**تصحيح الامتحان الوطني – بكالوريا 2023 ، الدورة العادية - لمادة الرياضيات ، شعبة العلوم التجريبيبة – خيار فرنسي وعربي**

**الأستاذ: محمد روجان.**

## التمرين الأول (3 ن)

- نعتبر النقط $A(0,1,4)$ و $B(2,1,2)$ و $C(2,5,0)$ و $\Omega(3,4,4)$

1) أ) لنبين أن $\vec{AB}\wedge\vec{AC}=4(2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k})$ (0,25)

لدينا $\vec{AB}(2,0,-2)$ و $\vec{AC}(2,4,-4)$

إذن

$$\vec{AB}\wedge\vec{AC}=\begin{vmatrix}0 & 4\\ -2 & -4\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}2 & 2\\ -2 & -4\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}2 & 2\\ 0 & 4\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=8\vec{i}+4\vec{j}+8\vec{k}$$

$$=4(2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k})$$

ومنه $\boxed{\vec{AB}\wedge\vec{AC}=4(2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k})}$

ب)

× لنستنتج مساحة المثلث ABC (0,25)

× نعلم أن $S_{ABC}=\frac{1}{2}\|\vec{AB}\wedge\vec{AC}\|$



ولدينا

$$\|\vec{AB}\wedge\vec{AC}\|=\sqrt{8^2+4^2+8^2}=\sqrt{144}=12$$

إذن $\boxed{S_{ABC}=\frac{1}{2}\times 12=6}$

× لنستنتج المسافة $d(B,(AC))$ (0,25)

لدينا $\vec{AC}$ متجهة موجهة للمستقيم $(AC)$ و $A$ نقطة تنتمي إلى $(AC)$

إذن

$$d(B,(AC))=\frac{\|\vec{AB}\wedge\vec{AC}\|}{\|\vec{AC}\|}=\frac{12}{\sqrt{4+16+16}}=\frac{12}{6}=2$$



2) أ) لنتحقق أن $\vec{D\Omega}=\frac{1}{4}(\vec{AB}\wedge\vec{AC})$ (0,25)

لدينا D منتصف القطعة $[AC]$

إذن $D(1,3,2)$

أي

$$\vec{D\Omega}=2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}=\frac{1}{4}\times 4(2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k})=\frac{1}{4}\vec{AB}\wedge\vec{AC}$$

ب) لنستنتج أن $d(\Omega,(ABC))=3$ (0,5)

لدينا $\vec{D\Omega}$ و $\vec{AB}\wedge\vec{AC}$ مستقيميتان

إذن $\vec{D\Omega}$ منظمية على المستوى $(ABC)$

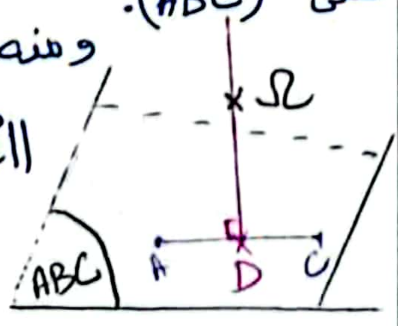
يعني أن المستقيم $(D\Omega)$ عمودي على $(ABC)$

و بما أن $D\in(ABC)$ لأن $D\in(AC)$ (D منتصف $[AC]$)

فإن D هي المسقط العمودي ل $\Omega$ على $(ABC)$.

ومنه $d(\Omega,(ABC))=\Omega D$

$$\Omega D=\frac{1}{4}\|\vec{AB}\wedge\vec{AC}\|=\frac{1}{4}\times 12=3$$



3)

لتكن (S) فلكة ذات المعادلة

$$x^2+y^2+z^2-6x-8y-8z+32=0$$

أ) لنحدد مركز وشعاع الفلكة (S) (0,5)



$$x^2+y^2+z^2-6x-8y-8z+32=0$$

$$\Rightarrow x^2-6x+y^2-8y+z^2-8z+32=0$$

$$\Rightarrow x^2-6x+9+y^2-8y+16+z^2-8z+16=9$$

$$\Rightarrow (x-3)^2+(y-4)^2+(z-4)^2=3^2$$

إذن مركز الفلكة هو $\Omega(3,4,4)$

وشعاعها $R=3$



ب) لنبين أن (ABC) مماس للفلكة (S) (0,25)

- لدينا $d(\Omega,(ABC))=3=R$

إذن المستوى (ABC) مماسا للفلكة (S) في نقطة وحيدة H

* لنحدد نقطة التماس بين (ABC) و (S) (0,25)

* الطريقة الأولى:

- النقطة H هي تقاطع المستوى (ABC) والمستقيم (ΩH) ، يعني أن H هي المسقط العمودي لـ Ω على (ABC)

ومنه H هي النقطة D (س 2 - ب)

إذن المستوى (ABC) مماس للفلكة (S) في النقطة $D(1,3,2)$

* الطريقة الثانية

- $\vec{\Omega H}$ متجهة منظمية على (ABC)

إذن $\vec{\Omega H}=t(\vec{AB}\wedge\vec{AC})$ مع $t\in\mathbb{R}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_H=3+2t \\ y_H=4+t \\ z_H=4+2t \end{cases} \quad (1)$$

وبتعويض العلاقة (1) في المعادلة الديكارتية للمستوى (ABC) أو المعادلة الديكارتية للفلكة (S) ، بحيث H تحققهما معا نجد $\boxed{t=-1}$

ومنه نجد H هي D / $D(1,3,2)$

ج) لنحدد معادلة ديكارتية لكل من $(Q_1)$ و $(Q_2)$ (0,5)

- لدينا $(Q_1)$ يوازي (ABC)

و $(Q_2)$ يوازي (ABC)

إذن (ABC) و $(Q_1)$ و $(Q_2)$ لهم نفس المتجهة المنظمية $\vec{n}(2,1,2)$

ومنه
$$\begin{cases} (Q_1): 2x+y+2z+d_1=0 \\ (Q_2): 2x+y+2z+d_2=0 \end{cases}$$

وبما أن $(Q_1)$ و $(Q_2)$ يقطعان (ABC) وفق دائرة شعاعها $\sqrt{5}$ فإن

$$\sqrt{5}=\sqrt{R^2-d^2(\Omega,(Q))}$$

$$\Rightarrow d(\Omega,Q)=\sqrt{9-5}=2$$

$$\Rightarrow d(\Omega,(Q_1))=d(\Omega,(Q_2))=2=\frac{|2x_\Omega+y_\Omega+2z_\Omega+d|}{3}$$

$$\Rightarrow |2\times3+4+2\times4+d|=6$$

$$\Rightarrow |18+d|=6 \Rightarrow \begin{cases} 18+d=6 \\ 18+d=-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d=-12 \\ d=-24 \end{cases}$$

وبالتالي

$(Q_1): 2x+y+2z-12=0$ و

$(Q_2): 2x+y+2z-24=0$

## التمرين الثاني (3ن)

- نعتبر $a=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ ; $b=1+\sqrt{2}+i$

و $c=\bar{b}=1+\sqrt{2}-i$ و $d=2i$

1) لنكتب العدد العقدي $a$ على الشكل المثلثي (0,25)

× معيار العدد $a$ هو

$|a|=\sqrt{\sqrt{2}^2+\sqrt{2}^2}=2$

إذن $a=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$=2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$=\left[2,\frac{\pi}{4}\right]$

2) أ) لنتحقق أن $b-d=c$ (0,25)

$\times\ b-d=1+\sqrt{2}+i-2i$

$=1+\sqrt{2}-i$

$=\bar{b}$

$=c$

ب) لنبين أن $(\sqrt{2}+1)(b-a)=b-d$ (0,25)

$\times\ (\sqrt{2}+1)(b-a)=(\sqrt{2}+1)(1+\sqrt{2}+i-\sqrt{2}-i\sqrt{2})$

$=(\sqrt{2}+1)(1+i-i\sqrt{2})$

$=\sqrt{2}+i\sqrt{2}-2i+1+i-i\sqrt{2}$

$=\sqrt{2}+1-i$

$=c$

ومنه $\boxed{(\sqrt{2}+1)(b-a)=b-d}$

× لنستنتج أن النقط $A$ و $B$ و $D$ مستقيمية (0,25)

- لدينا $(\sqrt{2}+1)(b-a)=b-d$

$\Rightarrow \frac{b-d}{b-a}=\sqrt{2}+1$

محمد روجان
أستاذ الثانوي التأهيلي
مادة الرياضيات

وبما أن $(\sqrt{2}+1)\in\mathbb{R}$ فإن النقط $A(a)$ و $B(b)$ و $D(d)$ نقط مستقيمية.

3) أ- لنتحقق أن $ac=2b$ (0,25)

$\times\ ac=(\sqrt{2}+i\sqrt{2})\times(1+\sqrt{2}-i)$

$=\sqrt{2}+2-i\sqrt{2}+i\sqrt{2}+2i+\sqrt{2}$

$=2\sqrt{2}+2+2i$

$=2((\sqrt{2}+1)+i)$

$=2b$

ومنه $\boxed{ac=2b}$

محمد روجان
أستاذ الثانوي التأهيلي
مادة الرياضيات

ب) لنستنتج أن $2\arg(b)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$ (0,5)

× لدينا $ac=2b$

$\Rightarrow \arg(ac)=\arg(2b)$

$\Rightarrow \arg(a)+\arg(c)=\arg(2)+\arg(b)$

$\Rightarrow \arg(a)+\arg(\bar{b})=0+\arg(b)$

$\Rightarrow \arg(a)-\arg(b)=\arg(b)$

$\Rightarrow 2\arg(b)=\arg(a)$

ولدينا من السؤال ① $\arg(a)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$

إذن $\boxed{2\arg(b)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]}$

تصحيح الامتحان الوطني – بكالوريا 2023 ، الدورة العادية - لمادة الرياضيات ، شعبة العلوم التجريبية – خيار فرنسي وعربي

الأستاذ: محمد روجان.

4) نعتبر $M(z)$ ; $M'(z')$ و $O(0)$

أ) لنبين أن $z' = \frac{1}{2} a z$ (0,25)

محمد روجان
أستاذ الثانوي التأهيلي
مادة الرياضيات

نعلم أن التمثيل العقدي للدوران هو

$$z' - w = e^{i\theta}(z - w)$$

حيث $w$ هو مركز هذا الدوران و $\theta$ عمدته، إذن

$$z' - 0 = e^{i\frac{\pi}{4}}(z - 0)$$

$$\Rightarrow z' = \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) z$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) z$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{(\sqrt{2} + i\sqrt{2})}_{a} z$$

ومنه $z' = \frac{1}{2} a z$

ب) لنستنتج أن $R(C) = B$ (0,25) و $R(A) = D$ (0,25)

* نعتبر $c'$ هو لحق صورة النقطة $C$ و $a'$ هو لحق صورة النقطة $A$.

لدينا

$$c' = \frac{1}{2} a c$$

$$= \frac{1}{2} \times 2b \quad (\text{لأن } ac = 2b)$$

$$= b$$

إذن $c' = b$ أي $R(C) = B$

* $R(A) = A' \Leftrightarrow a' = \frac{1}{2} a \times a$

$$= \frac{1}{2}(\sqrt{2} + i\sqrt{2})^2$$

$$= \frac{1}{2}(2 + 4i + (2i)^2)$$

$$\Leftrightarrow a' = \frac{1}{2}(2 + 4i - 2)$$

$$= \frac{1}{2} \times 4i$$

$$= 2i$$

$$= d$$

ومنه $R(A) = D$

ج) لنبين أن (0,25) $\frac{b-a}{c-a} = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right) a$

* $$\frac{b-a}{c-a} = \frac{1+\sqrt{2}+i-\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}-i-\sqrt{2}-i\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1 + i - i\sqrt{2}}{1 - i - i\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1 + i(1-\sqrt{2})}{1 - i(1+\sqrt{2})}$$

$$= \frac{(1 + i(1-\sqrt{2}))(1 + i(1+\sqrt{2}))}{(1 - i(1+\sqrt{2}))(1 + i(1+\sqrt{2}))}$$

$$= \frac{1 + i(1+\sqrt{2}) + i(1-\sqrt{2}) + i^2(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})}{1^2 - (i(1+\sqrt{2}))^2}$$

$$= \frac{1 + i + i\sqrt{2} + i - i\sqrt{2} - 1(1-2)}{1 + 1 + 2\sqrt{2} + 2}$$

محمد روجان
أستاذ الثانوي التأهيلي
مادة الرياضيات

$$= \frac{1 + 2i + 1}{4 + 2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1+i}{2+\sqrt{2}} = \frac{(1+i)(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}$$

$$= \frac{2 + 2i - \sqrt{2} - \sqrt{2}i}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1) + i\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{2}$$

$$= \frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2} + i\sqrt{2})}{2}$$

ومنه $\frac{b-a}{c-a} = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right) a$

تصحيح الامتحان الوطني – بكالوريا 2023 ، الدورة العادية - لمادة الرياضيات ، شعبة العلوم التجريبية – خيار فرنسي وعربي

الأستاذ: محمد روجان.

* لنستنتج قياسا للزاوية $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$ (0,25)

لدينا $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) \equiv \arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) [2\pi]$

$$\equiv \arg\left(\frac{b-a}{c-a}\right) [2\pi]$$

$$\equiv \arg\left(\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)a\right) [2\pi]$$

$$\equiv \arg\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right) + \arg(a) [2\pi]$$

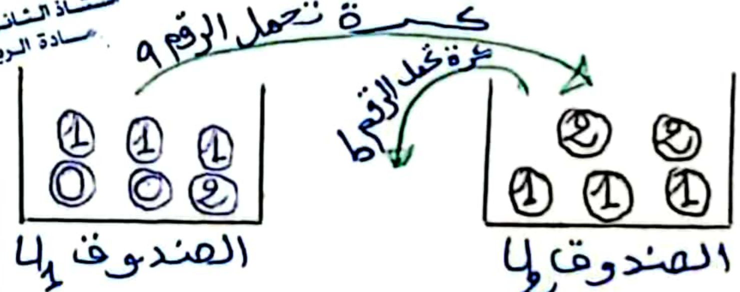
$$\equiv 0 + \arg(a) [2\pi]$$

لأن $\frac{\sqrt{2}-1}{2} > 0$

$\Rightarrow (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) \equiv \arg(a) [2\pi]$

ومنه $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$

## التمرين الثالث (3 ن)




* في هذا التمرين نوع السحب غير مهم باعتبارنا نسحب كرة واحدة، ومنه يمكن استعمال السحب الآني $C_n^p$ أو السحب بالتتابع وبدون إحلال $A_n^p$ أو السحب بالتتابع وبإحلال $n^p$، أو استعمال نسبة الكرات المراد سحبها مباشرة.

1) أ) لنحسب $P(A)$ احتمال الحدث A (0,5)

- الحدث A هو سحب كرة من الصندوق $U_1$ تحمل العدد 1.

لدينا 3 كرات تحمل العدد 1 في الصندوق $U_1$ من أصل 6 كرات.

ومنه $P(A) = \frac{3}{6}\times\frac{4}{6} + \frac{3}{6}\times\frac{2}{6} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

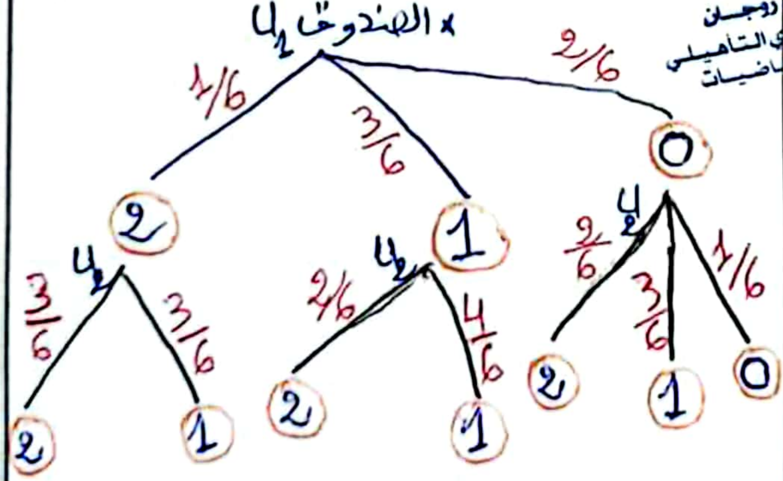
ب) لنحسب $P(B)$ (0,5)

* الطريقة الأولى:

- الحدث B هو جداء a b يساوي 2 ، يعني إما سحب كرة تحمل العدد 1 من الصندوق $U_1$ وكرة تحمل العدد 2 من الصندوق $U_2$ أو سحب كرة تحمل العدد 2 من الصندوق $U_1$ وكرة تحمل العدد 1 من الصندوق $U_2$

ومنه $P(B) = \frac{3}{6}\times\frac{2}{6} + \frac{1}{6}\times\frac{3}{6} = \frac{1}{4}$

* الطريقة الثانية (باستعمال شجرة الإمكانيات)




ومنه احتمال الحدث B هو

$P(B) = \frac{1}{6}\times\frac{3}{6} + \frac{3}{6}\times\frac{2}{6} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

ج) لنحسب $P(A/B)$ (0,75)

- نعلم أن $P(A/B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$

- الحدث $A\cap B$: هو أن الكرة المسحوبة من $U_1$ تحمل العدد 1 والكرة المسحوبة من $U_2$ تحمل العدد 2 (الجداء يساوي 2)

إذن $P(A\cap B)=\dfrac{3}{6}\times\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{6}$

ومنه $P(A/B)=\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}}=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$

3) يمكن كذلك استعمال شجرة الامكانيات في (أ) و(ب) و(ج) المستعملة في السؤال (1- ب)

أ) لنبين أن $P(X=0)=\dfrac{1}{3}$ (0,25)

في هذه الحالة سنقوم بسحب العدد 0 من الصندوق $U_1$ و الصندوق $U_2$ سنسحب منه 0 أو 1 أو 2

ومنه

$$P(X=0)=\frac{2}{6}\times\frac{1}{6}+\frac{2}{6}\times\frac{3}{6}+\frac{2}{6}\times\frac{2}{6}$$

$$\Rightarrow P(X=0)=\frac{6}{18}=\frac{1}{3}$$

ب)

(0,25) $\times\ P(X=1)=\dfrac{3}{6}\times\dfrac{4}{6}=\dfrac{1}{3}$

(0,25) $\times\ P(X=4)=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{12}$

$\times\ P(X=2)=P(B)=\dfrac{1}{4}$

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X=x_i)$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{12}$ |

ج) لنبين أن $P(M)=P(N)$ (0,5)

- الحدث M هو الحصول على الجداء يساوي 2 أو 4

ومنه $P(M)=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{12}=\dfrac{4}{12}=\dfrac{1}{3}$

- الحدث N هو الحصول على الجداء يساوي العدد 1

ومنه $P(N)=P(X=1)=\dfrac{1}{3}$



إذن $P(M)=P(N)=\dfrac{1}{3}$

## المسألة (11 ن)

نعتبر $f(x)=2-\dfrac{2}{x}+(1-\ln x)^2$

1) أ) التحقق (0,25) $f(x)=\dfrac{3x-2-2x\ln x+x(\ln x)^2}{x}$

الطريقة الأولى.

$$\times f(x)=2-\frac{2}{x}+(1-\ln x)^2$$
$$=2-\frac{2}{x}+1-2\ln x+(\ln x)^2$$
$$=\frac{2x-2+x-2x\ln x+x(\ln x)^2}{x}$$

إذن $f(x)=\dfrac{3x-2-2x\ln x+x(\ln x)^2}{x}$

الطريقة الثانية

$$\frac{3x-2-2x\ln x+x(\ln x)^2}{x}=$$
$$=3-2\ln x+(\ln x)^2-\frac{2}{x}=2-\frac{2}{x}+1-2\ln x+(\ln x)^2$$
$$=2-\frac{2}{x}+(1-\ln x)^2$$
$$=f(x)\,/\,x\in]0,+\infty[$$

الأستاذ: محمد روجان.

ب) لنبين أن $\lim_{x\to 0^+} x(\ln x)^2 = 0$ (0,25)

وأن $\lim_{x\to +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$ (0,25)

نضع $t=\sqrt{x}$ إذن $x=t^2$

* $\lim_{x\to 0^+} x(\ln x)^2 = \lim_{t\to 0^+} t^2(\ln t^2)^2$ $(\ln t^2 = 2\ln t)$
$= \lim_{t\to 0^+} t^2(2\ln t)^2$
$= \lim_{t\to 0^+} 4(t\ln t)^2$
$= 0$ (لأن $\lim_{t\to 0^+} t\ln t = 0$)

* $\lim_{x\to +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = \lim_{t\to +\infty} \frac{(\ln t^2)^2}{t^2}$
$= \lim_{t\to +\infty} \frac{(2\ln t)^2}{t^2}$
$= \lim_{t\to +\infty} 4\left(\frac{\ln t}{t}\right)^2$
$= 0$ (لأن $\lim_{t\to +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$)

ج) لنستنتج أن $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ (0,25)

* $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{3x-2-2x\ln x + x(\ln x)^2}{x}$
$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}(3x-2-2x\ln x + x(\ln x)^2)$
$= -\infty$

لأن $\lim_{x\to 0^+} 3x-2 = -2$ و $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

و $\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$ و $\lim_{x\to 0^+} x(\ln x)^2 = 0$

* التأويل الهندسي (0,25)

بما أن $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ فإن $(C_f)$ يقبل مقارب عمودي معادلته $x=0^+$ (محور الأراتيب)

د) لنحسب $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ (0,25)

* $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} 2 - \frac{2}{x} + (1-\ln x)^2$
$= +\infty$

لأن $\lim_{x\to +\infty} \frac{2}{x} = 0$ و $\lim_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$

و $\lim_{x\to +\infty} (1-\ln x)^2 = +\infty$

* لنحسب $\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ (0,25)

* $\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{3x-2-2x\ln x + x(\ln x)^2}{x \times x}$
$= \lim_{x\to +\infty} \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} - 2\frac{\ln x}{x} + \frac{(\ln x)^2}{x}$
$= 0$

لأن $\lim_{x\to +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$ و $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

و $\lim_{x\to +\infty} \frac{2}{x^2} = 0$ و $\lim_{x\to +\infty} \frac{3}{x} = 0$

* التأويل الهندسي (0,25)

بما أن $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

فإن المنحنى $(C_f)$ يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأفاصيل بجوار $+\infty$

2) لنبين أن $f'(x) = \frac{2(1-x+x\ln x)}{x^2}$ لكل $x \in ]0,+\infty[$ (0,5)

لدينا $x \mapsto \ln(x)$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$

إذن $x \mapsto (1-\ln x)^2$ ق. ش على $]0,+\infty[$

ولدينا $x \mapsto \frac{-2}{x}$ ق. ش على $]0,+\infty[$ (دالة جذرية)

ومنه $f$ ق. ش على $]0,+\infty[$ لأنها مجموع دوال ق. ش على $]0,+\infty[$، إذن

لكل $x$ من $]0,+\infty[$: $f'(x) = \left(2 - \frac{2}{x} + (1-\ln x)^2\right)'$
$= \frac{2}{x^2} + 2(1-\ln x) \times \left(\frac{-1}{x}\right)$
$= \frac{2-2x+2x\ln x}{x^2} = \frac{2(1-x+x\ln x)}{x^2}$

3)

أ) لنثبت أن الدالة $f$ تزايدية قطعا على المجال $]0,+\infty[$ $(0,25)$

من خلال جدول تغيرات $f'$، نلاحظ أن العدد $0$ هو قيمة دنيا للدالة $f'$ على المجال $]0,\beta]$، إذن

$f'(x) \geq 0$ لكل $x$ من $]0,\beta]$

ولدينا كذلك $f'([\beta,+\infty[)=]0,f'(\beta)]$

يعني $\forall x \in [\beta,+\infty[,\ f'(x) \geq 0$ $(f'(\beta)>0)$

وبالتالي $\forall x \in ]0,+\infty[,\ f'(x) \geq 0$

وبما أن $f'(x) \geq 0$ لكل $x$ من $]0,+\infty[$ و $f'$ تنعدم فقط في نقطة (العدد $1$) فإن $f$ تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$

* جدول تغيرات الدالة $f$ $(0,25)$

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| إشارة $f'$ | | $+$ | $0$ | $+$ | |
| تغيرات $f$ | $-\infty$ | ↗ | $1$ | ↗ | $+\infty$ |



ب) جدول إشارة المشتقة الثانية $f''$ للدالة $f$ على المجال $]0,+\infty[$ $(0,5)$

- لدينا $f'$ تناقصية على المجالين $]0,1]$ و $[\beta,+\infty[$ إذن $f''$ سالبة عليهما

ولدينا $f'$ تزايدية على المجال $[1,\beta]$

إذن $f''$ موجبة عليه، وبما أن $f'(\beta)$ قيمة قصوى لـ $f'$ و $0$ قيمة دنيا لـ $f'$ على $]0,+\infty[$ فإن $f''(1)=f''(\beta)=0$

( $f'$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ )

ومنه إشارة المشتقة الثانية هي:

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $\beta$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| إشارة $f''$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

ج) تقعر المنحنى $(C_f)$ $(0,5)$

- من خلال جدول إشارة $f''$، لدينا $f''(x) \geq 0$ لكل $x$ من $[1,\beta]$ و $f''(x)<0$ لكل $x$ من $]0,1] \cup [\beta,+\infty[$، إذن $(C_f)$ محدب في المجال $[1,\beta]$ ومقعر في المجالين $]0,1]$ و $[\beta,+\infty[$



* نقطتي الانعطاف $(0,25 \times 2)$

- لدينا $f''(1)=f''(\beta)=0$ و $f''$ تغير إشارتها بجوار $1$ و $\beta$. إذن أفصولي نقطتي انعطاف $(C_f)$ هما $1$ و $\beta$

| | $0$ | | $1$ | | $\beta$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| إشارة $f''$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| تقعر $(C_f)$ | | مقعر | $I(1,1)$ | محدب | $J(\beta,f(\beta))$ | مقعر | |

4) أ) لنحدد إشارة الدالة $g$ على $]0,+\infty[$ $(0,5)$

- انطلاقا من المنحنى $(C_g)$، لدينا منحنى الدالة $g$ فوق محور الأفاصيل في المجال $[\alpha,1]$، يعني $g(x) \geq 0$ لكل $x$ من $[\alpha,1]$

و $(C_g)$ تحت محور الأفاصيل في المجالين $]0,\alpha]$ و $[1,+\infty[$، يعني $g(x) \leq 0$ لكل $x$ من $]0,\alpha] \cup [1,+\infty[$

| $x$ | $0$ | | $\alpha$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| إشارة $g$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

**تصحيح الامتحان الوطني – بكالوريا 2023 ، الدورة العادية - لمادة الرياضيات ، شعبة العلوم التجريبية – خيار فرنسي وعربي**

**الأستاذ: محمد روجان.**

4) ب) الوضع النسبي بين $(\Delta)$ و $(C_f)$ $(0{,}25\times 2)$

- لدينا $g(x)=f(x)-x\geq 0$ لكل $x$ من $[\alpha,1]$

إذن $f(x)\geq x$ لكل $x$ من $[\alpha,1]$ ، ومنه المستقيم $(\Delta)$ يوجد تحت $(C_f)$ على المجال $[\alpha,1]$

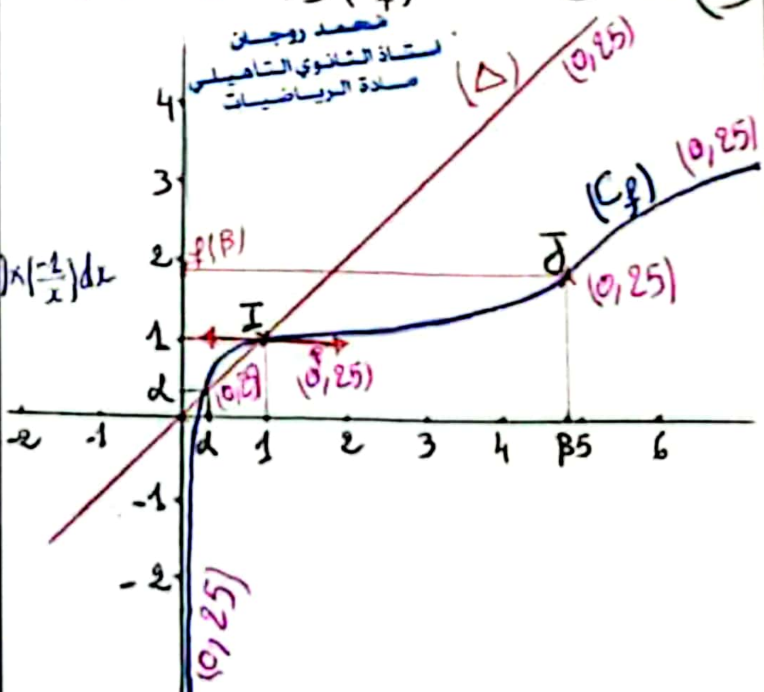
ولدينا $g(x)=f(x)-x\leq 0$ لكل $x$ من $]0,\alpha]\cup[1,+\infty[$

إذن $f(x)\leq x$ لكل $x$ من $]0,\alpha]\cup[1,+\infty[$

ومنه المستقيم $(\Delta)$ يوجد فوق $(C_f)$ على كل من $]0,\alpha]$ و $[1,+\infty[$

| $x$ | $0$ | | $\alpha$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| إشارة $f(x)-x$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| الوضع النسبي بين $(C_f)$ و $(\Delta)$ | | $(C_f)$ تحت $(\Delta)$ | $(C_f)$ يقطع $(\Delta)$ | $(C_f)$ فوق $(\Delta)$ | $(C_f)$ يقطع $(\Delta)$ | $(C_f)$ تحت $(\Delta)$ | |

5) لننشئ المنحنى $(C_f)$ و $(\Delta)$ $(1{,}5)$




6) نضع $h(x)=1-\ln x$ و $H(x)=2x-x\ln x$

أ) لنتحقق أن $H$ دالة أصلية للدالة $h$ على $[\alpha,1]$ $(0{,}5)$

لدينا $x\mapsto x$ و $x\mapsto \ln x$ و $x\mapsto 2x$ دوال قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ ومنه $H$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ أي ق.ش على $[\alpha,1]$ (لأن $[\alpha,1]\subset]0,+\infty[$) إذن

$$
\begin{aligned}
H'(x)&=(2x-x\ln x)'\\
&=2-(x'\ln x+x\ln' x)\\
&=2-\ln x-x\times\frac{1}{x}\\
&=2-1-\ln x\\
&=1-\ln x\\
&=h(x)
\end{aligned}
$$

محمد روجان
أستاذ الثانوي التأهيلي
مادة الرياضيات

ومنه $H$ دالة أصلية للدالة $h$ على $[\alpha,1]$

ب) الطريقة الأولى

لنبين أن $(1)$ $\int_\alpha^1(1-\ln x)^2dx=5(1-\alpha)+\alpha(4-\ln\alpha)\ln\alpha$

باستعمال مكاملة بالأجزاء: نضع

$$\begin{cases}u(x)=1-\ln x\\ v'(x)=1-\ln x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u'(x)=\frac{-1}{x}\\ v(x)=2x-x\ln x\end{cases}$$

إذن

$$
\begin{aligned}
\int_\alpha^1(1-\ln x)^2dx&=\left[(1-\ln x)(2x-x\ln x)\right]_\alpha^1-\int_\alpha^1(2x-x\ln x)\times\left(\frac{-1}{x}\right)dx\\
&=\left[(1-\ln x)(2x-x\ln x)\right]_\alpha^1+\int_\alpha^1(2-\ln x)\,dx\\
&=2-(1-\ln\alpha)(2\alpha-\alpha\ln\alpha)+\int_\alpha^1 2\,dx-\int_\alpha^1\ln x\,dx\\
&=2-(1-\ln\alpha)(2\alpha-\alpha\ln\alpha)+2-2\alpha-\left[x\ln x-x\right]_\alpha^1\\
&=2-2\alpha+\alpha\ln\alpha+2\alpha\ln\alpha-\alpha(\ln\alpha)^2+2-2\alpha+1+\alpha\ln\alpha-\alpha\\
&=5-5\alpha+4\alpha\ln\alpha-\alpha(\ln\alpha)^2
\end{aligned}
$$

ومنه $\boxed{\int_\alpha^1(1-\ln x)^2dx=5(1-\alpha)+\alpha\ln\alpha(4-\ln\alpha)}$

باستعمال مكاملة بالأجزاء نجد أن

$$\int_\alpha^1 \ln x\,dx = [x\ln x - x]_\alpha^1$$
$$= -1 - \alpha\ln\alpha + \alpha$$

**الطريقة الثانية**

نضع

$$\begin{cases} u(x) = (1-\ln x)^2 \\ v'(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 2\times(1-\ln x)\times\frac{-1}{x} \\ v(x) = x \end{cases}$$

إذن

$$\int_\alpha^1 (1-\ln x)^2 dx = [x(1-\ln x)^2]_\alpha^1 - \int_\alpha^1 2\times(1-\ln x)\times\frac{-1}{x}\,x\,dx$$
$$= [x(1-\ln x)^2]_\alpha^1 + 2\int_\alpha^1 (1-\ln x)\,dx$$
$$= [x(1-\ln x)^2]_\alpha^1 + 2[2x - x\ln x]_\alpha^1$$
$$= 1 - \alpha(1-\ln\alpha)^2 + 2(2 - 2\alpha + \alpha\ln\alpha)$$
$$= 1 - \alpha + 2\alpha\ln\alpha + \alpha(\ln\alpha)^2 + 4 - 4\alpha + 2\alpha\ln\alpha$$
$$= 5 - 5\alpha + 4\alpha\ln\alpha - \alpha(\ln\alpha)^2$$

ومنه

$$\boxed{\int_\alpha^1 (1-\ln x)\,dx = 5(1-\alpha) + \alpha\ln\alpha(4-\ln\alpha)}$$

ج) لنحسب مساحة حيز المستوى المحصور بين $(C_f)$ ومحور الأفاصيل والمستقيمين $x=\alpha$ و $x=1$ (0,75)

- مساحة هذا الحيز هي $S = \int_\alpha^1 |f(x)|\,dx\ cm^2$

لنحسب

$$\int_\alpha^1 f(x)\,dx = \int_\alpha^1 2 - \frac{2}{x} + (1-\ln x)^2 dx$$
$$= \int_\alpha^1 2dx - \int_\alpha^1 \frac{2}{x}dx + \int_\alpha^1 (1-\ln x)\,dx$$
$$= 2 - 2\alpha + 2\ln\alpha + 5(1-\alpha) + \alpha\ln\alpha(4-\ln\alpha)$$
$$= 7 - 7\alpha + 2\ln\alpha + \alpha\ln\alpha(4-\ln\alpha)$$

ومنه

$$\boxed{S = \int_\alpha^1 |f(x)|\,dx = |7(1-\alpha) + 2\ln\alpha + \alpha\ln\alpha(4-\ln\alpha)|\ cm^2}$$

5) أ) لنبين أن $\alpha < u_n < 1$ لكل $n$ من $\mathbb{N}$ (0,5)

باستعمال البرهان بالترجع

* من أجل $n=0$ لدينا $u_0 \in ]\alpha,1[$ إذن
$\alpha < u_0 < 1$ ومنه العبارة صحيحة من أجل $n=0$

** نفترض أن $\alpha < u_n < 1$ من أجل $n$ من $\mathbb{N}$
ونبين أن $\alpha < u_{n+1} < 1$

- لدينا حسب الافتراض أن $\alpha < u_n < 1$
ولدينا $f$ متصلة وتزايدية قطعا على $[\alpha,1]$
إذن $f(\alpha) < f(u_n) < f(1)$



$$\Rightarrow \alpha < u_{n+1} < 1$$

لأن $f(1)=1$ و $g(\alpha)=0$ أي $f(\alpha)=\alpha$

ومنه $\boxed{\alpha < u_n < 1 \text{ لكل } n \text{ من } \mathbb{N}}$

ب) لنبين أن المتتالية $(u_n)$ تزايدية (0,5)

لدينا من السؤال (4-ب) أن $f(x) \geq x$ لكل $x$ من المجال $[\alpha,1]$ ($(C_f)$ يوجد فوق $(\Delta)$ على المجال $[\alpha,1]$)

ولدينا $u_n \in [\alpha,1]$ إذن $f(u_n) \geq u_n$

ومنه $u_{n+1} \geq u_n$ لكل $n$ من $\mathbb{N}$

يعني $(u_n)$ تزايدية لكل $n$ من $\mathbb{N}$

ج) لنستنتج أن $(u_n)$ متتالية متقاربة (0,25)

- لدينا $(u_n)$ تزايدية ومكبورة بالعدد 1
إذن $(u_n)$ متقاربة

- لنحسب نهاية المتتالية $(u_n)$ (0,5)

لدينا $u_{n+1} = f(u_n)$ و $u_0 \in ]\alpha,1[$ و $f$ متصلة على المجال $]\alpha,1[$
ولدينا $f(]\alpha,1[) = ]f(\alpha),f(1)[ = ]\alpha,1[ \subset ]\alpha,1[$ ($f$ تزايدية على $]\alpha,1[$)
ولدينا المتتالية $(u_n)$ متقاربة، إذن نهاية المتتالية $(u_n)$ هو حل المعادلة $f(x)=x$ في المجال $]\alpha,1[$
ولدينا مما سبق أن $\alpha$ و $1$ هما حلا المعادلة $f(x)=x$
وبما أن $(u_n)$ تزايدية فإن $u_0 < u_n$ و $\alpha < u_0$ إذن $\alpha < \lim u_n$

ومنه لكل $n$ من $\mathbb{N}$ $\boxed{\lim u_n = 1}$