها من خلال التوقف على الإنتاج الخام للتلميذ الناتج من خلال الوضعيات التي تقترح عليه.

المثلثات المتشابهة

ولا يحدد البرنامج الدراسي للسنة الثالثة من التعليم الثانوي الإعدادي الغاية من إدراج مفهوم تشابه المثلثات دون إدراج مفهوم التحاكي. وقد أدى ذلك إلى طرح تعريف لمفهوم التشابه انطلاقا من تناظر زاويتين، وقد اعتمد ضمنيا، في تقديمه من خلال الكتاب المدرسي، على مفهوم التحاكي. وهذا تناقض بين ما يرمي له البرنامج الدراسي و ما يتم ترجمته من خلال الكتب المدرسية. وقد نتج عن هذا التضارب تعديل للبرنامج الدراسي، والذي أتى بالمثلثات المتقايسة من برنامج السنة الثانية من التعليم الثانوي الإعدادي، وأتى بالحالة الثالثة للتشابه كتعريف لتشابه مثلثين. وهو إجراء مؤقت لا يفيد بمعالجة الإشكالية التي يطرحها مفهوم التشابه.

إن التعريف الرياضياتي لمفهوم تقايس مثلثين لا يمكن أن يكون إلا بواسطة التحويلات، الشيء الغير ممكن بالنسبة للتعليم الثانوي الإعدادي. تبقى المقاربة الحدسية لهذا المفهوم هي السبيل وحيد، وخصوصا وأن هذا المفهوم كان مصاحبا للتلميذ مند تعرفه على إنشاء مثلث قياسات أضلاعه معلومة.
وقد تبث تاريخيا أن أقليدس هو أول من طرح مفهوم تقايس مثلثين.ففي الجزء الثاني من كتابه العناصر نجد الحالات الثلاث لتقايس مثلثين،بعد أن عرف المثلثين المتقايسين بالمثلثين القابلين للتطابق.ويستعمل في البرهان على صحة هذه الحالات، المفهوم اللغوي للتحويل. إن الطريقة التي قدمها أقليدس في هذا المجال هي نفسها التي تقدم بها مفهوم تقايس مثلثين.

إن مفهوم تشابه المثلثات يطرح علاقة تكافؤ في مجموعة مثلثات المستوى، وبذلك فإنه يصنف مثلثات المستوى إلى عدة أصناف التكافؤ، يمكن العمل على عنصر واحد من صنف التكافؤ للحصول على خاصيات محققة في كل عنصر من عناصر هذا الصنف.

ولا يمكن تعريف هذه العلاقة إلا إذا تم تبني ترتيب معين لرؤوس المثلثين المتشابهين، لهذا نجد مصطلحا آخر لتشابه مثلثين: Triangles semblables directement. فعندما نقول أن المثلثين متشابهان مباشرة فإن الزوايا المتقايسة في المثلثين تكون معلومة. أما إذا قيل أن المثلين متشابهان فقط فإن الزوايا المتقايسة في المثلثين تكون غير معلومة. ورغم وجود هذه الإشكالية فإن الفكرة الأساسية التي يأتي بها تشابه المثلثات تبقى حاضرة عند التعامل مع المسائل الهندسية.وخصوصا في تلك المتعلقة بالتحويلات التآلفية.
إن التعريف الرياضياتي لمفهوم تشابه مثلثين لا يمكن أن يكون إلا بواسطة التحويلات التآلفية. وهو أمر غير ممكن بالنسبة للسنة الثالثة من التعليم الثانوي الإعدادي.وتبقى المقاربة الحدسية لهذا المفهوم هي السبيل الوحيد: إن تقديم مفهوم تشابه مثلثين، انطلاقا من مفهوم تقايس مثلثين، يتطلب استعمال مفهوم التحاكي، أو على الأقل مفهوم المثلثين المتحاكيين عند الرأس، ونظرا لكون برامج الرياضيات بالتعليم الثانوي الإعدادي لا تتطرق إلى مفهوم التحاكي فإن المقاربة الوحيدة التي يمكن تبنيها في سبيل تقديم هذا المفهوم تبقى تلك التي تعتمد على مفهومي تكبير وتصغير الأشكال الهندسية المستوية، وخصوصا وأن التلميذ سبق له التعامل مع هذين المفهومين بالتعليم الابتدائي.
إذا كان من الضروري أن يضم البرنامج الدراسي مفهوم التشابه فإنه من الواجب إعطاء الأهمية التي يستحقها هذا المفهوم و من الواجب أيضا إعداد الأرضية المناسبة لتقديم هذا المفهوم. فقد كان من الممكن حذف التشابه إذا تقرر حذف التحاكي. وإنه لمن الواجب أن يأتي هذا المفهوم من أجل تلبية بعض الحاجيات المعرفية للتلميذ أو على الأقل تحديد مجالات توظيفه، لأن المعرفة التي لا توظف تكون ميتة قبل ولادتها.

ومن أجل ربط مفاهيم البرنامج فإنه يكون من الضروري أن تقدم بعض البراهين على صحة الحالات الثلاث باستعمال بعض المفاهيم المدرجة في هذا البرنامج، ويكون جيب تمام زاوية حادة وسيلة لتحقيق ذلك، مع العلم أنه يكون للمثلث زاويتين حادتين دائما، وذلك لأن تعريف جيب تمام لزاوية في هذا المستوى يتطلب أن تكون الزاوية حادة. وهذا أضعف الإيمان.

الزوايا المحيطية

ولقد طرح برنامج السنة الأولى من التعليم الثانوي أداة لمقارنة قياس الزوايا من خلال الخاصيات المتعلقة بالمتوازيين والقاطع، إلا أن هذه الأداة تستلزم وجود التوازي، الأمر الذي لا نجده في جميع وضعيات مقارنة قياسات الزوايا، لهذا فإنه من الضرورة المنطقية تزويد التلميذ بأدوات أخرى تلبي قصور الأداة السابقة. ومن بين هذه الأدوات يأتي مفهوم الزاوية المحيطية في دائرة. وفي هذا الصدد يقترح برنامج السنة الثالثة من التعليم الثانوي الإعدادي خاصيات تتعلق بالزوايا المركزية والمحيطية.

ورغم محدودية الخاصيات المحددة من طرف برنامج السنة الثالثة من التعليم الثانوي الإعدادي فإن لها استعمالات متعددة، منها ما هو متعلق بتشابه المثلثات، ومنها ما هو مرتبط بالرباعيات الدائرية، التي يعتبرها البرنامج ضمن حدوده، ومنها ما يندرج ضمن التمارين المصاحبة لهذه الخاصيات. ويأتي البرنامج الدراسي للجدع المشترك ليخصص فقرة ضمن فصل الحساب المثلثي لدراسة الزوايا المحيطية والرباعيات الدائرية وعلاقة الجيب. ويبدو من خلال ذلك أن هذه المفاهيم مقحمة في هذا البرنامج، حيث لا نجد لها أثر في باقي المفاهيم المدرجة في هذا البرنامج، ومن خلال السياق التي وردت من خلاله يمكن القول بأنها اقترحت من أجل إنجاز بعض التمارين الخاصة بها والخاصة بفصل المثلثات المتشابهة.

ومن خلال هذه البرامج، تأتي فكرة أساسية تسمح بمقارنة قياسي زاويتين في وضعيات مختلفة، بغض النظر عن وجود التوازي، ولا تقوم البرامج الدراسية بمحاولة لتوضيحها .فلا بد من إبرازها من خلال الكتب المدرسية أو من خلال الاجتهادات الفردية، لما لها من أهمية بالغة في تزويد المتعلم بتقنية تساعده على مقارنة قياس الزوايا. الشيء الذي لا يحدث لعدة اعتبارات موضوعية وذاتية، منها الرغبة في الحفاظ على الموروث، ومنها أيضا عدم إفساح المجال للتعددية الحقيقية في التأليف المدرسي، ومنها كذلك عدم تشجيع الممارسين على الخروج من النمطية القاتلة لكل تفكير فاحص.... ويمكن توضيح هذه الفكرة من خلال المثال التالي: $ABCD$ رباعي محدب، إذا كانت النقطة D توجد داخل الدائرة المحيطة بالمثلثABC فإن: $\hat{B} > \widehat{\ }$ و إذا كانت النقطة D توجد على الدائرة المحيطة بالمثلث ABC فإن:$\widehat{BDC} = \widehat{BAC}$ وإذا كانت النقطة D توجد خارج الدائرة المحيطة بالمثلث ABC فإن:$\widehat{BDC} < \widehat{BAC}$. ورغم أن هذة البرامج لا تتناول سوى تساوي قياسي زاويتين فإن الحالتين المتبقيتين ستكون سوى تطبيقين لهذا التساوي، ويمكن للمدرس طرحها رغم عدم التنصيص عليهما في التوجيهات التربوية المرافقة لهذه البرامج.

صعوبات تعلم الهندسة الفضائية

إن الدعوة إلى تدريس الهندسة الفضائية وفق المنظور الحدسي للفكر الرياضياتي، يجعل تدريسها رهين بعدة عوامل، منها ما هو مرتبط بالمادة، ومنها ما هو غير ذلك. وتتجلى هذه العوامل في الصعوبات الداخلية لتدريس الهندسة الفضائية، التي تنتجها المادة بغض النظر عن كيفية تدريسها، وفي الصعوبات الخارجية لتدريسها، الناتجة عن الفضاء التعليمي-التعلمي.

وتتميز الهندسة الفضائية عن الهندسة المستوية، بكونها تعتمد أساسيا على التمثيل المستوي للأشكال الفضائية، وقراءة معقدة لهذه الأشكال، أو ما يصطلح عليه بالرؤية في الفضاء $(voir\ dans\ l'espace)$.

ومن بين الصعوبات التي تعترض التلميذ،عند تناوله المسائل المتعلقة بالهندسة الفضائية، تلك التي تتجلى بصفة خاصة، في المسائل الهندسية التي لا تتطلب فقط تطبيق خاصية، أو البرهنة على صحة نتيجة ما، بل التي تتطلب تصورا $(visualisation)$الأشكال هندسية. وأشار Hadamard إلى وجود صعوبات تعلم وتعليم الهندسة الفضائية قائلا: إنه من الضرورة البيداغوجية تقسيم الصعوبات عند تناول الهندسة، ويضيف إلى أن الرؤية في الفضاء تشكل لوحدها صعوبة حقيقية، لا يمكن إضافتها إلى الصعوبات الأخرى.

إن عدم قدرة التلميذ على تصور الأشكال الهندسية، وعدم استيعابه للعلاقات الموجودة بين مكوناتها، يؤديان إلى ارتكابه لأخطاء في حل المسألة المقترحة عليه،أو إلى العجز عن حلها. لهذا فإنه من الضروري أن يكون التلميذ قادرا على تصور شامل للأشكال الفضائية، حتى يتمكن من القيام بالتمثيل المطلوب واستغلاله أحسن استغلال في حل المسألة. ولن يتأتى ذلك إلا بفضل انتهاج إستراتيجية تأخذ بعين الاعتبار الصعوبات الداخلية لتدريس الهندسة الفضائية.

فكيف،إذن، يمكن أن نلتزم ونطالب بالدقة la rigueur في تدريس الهندسة الفضائية؟، وهذه الأخيرة تعتمد على مفهوم سيكولوجي مرتبط أساسا بالتأثيرات الناتجة عن تجارب التلميذ.

ويمكن الإجابة عن هذا التساؤل بالقول: إن الرؤية في الفضاء تنمو مع الممارسة الدائمة، ولكن يجب الإشارة إلى أنه لا يمكن التمييز بين رؤية جيدة للأشكال الفضائية والقيام بالبرهنة الدقيقة على صحة جميع الملاحظات المجمعة حول تلك الأشكال، وذلك بغية الحصول على حل سليم للمسألة المقترحة. وهكذا تظهر أولى صعوبات تدريس الهندسة الفضائية، والتي تكمن في تنمية الرؤية في الفضاء.

إن التصور الجيد لأشكال الهندسية الفضائية يوحي بطريقة لمعالجة المسائل المتعلقة بها، ويساعد على الحصول على حل تقريبي للمسألة. وفي هذا الصدد، يمكن إعطاء الحرية لحدس التلميذ ولاختيار طريقة الحل، وبعد ذلك نطالبه باقتراح الحل السليم، الذي يجعل الاستدلال الحدسي استدلالا رياضياتيا، وفيه تصبح التظننات مستبدلة بحجج دامغة تعتمد على المعارف المؤسساتية.

إن البرامج الدراسية لا تساعد على تكوين صورة حول ما يمكن القيام به في شأن تنمية الرؤية في الفضاء، حيث تنص التوجيهات التربوية المرافقة لبرنامج السنة الثانية من التعليم الثانوي الإعدادي على أنه يتم دراسة الأوضاع النسبية في الفضاء من خلال ملاحظة المجسمات التي سبق تقديمها دون أن تكون موضوع درس أو تقويم. بينما تنص التوجيهات التربوية المرافقة لبرنامج السنة الثالثة من التعليم الثانوي الإعدادي على أنه من الواجب دراسة وإبراز بعض الأوضاع النسبية والتعامد من خلال أنشطة حول الموشور القائم.

ولا بد أن تكون البرامج الدراسية جدية في طرحها لمواضيع الهندسة الفضائية، وذلك من خلال إعطاء الأهمية اللازمة لتنمية الرؤيا في الفضاء، وذلك من خلال سن خطة تتوزع مراحلها على عدة سنوات، يكون الهدف منها هو تنمية الرؤيا في الفضاء، ومن بين الوسائل التي تساعد على ذلك، تخصيص وقفات إجبارية لملاحظة الأشكال الفضائية، واستخراج بعض الملاحظات من قراءة هذه الأشكال، دون أن يكون تقديم البرهان على صحتها إجباري بالنسبة للمتابعة التعليمية. ولا بد أن تطرح البرامج الدراسية منظومة مفاهيمية، تتوزع مضامينها على عدة مراحل، تمكن التلميذ من وصف المجسمات الفضائية وتساعد على التعبير عن الملاحظات التي يمكنه استخراجها من ملاحظة الأشكال الفضائية. وأمام هذه المتطلبات، تطرح الأسئلة التالية: ما هي نوعية المسائل التي تساعد على تنمية الرؤية في الفضاء؟ فهل هي مسائل تطرح صعوبات متعلقة بتصور المجسمات الفضائية؟ أو هي مسائل تقتصر على نشر المجسمات الفضائية؟.

التمثيل المستوي للأشكال الفضائية

إن هذه الأسئلة في غاية من الأهمية، لأن تحديد بعض عناصر الإجابة عنها يساعد المدرس على أخذ الترتيبات اللازمة لتدليل الصعوبات الداخلية لتدريس الهندسة الفضائية. وتحديد تعاقد ديداكتيكي حول دور الشكل أثناء معالجة مسائلها. والذي يمكن تلخيصه في نقطتين: يعتبر الشكل أداة توضيحية للوضعيات التي يجب دراستها، ويعتبر حاملا للحدس، يساعد على إظهار العلاقات الضمنية للنص المكتوب أو الشفوي.

وباعتبار الشكل لغة مستقلة بذاتها، فإن إنجاز الشكل يتطلب ترجمة النص الرياضياتي، بمعنى تحويل الكائنات الرياضياتية للنص إلى الرموز الخاصة بالشكل. وينتج عن ذلك، إلزامية قراءة النص، قراءة متأنية، عند القيام بإنجاز الشكل. ولن تكون هذه القراءة مفيدة إلا إذا كانت مساعدة على التحليل المنطقي للنص، بمعنى إذا كانت تساعد على إجلاء الروابط اللغوية والروابط الرياضياتية بين جميع الكائنات الرياضياتية النص. ويسمح هذا التحليل بتحديد جميع العلاقات الضرورية بين تلك الكائنات، سواء منها الصريحة أو الضمنية، والتي تساعد على فهم النص والشروع في التفكير لمعالجة أسئلة النص.

في المستوى، هناك رابطة بين الشكل والرسم (التمثيل) التي تخضع لقواعد رياضياتية واضحة، في أغلب الأحيان، وتحافظ على جميع مكونات الشكل. في حين لا نجد رابطة ممكنة في الفضاء تقوم بنفس الوظيفة. رياضياتيا، إن تمثيل شكلا فضائيا يعني تحديد صورته بتحويل على مستوى، هذا التحويل هو الإسقاط التآلفي، أو الإسقاط المخروطي، أو زوج من إسقاطين على مستويين متقاطعين... . إن جميع تقنيات التمثيل المستوي للأشكال الفضائية لا تستطيع أن تأخذ بعين الاعتبار كل مكونات الشكل المراد تمثيله. وهكذا تظهر الصعوبة الثانية لتدريس الهندسة الفضائية، والتي يمكن التعبير عنها على النحو التالي: إن اختيار تحويل ومعرفة خاصياته لا يمكن أن يكون بمعزل عن خاصيات الهندسة الفضائية. وأن هذه التحويلات، إن أمكن تدريسها، لا تسمح باسترجاع مكونات الشكل انطلاقا من تمثيله، نظرا لضياع بعض المعلومات، مثلا لا يمكن استرجاع التعامد في الكثير من الحالات عند التمثيل وفق تقنية المنظور المتساوي. إذن، المشكل مزدوج: مشكل الرسام (التمثيل المستوي للأشكال الفضائية) ومشكل المهندس (قراءة التمثيل المستوي وإعادة الشكل انطلاقا من تمثيله المستوي).إن البرامج الدراسية الحالية لا تخصص وقفات لتدريس تقنيات التمثيل المستوى للأشكال الفضائية، فالتوجيهات التربوية المرافقة لبرنامج السنة الأولى من التعليم الثانوي الإعدادي تنص على نشر بعض المجسمات الاعتيادية، دون الإشارة إلى التطرق إلى كيفية انجاز التمثيلات المستوية لهذه المجسمات، وتطالب بتحقيق بعض الأهداف، التي لا يمكن تحقيقها بمجرد تداولها من خلال حصة أو حصص، وفي هذا المجال لا يقترح آليات لتحقيق هذه الأهداف. وعلى سبيل المثال ينص هذا البرنامج على إرساء تمثلات للتوازي والتعامد في الفضاء، ولا يشير إلى كيف تحقيق ذلك. وتحاول التوجيهات التربوية المرافقة لبرنامج السنة الثانية من التعليم الثانوي الإعدادي تدارك النقص الملاحظة في توجيه المتابعة التعليمية في مجال تدريس الهندسة الفضائية، إلا أن ما جاء في هذه التوجيهات بقي نظريا على الحد الذي يجعله غير مفهوم.

الهدف المفقود

ولقد لخصت التوجيهات التربوية المرافقة للبرامج القديمة أهداف تدريس الهندسة الفضائية بالقول: ويسعى الجانب التكويني المستهدف من تدريس الهندسة الفضائية، إلى تحقيق التمثيل المستوي للأشكال الفضائية، قصد استعمالها، بما يسمح به التوظيف العملي للهندسة المستوية، من أجل التعرف على وضعيات فضائية مركبة، واستنباط خاصيات التقاطع والتلاقي والتوازي واستيعاب خاصيات التعامد، التي تتميز في الهندسة الفضائية بطابع خاص. وهنا تبرز ضرورة العمل على التقليص من تأثير المشكل المزدوج لتدريس الهندسة الفضائية من خلال توزيع مضامين الهندسة الفضائية بالشكل الذي يسمح بذلك. ومن أجل تحقيق هذا الهدف، يكون لزاما عند التفكير في إعداد برامج الدراسية البحث عن وسائل كفيلة بتدليل الصعوبات الناتجة عن طبيعة الهندسة الفضائية، والتي تتعلق أساسا بالصعوبات التي يطرحها التمثيل المستوي للأشكال الفضائية، والتي يطرحها استغلاله أثناء معالجة وضعيات الهندسة الفضائية. ولا يجوز غض النظر عن تحقيق هذا الهدف بدعوى وجود صعوبات.

تطبيقات مبرهنة طاليس في الفضاء

إذا كان تطبيق مبرهنة طاليس في الفضاء وسيلة لتدليل الصعوبات الناتجة عن طبيعة هذه الهندسة، فإنه من الضروري التفكير في كيفية إعداد أرضية مناسبة لتطبيق هذه المبرهنة. إن صياغة مبرهنة طاليس في الفضاء تستدعي ثلاث مستويات متوازية ومستقيمين يقطعان المستويات الثلاث، الشيء الذي لا يمكن العمل به وفق الاعتبارات المفروضة من طرف البرنامج الدراسي، ومن بين هذه الاعتبارات نجد الصياغة المقترحة لمبرهنة طاليس في المستوى، حيث نجد أن البرنامج الدراسي للسنة الثالثة من التعليم الثانوي الإعدادي يقترح مبرهنة طاليس في المثلث.ونجد كذلك الملاحظة، الواردة في التوجيهات التربوية المرافقة لهذا البرنامج، التي تنص صراحة على أن دراسة بعض الأوضاع النسبية في الفضاء تتم من خلال ملاحظة الموشور القائم والهرم. فكيف تتم عملية ملاحظة الموشور القائم والهرم؟وبالإضافة إلى ذلك فإن مفهوم التوازي في الفضاء بقي دون مأسسة من خلال برامجي السنتين السابقتين، رغم أنه استعمل من خلال وصف بعض المجسمات الفضائية، ولم تتم مأسسة بعض المفاهيم الأولية للهندسة الفضائية، مثل مفهوم المستوى.. عملا بالملاحظة الواردة في التوجيهات التربوية المرافقة لبرنامج السنة الأولى من التعليم الثانوي الإعدادي. ولتجاوز ذلك، اقترح برنامج السنة الثانية من التعليم الثانوي الإعدادي، ضمن الكفايات المستهدفة، التعرف على مختلف الأوضاع النسبية في الفضاء عن طريق ملاحظة بعض المجسمات الاعتيادية.وهذا يشكل منطلقا لتقديم تطبيقات مبرهنة طاليس في الفضاء.

وأمام هذه المتطلبات تطرح عدة اعتبارات يجب العمل بها عند تناول تطبيقات مبرهنة طاليس في الفضاء، نجملها في النقط التالية:

- العمل بمبرهنة طاليس بالصيغة التي وردت في البرنامج.
- العمل على توظيف هذه المبرهنة لتحديد مفهوم توازي مستويين وجرد بعض خاصياته، لأنه في غياب هذا المفهوم تبقى المسائل التي يمكن اقتراحها في هذا المجال هي نفس المسائل التي تقترح في شأن مبرهنة طاليس في المستوى.
- طرح مبرهنة طاليس من خلال الهرم أو رباعي أوجه، على غرار ما استعمل في المستوى.
- طرح مفهوم المستوى بشكل حدسي، كما تم التعامل مع المستقيم في المستوى.

ويضاف إلى هذه الاعتبارات اعتبار منهجي يتعلق بكيفية تقديم المفاهيم المتعلق بتطبيقات مبرهنة طاليس في الفضاء، ويمكن الاعتماد في ذلك على ملاحظة الأشكال.

تطبيقات مبرهنة فيثاغورس في الفضاء:

ونظرا لارتباط مفهوم التعامد بمبرهنة فيثاغورس فإن ما يمكن فهمه من ما ورد في برنامج السنة الثانية من التعليم الثانوي الإعدادي هو أن تطبيق مبرهنة فيثاغورس جاءت لتأسس مفهوم التعامد في الفضاء. وينص هذا البرنامج صراحة على أن دراسة التعامد يكون عن طريق بعض المجسمات الفضائية الاعتيادية، وهذا يعني أن التعريف العام للتعامد في الفضاء لا يندرج ضمن محتويات هذا البرنامج. ولا يعتبر تعريف تعامد مستقيمين في الفضاء كمنطلق لتطبيقات مبرهنة فيثاغورس في الفضاء، وذلك لعدة اعتبارات ، تتجلى أولها في كون تطبيق هذه المبرهنة يتطلب تقاطع المستقيمين، و تكمن الثانية في تدليل الصعوبات التي يطرحها مفهوم التعامد في الفضاء، مع الحفاظ على القيمة العلمية للمقاربة المتبعة لتقديم هذا المفهوم، بالإضافة إلى أن تعريف تعامد مستقيمين في الفضاء بواسطة تعامد أحدهما على الموازي للآخر لا يغير في الأمر شيئا. ولتسهيل عملية استيعاب التلاميذ لمفهوم تعامد مستقيم ومستوى، يكون من الضروري الانطلاق من وضعية مألوفة لديهم، وتمتاز بقربها من الملموس. ولن نجد وضعية تستجيب لهذه المتطلبات أحس من وضعية المكعب.وتكون مبرهنة فيثاغورس وسيلة لتقديم هذا المفهوم، بالاعتماد على أوصاف المكعب، التي ألفها التلاميذ منذ زمن.وتجدر الإشارة إلى بعض الأوصاف لمتوازي المستطيلات الناتجة عن ذلك لا تعتبر ضمن المعارف الأساسية المستهدفة، في هذه الحالة يكون التلميذ مطالبا بإعادة البرهان على صحتها.

ولكي تكون مناقشة هذا الموضوع مجدية وهادفة داخل الفصل الدراسي يلزم أن يكون التلاميذ قد ألفوا مبرهنة فيثاغورس وأدركوا دورها في إثبات تعامد مستقيمين. أما فيما يخص الهندسة الفضائية، فيكفي من أمرها قليل من المعرفة، إذ يمكن للتلميذ أن يعتمد على بعض أوصاف المجسمات الفضائية الاعتيادية.

تكبير وتصغير بعض المجسمات الفضائية:

إن معنى مصطلح تكبير(أو تصغير) يستمد من اللغة الطبيعية أكثر من الرياضيات، لهذا نجد بعض التعاريف لهذا المصطلح يعتمد على مدلوله اللغوي، فعلى سبيل المثال نجد التعريف التالي: تكبير(أو تصغير) شكل يعني ضرب جميع أبعاده في نفس عدد حقيقي أكبر قطعا من العدد1 (أصغر قطعا من العدد1). وإذا كان هذا التعريف صحيحا بالنسبة للمثلثات والرباعيات أوجه، فإنه لا يبقى صحيحا إذا تعلق الأمر بالأشكال المستوية الأخرى والمجسمات الفضائية الأخرىإن صحة هذا التعريف، بالنسبة للمثلثات والرباعيات أوجه، تستمد من الحالة الثالثة للتشابه، باعتبار العلاقة التي تحددها تناسب الأضلاع وتقايس الزوايا. أما بالنسبة للهندسة الفضائية فإن الأمر يختلف تماما، حيث نجد مثالا مضادا في متوازي المستطيلات ومتوازي الأوجه أبعادهما متناسبة:يكفي أن نأخذ متوازي مستطيلات، ونكون متوازي مستطيلات آخر أبعاده متناسبة مع أبعاد الأول، ونضغط عليه من أحد رؤوسه للحصول على متوازي أوجه، أبعاده متناسبة مع أبعاد متوازي المستطيلات الأول. إن التحديد الرياضياتي لمصطلح تكبير(أو تصغير) يتطلب اللجوء إلى التشابهات، الأمر الذي لا يمكن القيام به في مستوى السنة الثانية من التعليم الثانوي الإعدادي، تبقى المقاربة الحدسية لمفهوم تكبير(أو تصغير) هي الوسيلة الوحيدة. ويمكن الاستفادة من التحديد الرياضياتي لمصطلح تكبير(أو تصغير) لتحديد هذه المقاربة: إن كل تشابه هو مركب تحاك وتقايس، وبما أن وضع المجسم المكبر لا يتدخل في تأسيس مفهوم تكبير(أو تصغير) فإنه بالإمكان تقديم هذا المفهوم بواسطة مقاربة حدسية لمفهوم التحاكي، دون أن يكون هذا المفهوم الأخير موضوع دراسة.

إن إدراج مفهومي تكبير وتصغير في البرنامج الدراسي،دون إدراج مفاهيم مساعدة على استيعابه يؤدي إلى بعض الممارسات التي تجعل المتعلم يلاقي صعوبات معقدة لاستيعاب الهوية الحقيقية لكل مفهوم من هذين المفهومين وتجعلهما مجرد رقمين من أرقام البرنامج الدراسي لا معنى لهما.

الهندسة التحليلية مجرد حسابات

إن الغاية الأساسية من إدراج الهندسة التحليلية في التعليم الثانوي تكمن في تزويد المتعلم من نمط جديد من التفكير الرياضياتي، الذي يمكنه من إنجاز مجموعة من التمارين الهندسية، والتي كانت مستعصية الحل قبلا. وبهذا فإنها تزود التلميذ بمهارات تمكنه من مباشرة وضعيات كانت من الصعب معالجتها وفق نظرته القديمة للهندسة.

وتقدم برامج التعليم الابتدائي المفهوم الأولي للهندسة التحليلية، ويتعلق الأمر بالمعلم في المستوى، وذلك عن طريق موضعة نقطة داخل شبكة، ويستمر هذا التصور طيلة السنتين الأوليتين من التعليم الثانوي الإعدادي من خلال توظيف المعلم في تقديم مفاهيم أخرى. ويبدأ تدريس الهندسة التحليلية بشكل فعلي انطلاقا من السنة الثالثة من التعليم الثانوي الإعدادي، حيث يخصص برنامج هذه السنة وقفة لدراسة إحداثيتي نقطة- إحداثيتي متجهة، ووقفة أخرى من أجل دراسة معادلة مستقيم. إلا أن كيفية طرح هذه المفاهيم يجعل تحقيق أهداف هذه الهندسية من الأمور المستبعدة:

ويعتبر مفهوم إحداثيتا نقطة من المفاهيم الأولية للهندسة التحليلية، فبفضله يمكن تحديد المفاهيم الأخرى لهذه الهندسة، مثل معادلة مستقيم، معادلة دائرة....، ويمكن اعتباره من المفاهيم الهندسية التي تتدخل في التحليل، حيث بواسطته يمكن تعريف منحنى دالة عددية لمتغير واحد، وتحديد مماس منحنى في نقطة...، وهذا يؤكد أهميته الرياضياتية. ويعتبر هذا المفهوم ملازما لمفهوم إحداثيتا متجهة، فلا يمكن الحديث عن المفهوم الأخير دون اللجوء إلى المفهوم الأول، نظرا لكون المتجهة قد عرفت بنقطتين، كما أنه يكون ملازما لمعادلة مستقيم، مما يجعل مفهوم إحداثيتا نقطة من المفاهيم الأساسية للهندسة التحليلية التي تدرس في التعليم الثانوي الإعدادي. إن مفهوم إحداثيتي متجهة يشترط، من الناحية الرياضياتية الصرفة، أن يكون المستوى منسوبا لأساس، الأمر الذي قد يستدعي تعريف الأساس، إلا أن برنامج هذه السنة لا يشير إلى تناول مفهوم الأساس، وحتى إذا تم تعريف الأساس فإن ذلك يكون مجرد تعبير آخر لمفهوم المعلم. فكيف يمكن تقديم إحداثيتي متجهة؟. ولقد سبق للتلميذ أن تعامل مع إحداثيتي نقطة في عدة مناسبات من خلال برامج مادة الرياضيات للسنوات السابقة، مما يجعل طرحه في برنامج هذه السنة يبتغي تحقيق هدفين: يمكن الأول في تدعيم ما قد استوعبه التلميذ خلال تعلمه السابق، ويتجلى الهدف الثاني في خدمته المفاهيم الأخرى المتعلقة به والمدرجة في برنامج هذه السنة.

ويعتبر تحديد مستقيم بمعادلة من الدرجة الأولى بمجهولين من بين الأفكار الأساسية التي أدت إلى تأسيس الهندسة التحليلية، وذلك بغية حل بعض المسائل الهندسية، التي كان حلها الهندسي مستعصيا على العموم. إن هذا التحديد يسمح بتكميمquantifier مفهومي التعامد والتوازي، المفهومان الأساسيان في الهندسة، وبالتالي يمكن حل المسائل المتعلقة بالمفهومين بطريقة جبرية. ويمكن اعتبار معادلة مستقيم من بين الأمثلة الأولى التي تقترح عن منحيات الدوال العددية لمتغير واحد، وهي تطرح فكرة أساسية تمكن من تقديم مقاربة لمفهوم الدالة العددية، حيث أنها تقدم نموذجا عن الرابطة أو العلاقة بين عددين حقيقيين. ويمكن تقديم معادلة مستقيم وفق مقاربتين: تعتمد الأولى على شرط استقامية ثلاث نقط، أو استقامية متجهتين، وتعتمد الثانية على مبرهنة طاليس. إن برنامج السنة الثالثة من التعليم الثانوي الإعدادي لا يسمح بتقديم المقاربة الأولى نظرا لكونه لا ينص على تناول إحداثيتي جذاء متجهة في عدد حقيقي، وحتى الأطر المرجعية المواكبة له لا تشير إليها. وتبقى المقاربة الثانية أمام المدرس،إلا أنها تتطلب دراسة عدة حالات، نظرا للصيغة التي طرحت بها مبرهنة طاليس، مما يجعلها غير محبذة التوظيف. وتلجأ بعض الممارسات إلى تقديمها كمنحنى لدالة تآلفية ، وتقع في مخالفة رياضياتية: إقصاء المستقيم الموازي لمحور الأراتيب من سجل المستقيمات أو اعتباره كمنحى دالة تآلفية.

إن إدراج هذه المفاهيم بهذه الشاكلة قد دفع بعض الممارسات إلى طرح بعض القواعد للإجابة عن بعض الأسئلة التي تطرحها الهندسة التحليلية، مثل استقامية ثلاث نقط، إحداثيتي منتصف قطعة... مما جعل هذه الهندسة تعج بقواعد، يكفي التلميذ أن يقوم بعملية التعويض فقط.

وليس من الضروري التوقف عند تمارين يكون الهدف الوحيد من طرحها هو التطبيق لقاعدة التعرف على استقامية ثلاث نقط محددة بإحداثيتيها، لأن التوقف عند هذا النوع من التمارين قد يجعل التلميذ عرضة لنسيان المفاهيم الأخرى المرتبطة به ولا تساهم في تنمية قدرة التلميذ على تجنيد موارده، وقد يجعل التلميذ عرضة لبعض التأويلات للبرنامج الدراسي وللأطر المرجعية، وخصوصا وأن البرنامج الدراسي للسنة الثالثة من التعليم الثانوي الإعدادي لا ينص على تناول مسألة التعرف على استقامية ثلاث نقط باستعمال قاعدة،سواء عند استعراضه لمضامينه أو عند استعراض القدرات المستهدفة. وعند الإطلاع على البرنامج الدراسي لهذا المستوى والتوجيهات التربوية المرافقة له قد نجد أن هذه القاعدة لا تندرج ضمن مضامين هذا البرنامج، ولكن من الناحية الرياضياتية الصرفة يمكن طرحها وإعادة طرحها انطلاقا من تلك المضامين الواردة في البرنامج الدراسي، وبما أن طرح هذه القاعدة يحتاج إلى طرح إحداثيتي جذاء متجهة في عدد حقيقي، الشيء الذي لا يخوله البرنامج الدراسي فإن طرح هذه القاعدة قد يأتي على تخوم البرنامج الدراسي، إلا إذا تم طرحها انطلاقا من معادلة مستقيم، ورغم ذلك فإنه ليس من اللازم أن تكون من المعارف المؤسساتية. وبما أن الأطر المرجعية للامتحان الإشهادي تعتبر أن التعرف على استقامية ثلاث نقط محددة بإحداثياتها لا يندرج ضمن الأسئلة التي يمكن طرحها في الامتحان الإشهادي فإن الطريقة المناسبة التي يمكن انتهاجها في هذا المجال هو المرور من معادلة مستقيم، أو طرح هذا النوع الأسئلة كتوابع لأسئلة حول معادلة مستقيم. وليس من الضروري التوقف عند تمارين قد تجعل التلميذ عرضة لبعض التأويلات للبرنامج الدراسي وللأطر المرجعية، وخصوصا وأن البرنامج الدراسي للسنة الثالثة من التعليم الثانوي الإعدادي لا ينص على تناول مسألة تحديد إحداثيتي منتصف قطعة باستعمال قاعدة حساب إحداثيتي منتصف قطعة ،سواء عند استعراضه لمضامينه أو عند استعراض القدرات المستهدفة. وعند الإطلاع على البرنامج الدراسي لهذا المستوى والتوجيهات التربوية المرافقة له قد نجد أن قاعدة تحديد إحداثيتي منتصف قطعة لا تندرج ضمن مضامين هذا البرنامج، ومن الناحية الرياضياتية الصرفة يمكن طرحها وإعادة طرحها انطلاقا من تلك المضامين الواردة في البرنامج الدراسي، وبما أن الأطر المرجعية للامتحان الإشهادي تعتبر أن تحديد إحداثيتي منتصف قطعة يندرج ضمن الأسئلة التي يمكن طرحها في الامتحان الإشهادي، دون الإشارة إلى قاعدة تحديدهما، فإن الطريقة المناسبة التي يمكن انتهاجها هو تحديد إحداثيتي منتصف قطعة انطلاقا من التعريف المتجهي لمنتصف قطعة. ومن الضروري التأكيد على أنه من الضروري التأكد بعدم توازي المستقيم ومحور الأراتيب للحديث عن معادلة مختصرة له.

إن الصيغة المختصرة لمعادلة مستقيم تطرح إشكالية، تتعلق أساسا بالاختيار المتعارف عليه،الذي يكون ضمنيا في غالب الأحيان،فعلى سبيل المثال: عندما نقول للتلميذ أن الصيغة المختصرة لمعادلة المستقيم المعرف بالمعادلة $2x + 3y + 1 = 0$ هي $y = \frac{-2}{3}x - \frac{1}{3}$ وليست هي $x = \frac{-3}{2}y - \frac{1}{2}$، إلا أن المدلول اللغوي لمصطلح الميل يعطي للصيغة الأولى نوعا من المصداقية، لأن الميل لغويا يحتسب انطلاقا من السطح، الذي نمثله عادة بالمستقيم الأفقي.وبما أن جرت العادة أن يتم اختيار محور الأفاصيل كالمستقيم الأفقي فإنه من الطبيعي أن تكون الصيغة المختصرة لمعادلة مستقيم هي العلاقة التي تحدد الأرثوب بدلالة الأفصول. ولقد طرح البرنامج لهذه السنة مصطلحين لنفس المفهوم، ويتعلق الأمر بالمعامل الموجه والميل، فما الفرق بينهما؟ إن مفهوم المعامل الموجه مرتبط بالمفاهيم المتجهية للهندسة، وبالتالي فإنه لا يتطلب أن يكون المعلم متعامدا ولا ممنظما. أما إذا أخذنا بمدلول الميل فنجده مرتبط بمفهوم ضل زاوية، وبالتالي يشترط أن يكون المعلم متعامدا وممنظما. ونظرا لكون برنامج هذه السنة لا يتطرق إلى ضل زاوية منفرجة، فإن هذا المفهوم يبقى منحصرا في بعض الحالات، مما يجعل استعمال مصطلح الميل محدودا. ومن أجل معالجة هذه الإشكالية يمكن عدم التفريق بين الميل والمعامل الموجه، مع إعطاء مدلول للميل في الحالات الممكنة.

خلاصة لا بد منها

يبدو مما سبق أن البرامج الدراسية تساهم بقسط وافر في إنتاج صعوبات تعلم مادة الرياضيات، نظرا لكونها تأتي بمفاهيم جردت من تلك الخلفية المعرفية التي تأسس لها الأرضية المناسبة لتدريسها، ونظرا لكونها لا تراعي الشروط الموضوعية التي تتحكم في كيفية ترجمتها من خلال الكتب المدرسية، فهي تترك مجالات واسعة للتأويل، الذي لا يكون أحيانا في صالح الفرد المتعلم، وتؤدي أحيانا أخرى إلى انزلاقات، تكون متعمدة، تؤدي إلى تشويه المفاهيم أو إلى تجريد بعض المفاهيم من ماهيتها.