Correction de l'examen national 2024 Session Rattrapage PC/SVT

Exercice 1 $A(1,1,0)$ $\Omega(-1,1,-2)$

$(P) : x+z-1=0$

1) a) on a $A(1,1,0)$

on remplace les coordonnées de A dans $x+z-1=0$

donc $1+0-1=0$ d'où $A \in (P)$

et on a $\vec{n}(1,0,1)$ vecteur normal à (P)

b) on a $\vec{\Omega A}(2,0,2)$

donc $\vec{\Omega A} = 2\vec{n}$

d'où $\vec{\Omega A}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires

et donc $(\vec{\Omega A})$ est aussi normal au plan (P)

càd $\vec{\Omega A}$ est perpendiculaire au plan (P)

2) $(S) : x^2+y^2+z^2+2x-2y+4z-3=0$

a) on a $x^2+y^2+z^2+2x-2y+4z-3=0$

$\Leftrightarrow x^2+2x+1-1+y^2-2y+1-1+z^2+4z+4-4-3=0$

$(x+1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=9$

donc (S) est une sphère de centre $\Omega(-1,1,-2)$

et de rayon $R=\sqrt{9}=3$

b) on a $d(\Omega,(P)) = \dfrac{|x_\Omega+z_\Omega-1|}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}} = \dfrac{|-1-2-1|}{\sqrt{2}} = \dfrac{|-4|}{\sqrt{2}}$

$= \dfrac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} < R$

donc (P) coupe (S) suivant un cercle

puisque $A \in (P)$ et $(\Omega A) \perp (P)$ en A

donc le cercle est de centre A et de rayon

$r = \sqrt{R^2-d^2} = \sqrt{9-8} = \sqrt{1} = 1$

3) a) (Q_m) $x+y+mz-2=0$

on a $1+1+m\times 0-2 = 2-2=0$

donc $A \in (Q_m)$ $\forall m \in \mathbb{R}$

b) pour que (Q_m) soit perpendiculaire à (P)

il faut que leurs vecteurs normaux soient perpendiculaires

donc soit $\vec{w}(1,1,m)$ normal à (Q_m)

et $\vec{n}(1,0,1)$ normal à (P)

donc $(Q_m) \perp (P) \Leftrightarrow \vec{w}\cdot\vec{n}=0$

$\Leftrightarrow 1\times1+1\times0+m\times1=0$

$\Leftrightarrow 1+m=0$

$\Leftrightarrow m=-1$

d'où $\boxed{m=-1}$

c) pour que (Q_m) coupe la sphère (S) en un cercle de centre A il doit être confondu avec (P)

or $\vec{w}$ et $\vec{n}$ ne peuvent être colinéaires

donc y a pas de plan (Q_m) qui vérifient ces conditions

Exercice 2 (Rattrapage 2024 PC/SVT)

I) $(E) : z^2 - 4z + 9 = 0$

1) on a $\Delta = (-4)^2 - 4\times1\times9$
$= 16 - 36$
$= -20$
$= (2\sqrt{5}i)^2$

$\boxed{\Delta = (i2\sqrt{5})^2}$

2) on a $\Delta < 0$
donc (E) admet deux solutions complexes

$z_1 = \frac{4 + 2i\sqrt{5}}{2} = 2 + i\sqrt{5}$
ou
$z_2 = \overline{z_1} = 2 - i\sqrt{5}$

$S = \{2 - i\sqrt{5}, 2 + i\sqrt{5}\}$

II) $a = 2 + i\sqrt{5}$ $\quad b = 2 - i\sqrt{5}$ $\quad c = 2 - \sqrt{5}$

1) a) $a = 2 + i\sqrt{5}$
donc $|a| = \sqrt{2^2 + \sqrt{5}^2} = \sqrt{4+5} = \sqrt{9} = 3$

b) on a $\left|\frac{b}{a}\right| = \frac{|b|}{|a|} = \frac{|\overline{a}|}{|a|} = 1$

donc $|b| = |a| \Leftrightarrow OB = OA$

donc OAB est isocèle en O

2) a) $\frac{a-c}{b-c} = \frac{2 + i\sqrt{5} - 2 + \sqrt{5}}{2 - i\sqrt{5} - 2 + \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5} + i\sqrt{5}}{\sqrt{5} - i\sqrt{5}}$
$= \frac{\sqrt{5}(1+i)}{\sqrt{5}(1-i)} = \frac{1+i}{1-i} = \frac{i(-i+1)}{-i+1} = i$

donc $\boxed{\frac{a-c}{b-c} = i}$

b) on a $\left|\frac{a-c}{b-c}\right| = |i| = 1$
$\Leftrightarrow \frac{|a-c|}{|b-c|} = 1 \Leftrightarrow |a-c| = |b-c|$
$\Leftrightarrow CA = CB$

et $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) \equiv \arg\left(\frac{a-c}{b-c}\right) \equiv \arg(i) [2\pi] \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

donc ABC est un triangle rectangle isocèle en C

3) a) soit T la translation de vecteur $\overrightarrow{CA}$

$T(B) = D \Leftrightarrow d = b + aff(\overrightarrow{CA})$

tel que d est l'affixe de D

et $aff(\overrightarrow{CA}) = a - c = 2 + i\sqrt{5} - 2 + \sqrt{5}$
$= \sqrt{5} + i\sqrt{5}$

donc $d = 2 - i\sqrt{5} + \sqrt{5} + i\sqrt{5}$
$d = 2 + \sqrt{5}$

b) on a D image de B par la translation $\overrightarrow{CA}$
donc $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CA}$
donc ADBC est un parallélogramme
et on a $CA = CB$ et $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

donc ADBC est un carré

4) $x_n = \left(\frac{a}{3}\right)^n$ et $y_n = \frac{1}{1 - x_n}$

a) on a $\overline{x_n} = \overline{\left(\frac{a}{3}\right)^n} = \left(\overline{\frac{a}{3}}\right)^n = \left(\frac{\overline{a}}{3}\right)^n = \left(\frac{\overline{a}}{3}\right)^n$

donc $x_n \overline{x_n} = \left(\frac{a}{3}\right)^n \times \left(\frac{\overline{a}}{3}\right)^n = \left(\frac{a\overline{a}}{9}\right)^n = \left(\frac{|a|^2}{9}\right)^n = \left(\frac{9}{9}\right)$

$\boxed{x_n \overline{x_n} = 1}$

b) on a $y_n + \overline{y_n} = \frac{1}{1 - x_n} + \overline{\frac{1}{1 - x_n}}$

$= \frac{1}{1 - x_n} + \frac{1}{1 - \overline{x_n}}$

$= \frac{1 - \overline{x_n} + 1 - x_n}{(1 - x_n)(1 - \overline{x_n})}$

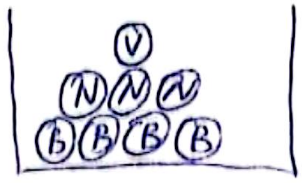
$= \frac{2 - \overline{x_n} - x_n}{1 - \overline{x_n} - x_n + x_n\overline{x_n}}$

$= \frac{2 - \overline{x_n} - x_n}{2 - \overline{x_n} - x_n}$

donc $y_n + \overline{y_n} = 1$ car $x_n\overline{x_n} = 1$

et on sait que $y_n + \overline{y_n} = 2R(y_n) = 1$
$\Leftrightarrow R(y_n) = \frac{1}{2}$

Exercice 3 (Rattrapage 2024 PC/SVT)



on tire 3 boules successivement et sans remise

1) Le nombre de tirage possibles est

$$Card\,\Omega = A_8^3 = 8\times7\times6 = 336$$

2) A : "Tirer trois boules blanches"

A : " $\{BBB\}$

$$p(A) = \frac{Card\,A}{Card\,\Omega} = \frac{A_4^3}{336} = \frac{4\times3\times2}{336} = \frac{24}{336} = \frac{4}{56}$$

3) B : "Tirer trois boules de même couleur"

B : $\{BBB, NNN\}$

$$p(B) = \frac{Card\,B}{Card\,\Omega} = \frac{A_4^3 + A_3^3}{336} = \frac{24+6}{336} = \frac{30}{336} = \frac{5}{56}$$

4) C : "obtenir au moins deux couleurs différentes"

on a $\overline{C}$: "obtenir trois boules de même couleur"

$$p(\overline{C}) = p(B)$$

donc $p(C) = 1 - p(B)$

$$= 1 - \frac{5}{56}$$

$$= \frac{56-5}{56}$$

$$p(C) = \frac{51}{56}$$

Problème (Rattrapage 2024 PC/SVT)

Partie I

$g(x) = \frac{x}{1+x}$ $\quad h(x) = \ln(1+x)$

$y = x$

1) a) Vérifions que $\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$

on a d'après la figure

$\forall x \in]-1;+\infty[\quad h(x) \geq g(x)$

car la courbe de h est au dessus de C_g

donc $\forall x \in]-1,+\infty[\quad \ln(1+x) \geq \frac{x}{1+x}$

et on a la droite d'équation $y=x$ courbes

est au dessus de (C_h) et de (C_g)

donc $\frac{x}{1+x} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$

(sachant que les courbes ont des points d'intersections)

b) En déduire que $(1+x)\ln(1+x) - x \geqslant 0$ pour tout x de $]-1;+\infty[$

on a $\forall x \in]-1;+\infty[\quad 1+x > 0$ car $x > -1$

donc $x \leqslant (1+x)\ln(1+x)$

d'où $(1+x)\ln(1+x) - x \geqslant 0$

c) Prouvons que $e^x - (1+e^x)\ln(1+e^x) \leqslant 0$

on a $\forall x \in]-1;+\infty[\quad g(x) \leqslant h(x)$ ~~$\leq x$~~

donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x \in]0;+\infty[$

d'où $\forall x \in \mathbb{R} \quad g(e^x) \leqslant h(e^x)$ ~~$\leq e^x$~~

$\frac{e^x}{1+e^x} \leqslant \ln(1+e^x)$

$e^x \leqslant (1+e^x)\ln(1+e^x)$

$e^x - (1+e^x)\ln(1+e^x) \leqslant 0$

2) $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = g(U_n) \end{cases}$

a) Mq $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq U_n \leq 1$

on a pr $n=0$ $U_0 = 1$ donc $0 \leq U_0 \leq 1$ vrai pr $n=0$

Supposons que $0 \leq U_n \leq 1$

et Montrons que $0 \leq U_{n+1} \leq 1$

on a $0 \leq U_n \leq 1$

et g est une fonction croissante sur $[0,1]$

donc $g(0) \leq g(U_n) \leq g(1)$

$0 \leqslant U_{n+1} \leqslant \frac{1}{2} \leqslant 1$

car $g(0) = 0$ et $g(1) = \frac{1}{2}$

donc $0 \leq U_{n+1} \leq 1$

d'où $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq U_n \leq 1$

b) Mq (U_n) est décroissante

on a $\forall x \in [0;1] \quad g(x) \leq x$

et $U_n \in [0;1]$

donc $g(U_n) \leqslant U_n$

d'où $U_{n+1} \leqslant U_n$

donc (U_n) est décroissante

c) En déduire que (U_n) est convergente

on a (U_n) est décroissante et minorée par 0

car $0 \leq U_n$

donc (U_n) est convergente

d) on a $\begin{cases} g \text{ est continue en } [0;1] \\ g([0;1]) = [0;\frac{1}{2}] \subset [0;1] \\ U_0 \in [0;1] \\ U_n \text{ est convergente} \end{cases}$

donc la limite de (U_n) est la solution de l'équation $g(\ell) = \ell$

d'où $\ell = 0$

donc $\lim U_n = 0$

Partie II

sur $\mathbb{R}$ $\quad f(x) = e^{-x}\ln(1+e^{x})$

1)

a) $f(0) = e^{0}\ln(1+e^{0}) = 1\ln(1+1) = \ln 2$

on a $\forall x\in\mathbb{R}$ $\quad e^{-x}>0$ et $1+e^{x}>1$

donc $\ln(1+e^{x})>0$

d'où $e^{-x}\ln(1+e^{x})>0$

alors $\forall x\in\mathbb{R}$ $\quad f(x)>0$

b) Mq $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$

on pose $X = 1+e^{x}$ $\quad \begin{matrix} x\mapsto-\infty \\ X\to 1\end{matrix}$

et $X-1 = e^{x}$

donc $\dfrac{1}{X-1} = e^{-x}$

d'où $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}\ln(1+e^{x}) = \lim\limits_{X\to1}\dfrac{\ln X}{X-1} = 1$

donc (C_f) admet une asymptote horizontale d'équation $y=1$ au voisinage de $-\infty$

c) Mq $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

on pose $X = 1+e^{x}$ $\quad \begin{matrix} x\mapsto+\infty \\ X\to+\infty\end{matrix}$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}\ln(1+e^{x})$

$= \lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{\ln(X)}{X-1}$

$= \lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{\ln(X)}{X}\times\dfrac{X}{X-1} = 0$

car $\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{\ln X}{X} = 0$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{X}{X-1} = 1$

d'où (C_f) admet une asymptote horizontale d'équation $y=0$ qui est l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$

2) a) Mq $\forall x\in\mathbb{R}$ $\quad f'(x) = \dfrac{1}{1+e^{x}} - e^{-x}\ln(1+e^{x})$

on a f est dérivable sur $\mathbb{R}$

car $x\mapsto e^{-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

et $x\mapsto\ln(1+e^{x})$ est définie et dérivable sur

donc $\forall x\in\mathbb{R}$ $\quad f'(x) = -e^{-x}\ln(1+e^{x}) + e^{-x}\times\dfrac{e^{x}}{1+e^{x}}$

$= -e^{-x}\ln(1+e^{x}) + \dfrac{1}{1+e^{x}}$

$f'(x) = \dfrac{1}{1+e^{x}} - e^{-x}\ln(1+e^{x})$

b) Vérifions que $\forall x\in\mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{e^{x}-(1+e^{x})\ln(1+e^{x})}{e^{x}(1+e^{x})}$$

on a $\forall x\in\mathbb{R}$ $\quad f'(x) = \dfrac{1}{1+e^{x}} - e^{-x}\ln(1+e^{x})$

donc $f'(x) = \dfrac{1-e^{-x}(1+e^{x})\ln(1+e^{x})}{1+e^{x}}$

$= \dfrac{e^{x}-e^{-x}\times e^{x}(1+e^{x})\ln(1+e^{x})}{1+e^{x}}$

$f'(x) = \dfrac{e^{x}-(1+e^{x})\ln(1+e^{x})}{1+e^{x}}$

c)

on a $\forall x\in\mathbb{R}$ $\quad e^{x}-(1+e^{x})\ln(1+e^{x})\leq 0$

et $\forall x\in\mathbb{R}$ $\quad 1+e^{x}>0$

donc $\forall x\in\mathbb{R}$ $\quad f'(x)\leq 0$

d'où f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

3)

a)

$(T): y = f'(0)(x-0)+f(0)$

$y = \left(\dfrac{1-2\ln 2}{2}\right)x + \ln 2$

$y = \left(\dfrac{1}{2}-\ln 2\right)x + \ln 2$

b) on a $(T) : y = \left(\frac{1-2\ln 2}{2}\right)x + \ln 2$

et $A(1 ; \frac{1}{2})$

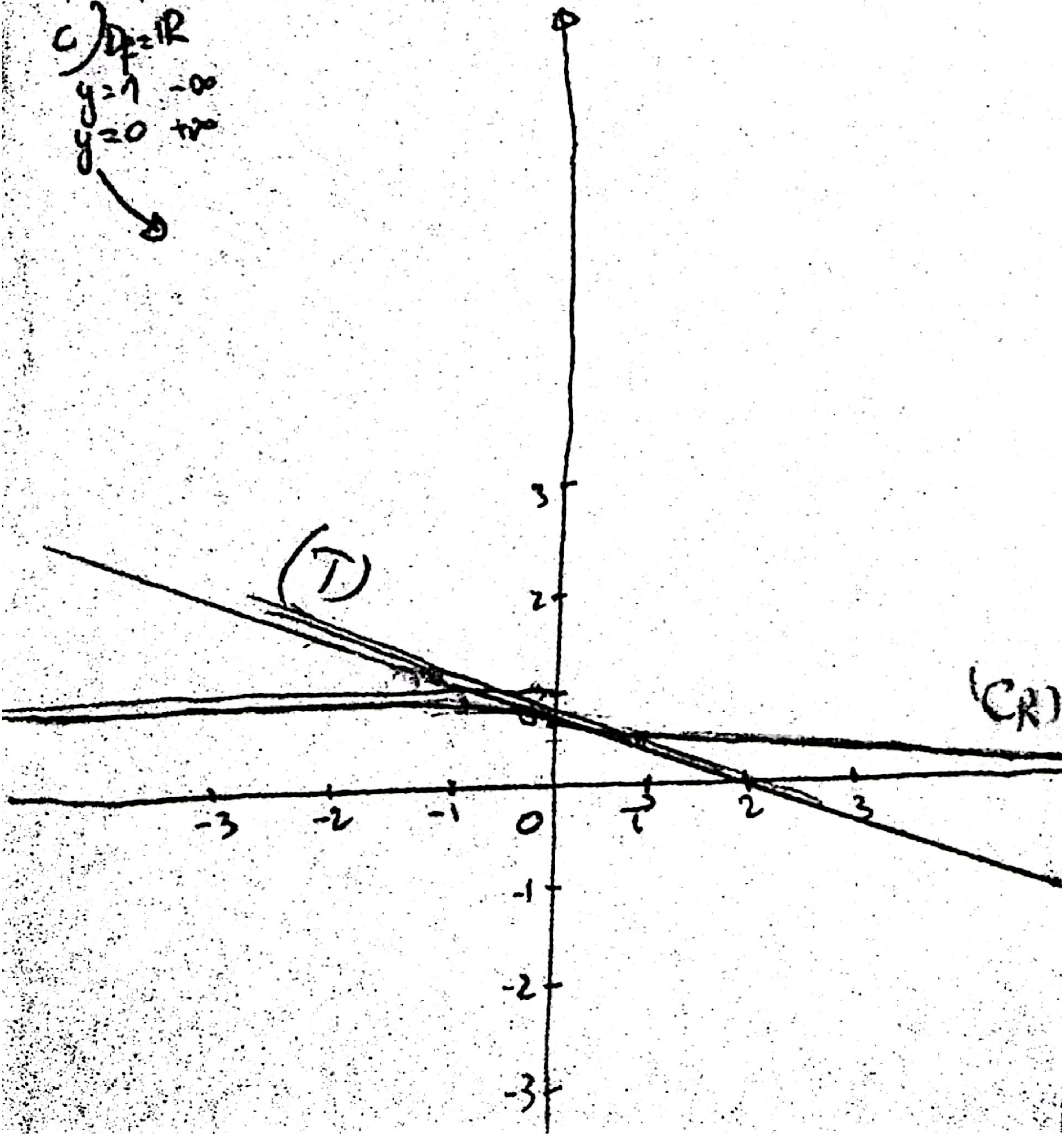
et $\frac{1-2\ln 2}{2} \times 1 + \ln 2 = \frac{1}{2} - \cancel{\ln 2} + \cancel{\ln 2} = \frac{1}{2}$

donc $A \in (T)$

c) $D_f = \mathbb{R}$

$y = 1$ $-\infty$

$y = 0$ $+\infty$



d) $\mathcal{A}_d = \int_0^d |f(x)|\,dx \,.\, u.a$

$= \int_0^d e^{-x} \ln(1+e^{x})\,dx \,.\, u.a$

$= \ln 2 - f(d) + \int_0^d \frac{1}{1+e^{x}}\,dx \,.\, u.a$

$= \ln 2 - f(d) + \ln 2 - \ln(1+e^{-d})$

$\mathcal{A}_d = 2\ln 2 - f(d) - \ln(1+e^{-d}) \,.\, u.a$

e) $\lim\limits_{d \to +\infty} \mathcal{A}_d = 2\ln 2$

car $\lim\limits_{d \to +\infty} - f(d) = 0$

$\lim\limits_{d \to +\infty} \ln(1+e^{-d}) = 0$ car $\lim\limits_{+\infty} e^{-d} = 0$

et $\ln(1) = 0$

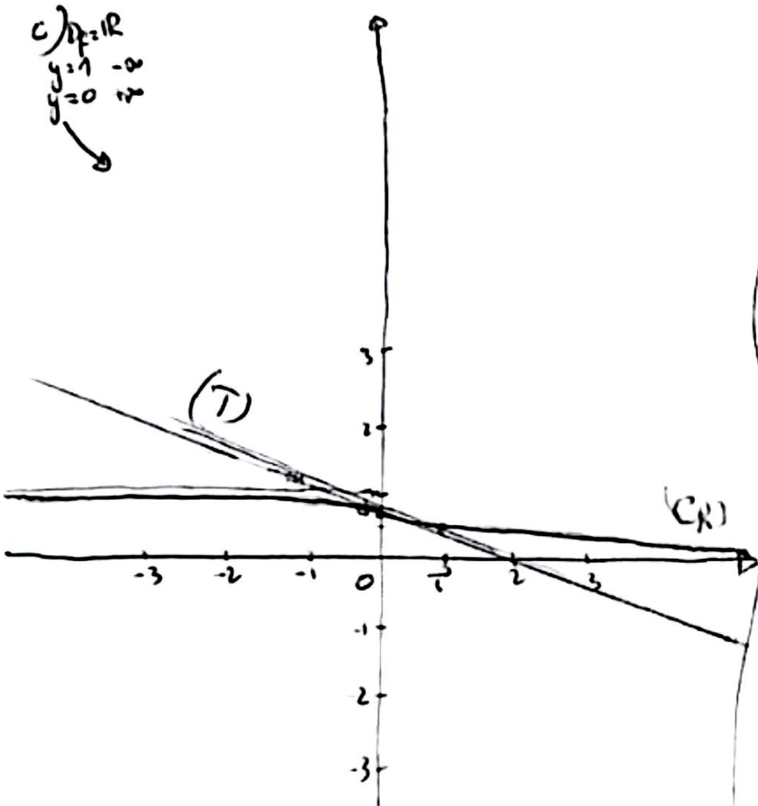
b) on a $(T) : y = \left(\frac{1-2\ln 2}{2}\right)x + \ln 2$

et $A\left(1 ; \frac{1}{2}\right)$

et $\frac{1-2\ln 2}{2} \times 1 + \ln 2 = \frac{1}{2} - \cancel{\ln 2} + \cancel{\ln 2} = \frac{1}{2}$

donc $A \in (T)$

c) $D_f = \mathbb{R}$
$y = 1 \quad -\infty$
$y = 0 \quad +\infty$



4) a)

on a $x \mapsto e^{-x}$ est continue sur $\mathbb{R}$
$x \mapsto \ln(1+e^x)$ est continue sur $\mathbb{R}$

donc f est continue sur $\mathbb{R}$

et on a f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

donc f admet une fonction réciproque f^{-1}

définie sur un intervalle J telle que :

$J = f(]-\infty ; +\infty[) = \left]\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{-\infty} f(x)\right[$
$=]0 ; 1[$

b) on a f est dérivable en 0

et $f'(0) = \frac{1}{2} - \ln 2 \neq 0$

donc f^{-1} est dérivable en $f(0) = \ln 2$

et on a $(f^{-1})'(\ln 2) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{\frac{1}{2} - \ln 2}$

5) a) Vérifions que $\frac{1}{1+e^x} = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$

on a $\frac{1}{1+e^x} = \frac{e^{-x}}{e^{-x}(1+e^x)} = \frac{e^{-x}}{e^{-x}+e^{-x}e^x}$

$= \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$

$= \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$

b) $\int_0^N \frac{1}{1+e^x}\,dx = \int_0^N \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx$

$= \int_0^N -\frac{(1+e^{-x})'}{1+e^{-x}}\,dx$

$= -\int_0^N \frac{(1+e^{-x})'}{(1+e^{-x})}\,dx$

$= -\left[\ln(1+e^{-x})\right]_0^N$

$= -\left(\ln(1+e^{-N}) - \ln 2\right)$

$\int_0^N \frac{1}{1+e^x}\,dx = \ln 2 - \ln(1+e^{-N})$

c)
$\int_0^N f(x)\,dx = \int_0^N e^{-x}\ln(1+e^x)\,dx$

$= \int_0^N \left(\frac{1}{1+e^x} - f'(x)\right)dx$

$= \int_0^N \frac{1}{1+e^x}\,dx - \int_0^N f'(x)\,dx$

$= \cancel{\ln 2 - \ln(1+e^{-N}) - [f(x)]_0^N}$

$= \cancel{\ln 2 - \ln(1+e^{-N}) - f(N) + \ln 2}$

$= \int_0^N \frac{1}{1+e^x}\,dx - [f(x)]_0^N$

$= \int_0^N \frac{1}{1+e^x}\,dx - f(N) + \ln 2$

$= \ln 2 - f(N) + \int_0^N \frac{1}{1+e^x}\,dx$