Correction de l'examen national de mathématiques SVT et PC 2024

Exercice N° 1.

1) a) Vérifions que $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+1} = 4 - \dfrac{6}{1+u_n}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_{n+1} = \frac{4u_n - 2}{1+u_n} = \frac{4u_n + 4 - 6}{1+u_n}$$

$$= \frac{4u_n + 4}{1+u_n} - \frac{6}{1+u_n}$$

$$= \frac{4\cancel{(u_n+1)}}{\cancel{1+u_n}} - \frac{6}{1+u_n}$$

$$\boxed{u_{n+1} = 4 - \frac{6}{1+u_n}}$$

b) Montrons par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N})\ 2 \leq u_n \leq 4$.

Pour $n = 0$, on a $u_0 = 4$ et $2 \leq 4 \leq 4$

alors la proposition est vraie pour $n = 0$

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $2 \leq u_n \leq 4$

et montrons que $2 \leq u_{n+1} \leq 4$.

D'après l'hypothèse de récurrence on a

$2 \leq u_n \leq 4 \Rightarrow 3 \leq 1 + u_n \leq 5$

$$\Rightarrow \frac{1}{5} \leq \frac{1}{1+u_n} \leq \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{6}{3} \leq -\frac{6}{1+u_n} \leq -\frac{6}{5}$$

$$\Rightarrow \quad -2 \leq \frac{-6}{1+u_n} \leq -\frac{6}{5}$$

$$\Rightarrow \quad 4-2 \leq 4-\frac{6}{1+u_n} \leq 4-\frac{6}{5}$$

$$\Rightarrow \quad 2 \leq u_{n+1} \leq \frac{14}{5}$$

$$\Rightarrow \quad 2 \leq u_{n+1} \leq 4.$$

Alors d'après le principe de récurrence on a

$$\boxed{(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 2 \leq u_n \leq 4}$$

2) a) Montrons que $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+1} - u_n = \dfrac{(u_n-1)(2-u_n)}{1+u_n}$

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{4u_n-2}{1+u_n} - u_n = \frac{4u_n-2}{1+u_n} - \frac{u_n(1+u_n)}{1+u_n}$$

$$= \frac{4u_n-2}{1+u_n} - \frac{u_n+u_n^2}{1+u_n}$$

$$= \frac{4u_n-2-u_n-u_n^2}{1+u_n} = \frac{-u_n^2+3u_n-2}{1+u_n} \quad (1)$$

D'autre part on a $(u_n-1)(2-u_n) = 2u_n - u_n^2 - 2 + u_n$

$$(u_n-1)(2-u_n) = -u_n^2+3u_n-2 \quad (2)$$

de (1) et (2) on dedut que

$$\boxed{(\forall n\in\mathbb{N}) \qquad u_{n+1}-u_n = \frac{(u_n-1)(2-u_n)}{1+u_n}}$$

b) Montrons que (u_n) est décroissante: Soit $n\in\mathbb{N}$.

D'après 2)a) on a $\quad u_{n+1}-u_n = \dfrac{(u_n-1)(2-u_n)}{1+u_n}$,

et d'après 1) b) on a $\quad 2 \leq u_n \leq 4$

$$2\leq u_n\leq 4 \Rightarrow \begin{cases} 1\leq u_n-1\leq 3 \\ -4\leq -u_n\leq -2 \\ 3\leq 1+u_n\leq 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_n-1>0 \\ 2-u_n\leq 0 \\ 1+u_n>0 \end{cases}$$

donc $\quad u_{n+1}-u_n \leq 0 \quad$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

alors (u_n) est décroissante.

En déduire que (u_n) est convergente.

La suite $(u_n)_n$ est décroissante et minorée par 2 alors elle est convergente.

3) a) Montrons que (v_n) est géométrique de raison $2/3$

Soit $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \dfrac{2-u_{n+1}}{1-u_n}$

$$= \frac{2 - \dfrac{4u_n-2}{1+u_n}}{1 - \dfrac{4u_n-2}{1+u_n}}$$

$$= \frac{\dfrac{2(1+u_n)-(4u_n-2)}{1+u_n}}{\dfrac{(1+u_n)-(4u_n-2)}{1+u_n}}$$

$$= \frac{2+2u_n-4u_n+2}{1+u_n-4u_n+2} = \frac{-2u_n+4}{-3u_n+3}$$

$$= \frac{2(2-u_n)}{3(1-u_n)} = \frac{2}{3}\left(\frac{2-u_n}{1-u_n}\right)$$

$$v_{n+1} = \frac{2}{3} v_n$$

alors $\boxed{(\forall n \in \mathbb{N}) \quad v_{n+1} = 2/3\, v_n}$ donc (v_n) est une suite géométique de raison $q = 2/3$

b) Montrons que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n = 1 + \dfrac{1}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}$.

On sait que (v_n) est géométrique de raison $q = 2/3$

et de premier terme $v_0 = \dfrac{2 - u_0}{1 - u_0} = \dfrac{-2}{-3} = \dfrac{2}{3}$

alors $(\forall n \in \mathbb{N})$ $v_n = v_0 \, q^n = \left(\dfrac{2}{3}\right)\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

$$v_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

D'autre part :

$$v_n = \frac{2 - u_n}{1 - u_n} \iff \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = \frac{2 - u_n}{1 - u_n}$$

$$\iff (1 - u_n)\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = 2 - u_n$$

$$\iff \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - u_n\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = 2 - u_n$$

$$\iff u_n - u_n\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = 2 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

$$\iff u_n\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) = 2 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

$$\iff u_n = \frac{2 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}$$

$$\iff u_n = \frac{1 + \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}} =$$

$$\iff \boxed{u_n = \frac{1}{1 - \left(2/3\right)^{n+1}} + 1}$$

2) Calculons $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

On a $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} 1 + \dfrac{1}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}$

$= \lim\limits_{n \to +\infty} 1 + \dfrac{1}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{n}}$

$= 2$

car $-1 < \frac{2}{3} < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^n} = 1$

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} 1 + \dfrac{1}{1 - \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n} = 2.$

Exercice N°2

1) Montrons que $2x-2y+z+3=0$ est une équation cartésienne du plan (P).

Soit $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ un point de l'espace.

$$M\begin{pmatrix}x\\y\\3\end{pmatrix} \in (P) \iff \overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0 \iff \begin{pmatrix}x+1\\y\\z+1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}=0$$

$$\iff 2(x+1)+(-2)y+1(z+1)=0$$

$$\iff 2x+2+2y+z+1=0$$

$$\iff 2x+2y+z+3=0$$

D'où $2x+2y+z+3=0$ est une équation cartésienne de (P).

2) Déterminons une équation cartésienne de la sphère (S).

Soit $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ un point de l'espace.

$$M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in (S) \iff (x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2+(z-z_\Omega)^2=R^2$$

$$\iff (x-2)^2+(y+1)^2+(z-0)^2=5^2$$

$$\iff x^2-4x+4+y^2+2y+1+z^2=25$$

$$\iff x^2+y^2+z^2-4x+2y-20=0$$

D'où le resultat.

3) a) Vérifions que $d((\Omega),(P)) = 3$

$$d(\Omega;(P)) = \frac{|2x_\Omega - 2y_\Omega + z_\Omega + 3|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}}$$

$$= \frac{|2\times 2 - 2\times(-1) + 0 + 3|}{\sqrt{9}} = \frac{9}{3}$$

$$d(\Omega;(P)) = 3$$

b) En déduire.

On a $d(\Omega;(P)) < 5$ alors le plan (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ) de rayon

$$r = \sqrt{R^2 - d(\Omega;(P))}$$

$$= \sqrt{5^2 - 3^2}$$

$$r = \sqrt{16} = 2$$

4) a) Déterminons une représentation paramétrique de (Δ).

(Δ) est la droite passant par Ω et perpendiculaire au (P) alors $\vec{n}$ est un vecteur directeur de (Δ).

D'où

$$(\Delta) : \begin{cases} x = 2t + x_\Omega \\ y = -2t + y_\Omega \\ z = 1t + z_\Omega \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \iff (\Delta) : \begin{cases} x = 2t + 2 \\ y = -2t - 1 \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

b) Montrons que $H(0;1;-1)$ est le centre de (Γ)

H est la projection orthogonale de Ω sur le plan (P).

alors

$$H \in (\Delta) \cap (P) \iff \begin{cases} 2x_H - 2y_H + z_H + 3 = 0 \\ x_H = 2t+2 \\ y_H = -2t-1 \\ z_H = t \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2(2t+2) - 2(-2t-1) + t + 3 = 0 \\ x_H = 2t+2 \\ y_H = -2t-1 \\ z_H = t \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 4t+4+4t+2+t+3 = 0 \\ x_H = 2t+2 \\ y_H = -2t-1 \\ z_H = t \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 9t+9 = 0 \\ x_H = 2t+2 \\ y_H = -2t-1 \\ z_H = t \end{cases} \iff \begin{cases} t = -1 \\ x_H = 2t+2 \\ y_H = -2t-1 \\ z_H = t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_H = 2(-1)+2 \\ y_H = -2(-1)-1 \\ z_H = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_H = 0 \\ y_H = 1 \\ z_H = -1 \end{cases}$$

d'où $H \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

c) Montrons que (Δ) est une médiatrice du segment $[AB]$.

On a $2x_B - 2y_B + z_B + 3 = 2\times 1 - 2\times 2 + (-1) + 3 = 0$

alors $B \in (P)$.

et puisque $A \in (P)$ donc $[AB] \subset (P)$

De plus H est le milieu du segment $[AB]$, en effet:

$$\begin{cases} \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{-1+(1)}{2} = 0 = x_H \\ \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{0+2}{2} = 1 = y_H \\ \dfrac{z_A + z_B}{2} = \dfrac{(-1)+(-1)}{2} = -1 = z_H . \end{cases} \quad (1)$$

et puisque (Δ) est perpendiculaire au plan (P) donc (Δ) est perpendiculaire à (AB) au point H. (2)

Alors de (1) et (2) on déduit que (Δ) est une médiatrice de $[AB]$.

Exercice N° 3.

1) Vérifions que $|a| = \sqrt{6}$ et $\arg(a) \equiv -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

On a $|a| = |\sqrt{3}(1-i)| = |\sqrt{3}|\,|1-i|$

$= \sqrt{3} \times \sqrt{1^2+(-1)^2}$

$= \sqrt{3} \times \sqrt{2}$

$|a| = \sqrt{6}$

$\arg(a) \equiv \arg\left(\sqrt{3}\,(1-i)\right)\ [2\pi]$

$\equiv \arg(\sqrt{3}) + \arg(1-i)\ [2\pi]$

$\equiv 0 + \left(-\frac{\pi}{4}\right)\ [2\pi]$

$\equiv -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

2) a) Montrons que $\frac{b}{a} = \frac{3+\sqrt{3}}{6} + \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)i$

$$\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}(1-i)}{2+\sqrt{3}+i} = \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{3}i)(2+\sqrt{3}-i)}{(2+\sqrt{3}+i)(2+\sqrt{3}-i)}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}+\sqrt{3}^2-\sqrt{3}i-2\sqrt{3}i-\sqrt{3}^2i+\sqrt{3}i^2}{(2+\sqrt{3})^2-i^2}$$

$=$

2) a) Montrons que $\frac{b}{a} = \frac{3+\sqrt{3}}{6} + \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)i$

$$\frac{b}{a} = \frac{2+\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}\,(1-i)} = \frac{(2+\sqrt{3}+i)(1+i)}{\sqrt{3}\,(1-i)(1+i)}$$

$$= \frac{2+\sqrt{3}+i+2i+\sqrt{3}\,i+i^2}{\sqrt{3}\times(1^2-i^2)}$$

$$= \frac{2+\sqrt{3}+i+2i+\sqrt{3}\,i-1}{\sqrt{3}\times 2}$$

$$= \frac{1+\sqrt{3}+(3+\sqrt{3})i}{2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} + \left(\frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\right)i$$

$$\frac{b}{a} = \frac{3+\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{3}+1}{2}\,i$$

a) Vérifions que $\frac{b}{a} = \frac{3+\sqrt{3}}{3}\,e^{i\pi/3}$

On a

$$\frac{3+\sqrt{3}}{3}\,e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{3+\sqrt{3}}{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$= \frac{3+\sqrt{3}}{3}\left(\frac{1}{2}+i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3+\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)i$$

$$= \frac{3+\sqrt{3}}{6} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}\,i = \frac{b}{a}.$$

b) En déduire la forme trigonométrique de b.

On a $\frac{b}{a} = \frac{3+\sqrt{3}}{3} e^{i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow b = \frac{3+\sqrt{3}}{3} a\, e^{i\frac{\pi}{3}}$

donc $|b| = \left| \frac{3+\sqrt{3}}{3} a\, e^{i\pi/3} \right| = \left|\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right| \times |a| \times |e^{i\pi/3}|$

$= \frac{3+\sqrt{3}}{3} \times \sqrt{6} \times 1$

$= \frac{3\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{3} = \sqrt{6}+\sqrt{2}$

et $\arg(b) \equiv \arg\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3} a\, e^{i\pi/3}\right) [2\pi]$

$\equiv \arg\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right) + \arg(a) + \arg\left(e^{i\pi/3}\right) [2\pi]$

$\equiv 0 + \left(-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{3} [2\pi]$

$\equiv \frac{\pi}{12} [2\pi]$

donc

$$b = (\sqrt{6}+\sqrt{2})\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right).$$

b) vérifions que $b^{24} \in \mathbb{R}$

$\arg(b^{24}) \equiv 24 \arg(b) [2\pi]$

$\equiv 24 \times \frac{\pi}{12} [2\pi]$

$\equiv 2\pi [2\pi]$

$\equiv 0 [2\pi]$

D'où $b^{24} \in \mathbb{R}$.

3) a) Vérifions que $z' = \frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)z$

$$\mathcal{R}(M) = M' \iff \begin{cases} OM' = OM \\ (\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi] \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} |z'| = |z| \\ \arg\left(\frac{z'}{z}\right) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]. \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \left|\frac{z'}{z}\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z'}{z}\right) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]. \end{cases}$$

$$\iff \frac{z'}{z} = 1\, e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$\iff z' = e^{i\pi/6} z$$

$$\iff z' = \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) z$$

$$\iff z' = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{1}{2}\right)\right) z$$

$$\iff z' = \frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)z.$$

a) Vérifions que $\arg(a') \equiv \frac{-\pi}{12}\ [2\pi]$.

$$\mathcal{R}(A) = A' \Rightarrow a' = e^{i\pi/6} a$$

$$\Rightarrow \arg(a') \equiv \arg\left(e^{i\pi/6} a\right)\ [2\pi]$$

$$\Rightarrow \arg(a') \equiv \arg\left(e^{i\pi/6}\right) + \arg(a)\ [2\pi]$$

$$\Rightarrow \arg(a') \equiv \pi/6 + (-\pi/4)\ [2\pi].$$

$\arg(a') \equiv -\frac{\pi}{12} \; [2\pi]$

b) Montrons que $a'' = \sqrt{6}\, e^{i\frac{\pi}{12}}$

$R(A') = A'' \iff a'' = e^{i\pi/6} a'$

$\iff a'' = e^{i\pi/6}\left(\sqrt{6}\, e^{-i\frac{\pi}{12}}\right)$

$\iff a'' = \sqrt{6}\, e^{i(\pi/6 - \pi/12)}$

$\iff a'' = \sqrt{6}\, e^{i\pi/12}$

En dédue que O, A'' et B sont alignés.

On a $\frac{b-0}{a''-0} = \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})\, e^{i\pi/12}}{\sqrt{6}\, e^{i\pi/12}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}} \in \mathbb{R}$

alors O, A'' et B sont alignés.

c) Montrons que $b' = \left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)\overline{a}$

$R(B) = B' \iff b' = b\, e^{i\pi/6}$

$\iff b' = \left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right) a\, e^{i\pi/3}\, e^{i\pi/6}$

$\iff b' = \left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right) \times \sqrt{6}\, e^{-i\pi/4}\, e^{i\pi/3}\, e^{i\pi/6}$

$\iff b' = \left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right) \times \sqrt{6}\, e^{i\pi/4}$

$\iff b' = \left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right) \overline{\left(\sqrt{6}\, e^{-i\pi/4}\right)}$

$\iff b' = \left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right) \overline{a}$

d) En déduire que OAB' est rectangle en O.

$$\frac{b'-0}{a-0} = \left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\,\bar{a}\right) \div a = \left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)\frac{\bar{a}}{a}$$

donc $\overline{(\overrightarrow{OA}\,;\,\overrightarrow{OB'})} \equiv \arg\left(\frac{b'-0}{a-0}\right)\ [2\pi]$

$$\equiv \arg\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\,\frac{\bar{a}}{a}\right)\ [2\pi]$$

$$\equiv \arg\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right) + \arg\left(\frac{\bar{a}}{a}\right)\ [2\pi]$$

$$\equiv \arg(\bar{a}) - \arg(a)\ [2\pi]$$

$$\equiv -\arg(a) - \arg(a)\ [2\pi]$$

$$\equiv -\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\ [2\pi]$$

$$\equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$$

d'où OAB' est rectangle en O.

Exercice N° 4.

1) Montrons que $p(A) = 1/3$.

Le tirage est simultané, alors chaque tirage est une combinaison de 2 éléments parmi 7.

Donc le nombre de résultats possibles est $C_7^2 = 21 = Card(\Omega)$

Réaliser l'événement A, c'est tirer deux boules portant le numéro 1 (pris parmi 4) ou deux boules portant le numéro 2, donc

$$Card(A) = C_4^2 + C_2^2 = 7$$

Or les boules sont indiscernables au toucher et le tirage est au hazard donc

$$p(A) = \frac{Card(A)}{card(\Omega)} = \frac{7}{21} = \frac{1}{3}$$

2) Montrons que $p(B) = \frac{5}{21}$.

Réaliser l'événement B c'est tirer deux boules portant le numéro 2 ou tirer une boule portant 1 et l'autre portant le numéro 3.

donc $$Card(B) = C_2^2 + C_4^1 \times C_1^1 = 5$$

alors $$p(B) = \frac{Card(B)}{card(\Omega)} = \frac{5}{21}.$$

3) Calculons $p(A \cap B)$

L'évènement $A \cap B$ c'est « Les deux boules tirées portant le même numéro et la somme des numéros est 4 »

Réaliser $A \cap B$ c'est obtenir deux boules portant le chiffre 2

donc $Card(A \cap B) = C_2^2 = 1$

D'où $p(A \cap B) = \dfrac{Card(A \cap B)}{Card(\Omega)} = \dfrac{1}{21}$.

4) L'indépendance de A et B.

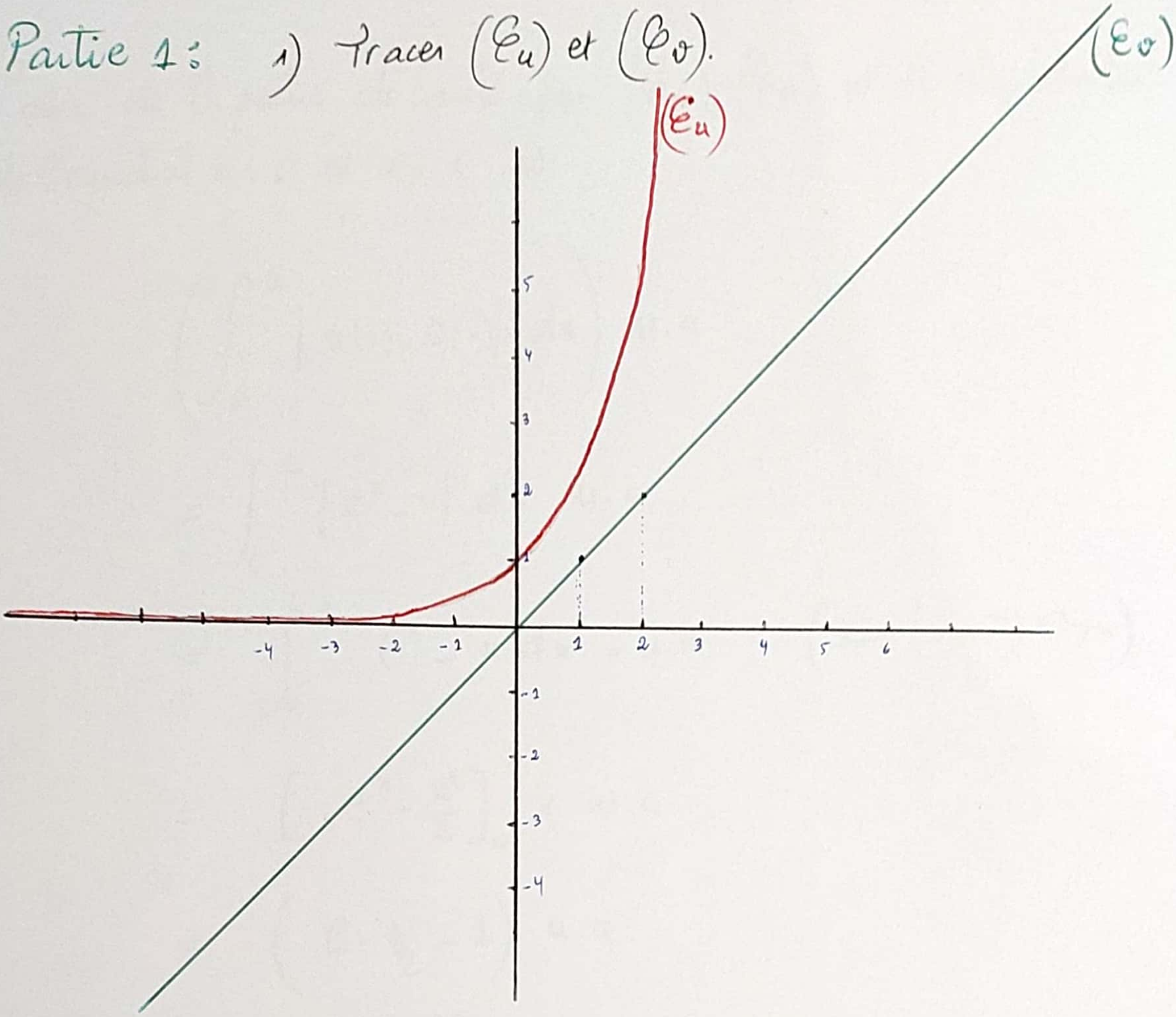
A et B ne sont pas indépendants, car

$p(A) \times p(B) = \frac{1}{3} \times \frac{5}{21} = \frac{5}{63}$

et $p(A \cap B) \neq \frac{5}{63}$.

Problème :

Partie 1 : 1) Tracer $(\mathcal{C}_u)$ et $(\mathcal{C}_v)$.



2) Justifions graphiquement que $(\forall x \in \mathbb{R})\ e^x - x > 0$

On remarque graphiquement que la courbe $(\mathcal{C}_u)$ se trouve en dessus de $(\mathcal{C}_v)$ strictement, alors $(\forall x \in \mathbb{R})\ u(x) > v(x)$

autrement dit $(\forall x \in \mathbb{R})\ e^x > x$

donc $(\forall x \in \mathbb{R})\ e^x - x > 0$.

3) L'aire.

L'aire de la partie délimité par $(\mathcal{C}_u)$, $(\mathcal{C}_v)$ et les deux droites de l'equation $x=0$ et $x=1$ est

$$\left(\int_0^1 |u(x)-v(x)|\,dx\right) u.a$$

$$= \int_0^1 |e^x - x|\,dx \quad u.a$$

$$= \int_0^1 e^x - x\,dx \cdot u.a \qquad (\text{car } (\forall x\in\mathbb{R})\ e^x > x)$$

$$= \left[e^x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 \times u.a$$

$$= \left(e - \frac{1}{2} - 1\right) u.a$$

$$= \left(e - 3/2\right) u.a.$$

Où $u.a$ est l'unité d'aire.

Partie II.

1) a) Vérifions que $D_f = \mathbb{R}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} ;\ e^x - x > 0\}$

or d'après ce qui precede on a $(\forall x \in \mathbb{R})\ e^x - x > 0$

donc $D_f = \mathbb{R}$.

b) Montrons que $(\forall x \in \mathbb{R})$ $f(x) = 1 - \ln(1 - xe^{-x})$.

Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = x + 1 - \ln(e^x - x) = x + 1 - \ln\left(e^x\left(1 - \frac{x}{e^x}\right)\right)$$

$$= x + 1 - \left(\ln(e^x) + \ln(1 - xe^{-x})\right)$$

$$= x + 1 - x - \ln(1 - xe^{-x})$$

$$= 1 - \ln(1 - xe^{-x})$$

D'où le resultat

c) En deduire que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$

On a $\lim_{x \to +\infty} xe^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x}} = 0$

car $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

donc $\lim_{x \to +\infty} 1 - xe^{-x} = 1 \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \ln(1 - xe^{-x}) = \ln(1) = 0$

D'où $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 1 - \ln(1 - xe^{-x}) = 1$.

c) Interpretation :

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$ alors $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote horizontale de l'équation $y = 1$ au voisinnage de $+\infty$.

2) a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

On a $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} e^x - x = +\infty$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} \ln(e^x - x) = +\infty$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} -\ln(e^x - x) = -\infty$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} x + 1 - \ln(e^x - x) = -\infty$

D'où $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

b) Vérifions que $(\forall x < 0)\ f(x) = x + 1 - \ln(-x) - \ln\left(1 - \dfrac{1}{xe^{-x}}\right)$

Soit $x < 0$;

$x + 1 - \ln(-x) - \ln\left(1 - \dfrac{1}{xe^{-x}}\right) = x + 1 - \left(\ln(-x) + \ln\left(1 - \dfrac{1}{xe^{-x}}\right)\right)$

$= x + 1 - \ln\left(-x\left(1 - \dfrac{1}{xe^{-x}}\right)\right)$

$= x + 1 - \ln\left(-x + \dfrac{1}{e^{-x}}\right) = x + 1 - \ln(-x + e^x)$

$= f(x)$.

c) Calculons $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x+1 - \ln(-x) - \ln\left(1 - \frac{1}{xe^{-x}}\right)}{x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x} + \frac{1}{x} - \frac{\ln(-x)}{x} - \frac{\ln\left(1 - \frac{1}{xe^{-x}}\right)}{x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} 1 + \frac{1}{x} + \frac{\ln(-x)}{-x} - \frac{\ln\left(1 - \frac{1}{xe^{-x}}\right)}{x}$$

On a $\lim_{x \to -\infty} xe^{-x} = +\infty \Rightarrow \lim_{x \to -\infty} 1 - \frac{1}{xe^{-x}} = 1$

$$\Rightarrow \lim_{x \to -\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{xe^{-x}}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x \to -\infty} \frac{\ln\left(1 - \frac{1}{xe^{-x}}\right)}{x} = 0}$$

De plus on pose $t = -x$, lorsque $x \to -\infty$ on a $t \to +\infty$

et $\boxed{\lim_{x \to -\infty} \frac{\ln(-x)}{-x} = \lim_{t \to +\infty} \frac{\ln(t)}{t} = 0}$

et on sait que $\boxed{\lim_{x \to -\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1}$

d'où $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1.$

On déduit que $(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction la droite de l'équation $y = x$ au voisinage de $-\infty$.

On a $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x \to -\infty} x + 1 - \ln(e^x - x) - x$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} 1 - \ln(e^x - x)$

$= -\infty$

car $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x - x = +\infty$

d'où (C_f) admet une branche parabolique de direction la droite de l'equation $y = x$ au voisinnage de $-\infty$.

3) a) Montrons que $(\forall x \in \mathbb{R})$ $f'(x) = \frac{1-x}{e^x - x}$

On a f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$. on a

$f'(x) = \left(x + 1 - \ln(e^x - x)\right)'$

$= 1 + 0 - \frac{(e^x - x)'}{e^x - x} = 1 - \frac{e^x - 1}{e^x - x}$

$= \frac{e^x - x - e^x + 1}{e^x - x} = \frac{1-x}{e^x - x}$

D'où le resultat..

b) Déterminons le signe de $f'(x)$

On a $(\forall x \in \mathbb{R})$ $f'(x) = \dfrac{1-x}{e^x - x}$, et d'après ce qui précède on a

$(\forall x \in \mathbb{R})$ $e^x - x > 0$ alors le signe de $f'(x)$ est le signe de $1-x$

sur $\mathbb{R}$; d'où

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$1-x$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$1-\ln\left(1-\frac{1}{e}\right)$	$\searrow$	1

c) Montrons que $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $]-1;0[$

On a f est dérivable sur $[-1;0]$ alors f est continue sur $[-1;0]$.

de plus f est strictement croissante sur $[-1;0]$

et $f(0) \times f(-1) = \left(-\ln\left(1+\frac{1}{e}\right)\right) \times 1 < 0$

alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $]-1;0[$.

4) a) La courbe $(\mathcal{C}_f)$ coupe la courbe $(\mathcal{C}_\sigma)$ en deux points distincts, alors l'équation $f(x) = \sigma(x)$ admet deux solutions α et β autrement l'équation $f(x) = x$ admet deux solutions α et β.

b) Montrons que $e^{\alpha} - e^{\beta} = \alpha - \beta$

On a $f(\alpha) = \alpha \Leftrightarrow \alpha + 1 - \ln(e^{\alpha} - \alpha) = \alpha$

$\Leftrightarrow \quad -\ln(e^{\alpha} - \alpha) = -1$

$\Leftrightarrow \quad \ln(e^{\alpha} - \alpha) = 1$

$\Leftrightarrow \quad e^{\alpha} - \alpha = e$

De même

$f(\beta) = \beta \Leftrightarrow e^{\beta} - \beta = e$

D'où $\quad e^{\alpha} - \alpha = e^{\beta} - \beta$

donc $\quad e^{\alpha} - e^{\beta} = \alpha - \beta$

5) a) Montrons que g admet une fonction réciproque g^{-1}

→ g est la restriction d'une fonction continue sur $]-\infty, 1]$

alors g est continue sur $]-\infty; 1]$.

→ f est strictement croissante sur $]-\infty; 1]$ alors g est strictement croissante sur $]-\infty; 1]$.

alors g admet une fonction réciproque définie sur.

$J = g(]-\infty; 1]) = f(]-\infty; 1])$

$=]\lim_{x \to -\infty} f(x); f(1)]$

$=]-\infty; 1 - \ln(1 - \frac{1}{e})]$

b) vérifions que g^{-1} est dérivable en 1 et calculons $(g^{-1})'(1)$

On remarque que $g(0) = f(0) = 1 \Leftrightarrow g^{-1}(1) = 0$

On a g est dérivable en 0 (car f est dérivable en 0) et

$g'(0) = f'(0) = \frac{1}{e^0} = 1 \neq 0$

alors g^{-1} est dérivable en $g(0) = 1$ et

$$(g^{-1})'(1) = (g^{-1})'(g(0)) = \frac{1}{g'(0)} = \frac{1}{1} = 1$$