Licence
Sciences de l'éducation

3

Karine Bécu-Robinault

Maître de Conférences INRP

Support de cours

Didactique des Mathématiques

Chapitre
1

Introduction à la didactique des mathématiques

Ce chapitre vise à présenter le cours, donner une définition de la didactique, décrire les projets qu'elle se donne et ses objets d'étude

Plan général du cours

Le but de ce cours est de permettre aux étudiants de se doter de quelques outils « théoriques » leur permettant de mieux comprendre les origines des erreurs des élèves, les objectifs de l'enseignement des mathématiques, les difficultés en lien avec l'enseignement et l'apprentissage de cette discipline.

Quelques exemples de cadres théoriques de la didactique des mathématiques seront présentés, avec des applications systématiques.

- les variables didactiques ;
- le contrat didactique ;
- la théorie des situations et les situations problèmes ;
- la résolution de problèmes en mathématiques ;
- la théorie des champs conceptuels ;
- la transposition didactique.

L'étudiant devra connaître ses différentes théories, mais aussi savoir les appliquer à l'analyse d'énoncés et de productions d'élèves. Les exemples présentés seront en lien avec les programmes de l'école primaire et du début du collège.

Qu'est-ce que la didactique des mathématiques ?

On peut trouver l'origine historique de l'utilisation du terme « didactique » dans « la grande didactique » de Comenius, publié en 1649. La didactique serait au départ un synonyme savant de pédagogie.

Initialement, ce terme désigne « ce qui vise à instruire », « qui concerne l'intention d'enseigner, d'expliciter méthodiquement les procédés d'un art ou d'une science », « qui concerne l'intention d'enseigner, d'expliciter méthodiquement les procédés d'un art ou d'une science. » (Trésor de la Langue Française). Actuellement, ce terme a une connotation péjorative dans la plupart des discours tenus dans la vie quotidienne : « les cours de sciences seraient-ils trop didactiques? »

Les quelques définitions de la didactique avant 1980 donnent également à penser la didactique comme une méthode :

R. LAFON (1963) : « art d'enseigner exercé par un adulte »

H. PIERON (1963) : « Science auxiliaire de la pédagogie relative aux méthodes les plus propres à faire acquérir telle ou telle matière... »

G. MIALARET (1979) : « Ensemble des méthodes, techniques et procédés pour l'enseignement… »

On retrouve à travers ces définitions que la didactique serait un ensemble de recettes et d'astuces pour mieux enseigner… Lorsque l'on interroge les étudiants, on retrouve fréquemment acceptations suivantes : méthode d'enseignement, moyen technique, pédagogie spéciale, art d'enseigner…

Or, la didactique est un champ de recherche, pas une méthode… d'où l'importance de l'analyse de contenus. Ainsi, la didactique serait une science autonome, s'inspirant de la psychologie, de l'épistémologie, des sciences du langage, des sciences cognitives…

Nous pourrons retenir comme correctes les deux définitions suivantes pour la didactique des mathématiques :

Douady (1984) : « La didactique des mathématiques est l'étude de processus de transmission et d'acquisition des différents contenus de cette science, et qui se propose de décrire et d'expliquer les phénomènes relatifs aux rapports entre son enseignement et son apprentissage. Elle ne se réduit pas à chercher une bonne manière d'enseigner une notion fixée ».

Brousseau (1991) : « Science s'intéressant à la production et à la communication des connaissances mathématiques dans ce que cette production et cette communication ont de spécifique de ces connaissances. La didactique des mathématiques étudie la façon dont les connaissances sont crées, communiquées et employées pour la satisfaction des besoins des hommes vivant en société ».

Des objets d'étude

La didactique s'est dotée d'outils lui permettant d'étudier différents objets, tels que :

- Les opérations relatives à la diffusion des connaissances (théorie des situations didactiques)
- Les conditions d'existence et de diffusion de ces connaissances (écologie des savoirs)
- Les transformations produites par cette diffusion
- Sur les connaissances (transposition didactique)
- Sur les utilisateurs (apprentissages, rapports au savoir)
- Les institutions et activités facilitant ces opérations.

Ainsi, le projet de la didactique peut être décrit comme un moyen de théoriser les phénomènes d'enseignement (autant en ce qui concerne l'enseignement que la formation) et d'apprentissage (qu'il s'agisse d'apprentissages scolaires ou professionnels). Cette théorisation sous-entend une distinction fondamentale qui est celle de l'enseignement et de l'apprentissage.

La didactique se donne également le projet d'agir sur le système d'enseignement et de formation : c'est ce que l'on nomme l'ingénierie didactique. Cette ingénierie didactique peut être menée au sein de projets de recherche-développement.

Un des points essentiels de la didactique est d'aider à repérer les *variables* conditionnant les apprentissages et d'étudier leur rôle en fonction du contexte dans lequel elles sont mises en œuvre.

La distinction parfois difficile entre apprendre et enseigner , peut être comprise lorsque l'on étudie des expressions ambigües. Par exemple, l'expression « j'apprends à conduire » peut signifier soit « j'apprends à conduire avec un moniteur » soit « j'apprends à conduire à mon fils ». La première expression renvoie à une activité d'apprentissage. D'un point de vue étymologique, cela signifie saisir, comprendre. C'est une activité qui se situe du coté de l'élève. La deuxième renvoie à une activité d'enseignement. D'un point de vue étymologique, cela signifie placer un signe (laisser une marque). C'est une activité qui se situe du coté du maître.

Les variables didactiques : définition du domaine des possibles

Activité préalable (en petits groupes)

1- Vous devez construire un cours - problème ou exercice d'application de mathématique pour des élèves. Quels sont les différents éléments que vous devez prendre en compte ?

2- Essayez de regrouper ces éléments en quelques catégories (spécifier si elles concernent l'apprentissage ou l'enseignement)

Exemple

Un crémier reçoit sa commande d'œufs dans des cartons. Dans un carton, il y a 240 œufs. Ces œufs sont dans des boîtes de 6 et de 12. Une boîte de 6 pèse 20g vide. Un œuf pèse en moyenne 50g. Dans un carton, il y a 8 boîtes de 12. Le carton vide pèse 300g. Plein, il pèse 13,2 kg. Le crémier vend la boîte de 6 œufs 1 € et la boîte de 12 œufs 1,90€.

Pour chacune des questions ci-dessous, préciser s'il est possible de répondre avec ces données. Si c'est le cas, répondre à la question, sinon expliquer pourquoi il n'est pas possible de répondre.

A) Quel est le nombre de boîtes de 6 œufs dans un carton ?

240 – 8x12 = 144 œufs dans les boites de 6

144 / 6 = 24 boites de 6 œufs

B) Quel est le poids d'une boîte de 12 œufs vide ?

Poids de toutes les boîtes de 12 : 13200 – 300 – 240x50 – 24x20 = 420 g

Poids d'une boîte : 420/8 = 52,5 g

C) Quel est le bénéfice réalisé par le crémier quand il a vendu un carton d'œufs ?

On ne peut pas répondre, car on ne connaît pas le prix d'achat

Analyse

A partir de la réflexion engagée ci-dessus, on pointera qu'il est important, si l'on veut concevoir un problème à donner à résoudre à des élèves, de pouvoir connaître les réponses aux questions ci-dessous :

- Quelles sont les connaissances préalables des élèves? (niveau scolaire, période de l'année…) ?
- Quels sont les outils qu'ils peuvent utiliser ?
- Quel est le contrat entre l'élève et l'enseignant? (rapports interpersonnels du point de vue du savoir) ?
- Quel est l'objectif du problème?
- Quelles sont les connaissances visées?

Définition

> *Une variable didactique est une variable dont la modification des valeurs provoque des adaptations, des régulations, des apprentissages, et, dans le cas de la recherche de la solution d'un problème, des changements de stratégies. (Brousseau)*

Les variables sont les éléments (interne et externe) d'un problème qui, lorsqu'ils sont modifiés (consciemment ou pas) jouent un rôle dans sa résolution par les élèves. Une variable didactique est un paramètre de la situation qui peut prendre plusieurs « valeurs » selon la décision du maître. C'est un élément dont la variation est susceptible de modifier le processus de résolution que les élèves vont adopter (et donc l'apprentissage).

> *« Un champ de problèmes peut être engendré à partir d'une situation par la modification de certaines variables qui, à leur tour, font changer les caractéristiques des stratégies de solution (coût, validité, complexité, etc.) […] Seules les modifications qui affectent la hiérarchie des stratégies sont à considérer variables pertinentes et parmi les variables pertinentes, celles que peut manipuler un professeur sont particulièrement intéressantes: ce sont les variables didactiques » (Brousseau, 1982)*

Il existe différents types de variables, et l'enseignant ne peut pas modifier n'importe quel type de ces variables.

Les variables de contexte :

- aux objectifs d'enseignement. Ces objectifs dépendent des conceptions des enseignants, de leur rapport à la discipline.
- à l'élaboration des outils conceptuels. Cette élaboration prend en compte la diversification des savoirs, les phénomènes de mode.

- A l'origine et à l'histoire des élèves, qui permettent de prendre en compte les apprentissages préalables, les critères sociologiques, l'état psychologique des élèves.

L'enseignant n'a pas vraiment de prise sur ces variables de contexte. Il doit faire avec, et ne peut les modifier.

Par contre, il existe d'autres variables qui sont à disposition de l'enseignant et qu'il peut donc modifier :

- Type de cours ou d'activité : l'enseignant peut choisir de faire un cours magistral ou un TD, partir sur la résolution de problème ou des règles à apprendre, faire travailler les élève s individuellement ou en groupe…
- Le contrat entre le maître et les élèves : l'enseignant peut jouer sur les rapports interpersonnels, avoir des attentes particulières quant au comportement des élèves dans sa classe…
- Le type d'évaluation : formative, sommative…
- La manière dont il présente les notions, les adapte aux connaissances des élèves, gère les erreurs.

Enfin, il existe des variables constitutives du savoir. En effet, il n'est pas possible d'enseigner les mathématiques comme on enseigne la physique, ou le français… l'enseignant doit prendre en compte :

- La formation historique des concepts et outils de base en mathématiques (épistémologie historique)
- Le développement et intrication contemporaine des concepts (épistémologie des mathématiques
- La formation des concepts chez les enfants (épistémologie génétique)

On peut distinguer variables didactiques et variables pédagogiques :
Une variable didactique est un paramètre de la situation qui peut prendre plusieurs valeurs selon la décision du maître. La modification de ces valeurs entraîne alors une modification de la hiérarchie des stratégies de solution (et donc modifie l'apprentissage). L'élève est conduit à changer sa procédure ; cette dernière étant devenue trop longue, trop coûteuse, trop complexe ou erronée.

Les variables pédagogiques peuvent être les rôles confiés aux élèves, les critères de composition des groupes, le mode d'évaluation des procédures.

Exercice sur les variables

Exercice 1

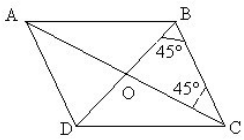
- Ajouter la somme, le produit et la différence de 127,78 et 39
- Faire le produit de la somme de 12,39 et 69 par 5,7

Quel est le but de ces exercices ?

Quelles sont les variables didactiques ?

Exercice 2

En utilisant les indications portées sur la figure à main levée, dire quelle est la nature du parallélogramme ABCD. Justifier la réponse.



Résoudre l'exercice
Quelles sont les variables didactiques ?

Le système didactique

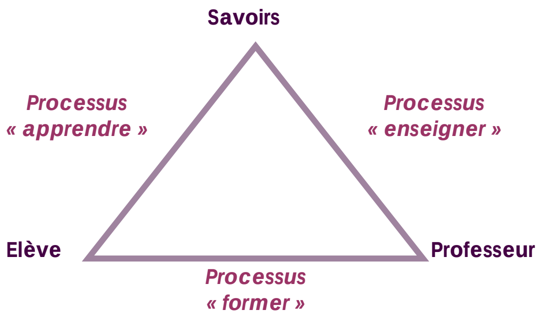
Pour comprendre le système didactique, il faut faire une approche systémique qui permet de mettre en relation les différents protagonistes. Il faut déjà identifier les protagonistes : le maître, l'élève et le savoir. L'objectif de l'approche systémique est de comprendre le « jeu qui se mène entre un enseignant, des élèves et un savoir mathématique » (Chevallard). Il s'agit de :

- Décrire le fonctionnement du système didactique
- Identifier les phénomènes qui lui sont propres
- Observer les régularités du système
- Connaître les possibilités et les contraintes du système

Cette étude concerne les contraintes dans la relation didactique « Professeur, Elève, Savoir »

Le triangle didactique

On représente fréquemment le système didactique sous la forme d'un triangle



Cette représentation permet d'analyser la fonction de chacun des protagonistes du système didactique, en interaction avec les autres protagonistes.

L'élève (distinction entre l'enfant et l'élève…) a pour projet d'apprendre. On parle fréquemment de métier de l'élève. "Une idéologie très répandue suppose un lien de simple transfert de l'enseignement vers l'apprentissage: l'élève enregistre ce qui est communiqué par l'enseignant avec peut être quelques pertes d'informations. " (Laborde, 1989). En fait: l'apprentissage n'est ni un simple transfert, ni linéaire ni continu.

En ce qui concerne la relation entre l'élève et le savoir, on notera que l'apprentissage des savoirs est fonction de son âge (stades, étapes…), sa culture, ses expériences de vie, ses représentations (conceptions), ses attentes, ses motivations

- Le savoir n'existe pas en dehors de quelqu'un qui sait. Il entretient des liens culturels et sociaux avec l'extérieur de la classe, il évolue avec le temps.

Doit-on parler du savoir ou des savoirs ? En fait, il existe différents types de savoir. Une même notion, un même concept peut se formuler de manière très différente selon le lieu où il « existe ». En didactique on distingue essentiellement trois grands types de savoir dans la théorie de la transposition didactique : le savoir savant (les découvertes et théories homologuées par les chercheurs, les avoirs universitaires), le savoir à enseigner (celui que l'on peut trouver dans les programmes par exemple) et le savoir enseigné qui est linéarisé, décomposé et qui correspond au discours de l'enseignant (ce discours n'est pas identique au discours officiel des programmes)

- L'enseignant a pour projet de former les élèves. "L'enseignant n'a pas pour mission d'obtenir des élèves qu'ils apprennent, mais bien de faire en sorte qu'ils puissent apprendre. Il a pour tâche, non la prise en charge de l'apprentissage - ce qui demeure hors de son pouvoir - mais la prise en charge de la création des conditions de possibilité de l'apprentissage." (Chevallard, 1986)

L'enseignant traite le savoir en fonction de son histoire personnelle, sa formation scolaire et universitaire, sa culture, ses représentations sur sa fonction, l'enfant, le statut de l'élève, le savoir, rôle qu'il attribue à l'école, ses attentes en tant qu'adulte et enseignant

En ce qui concerne les objets de savoirs, il existe nécessairement une dissymétrie enseignant / élève. En effet, l'enjeu de l'apprentissage est le savoir et l'enseignant se distingue de l'élève en ce qu'il est supposé savoir (avant, plus, différemment) mais aussi supposé capable d'anticiper sur ce que l'élève va avoir à apprendre (institution via les programmes). De manière générale, toute transmission de savoirs implique une dissymétrie.

Hypothèses fondamentales

L'essentiel des travaux en didactique des mathématiques repose sur deux hypothèses. La première est une hypothèse constructiviste, càd que les élèves construisent leurs propres connaissances et le sens de ces connaissances. La deuxième hypothèse prend sa source dans le fonctionnement des mathématiques, il s'agit d'une hypothèse épistémologique : les problèmes et les situations sont à la source de la signification des connaissances mathématiques

Le contexte éducatif

Tout système didactique s'intègre à un système d'enseignement plus général. Dans le cas du système d'enseignement, on peut répertorier les acteurs suivants : les décideurs politiques, les gestionnaires de l'administration, les représentants de la discipline enseignée, les parents d'élèves… L'ensemble de ces acteurs constitue ce que l'on nomme la noosphère.

La noosphère a pour fonction de faire évoluer le système didactique (notamment les objectifs d'enseignement, le savoir à enseigner), de participer à la transposition didactique (voir plus loin dans le cours), de définir les règles régissant la formation des enseignants.

Le temps didactique

Il existe une quatrième dimension de la relation didactique, c'est le temps didactique (ce temps permet l'évolution du système). Il existe deux temps :

- Le temps d'enseignement qui est un temps légal, programmé sur l'année, séquentialisé, rythmé par les évaluations, mais également spiralé au fil des années ;
- Le temps d'apprentissage qui est un temps individuel, à la structuration complexe, car il est constitué d'intégrations successives, de réorganisations perpétuelles, d'après-coups et donc il est discontinu

Il n'y a pas nécessairement correspondance entre ces deux temps.

Exercice sur le savoir / les savoirs

- Définition mathématique de la division euclidienne :

À deux entiers *a* et *b*, avec *b* strictement positif, la division euclidienne associe un unique quotient *q* et un unique reste *r*, tout deux entiers, vérifiant :

$$\forall(a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*,\exists!(q,r)\in\mathbb{Z}^2,(a=bq+r)\wedge(0\leq r<b)$$

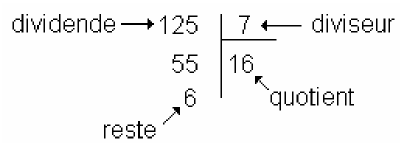
L'affirmation de l'existence et l'unicité du reste et du quotient est appelé *Théorème de la division euclidienne.*

$$a=bq+r$$
$$0\leq r<b$$

- La division euclidienne au cycle 3

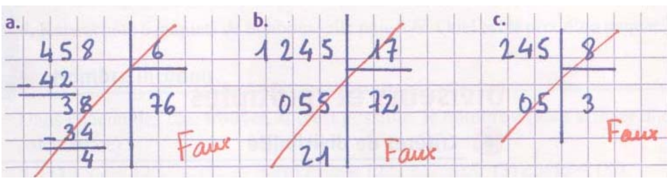
Pour effectuer une division euclidienne, il faut 17

Déterminer le nombre de chiffres qu'il faut prendre au dividende
Déterminer le premier chiffre du quotient
Effectuer
Abaisser le chiffre suivant du dividende
Déterminer le deuxième chiffre du quotient
Quand il n'y a plus de chiffres au dividende, on s'arrête



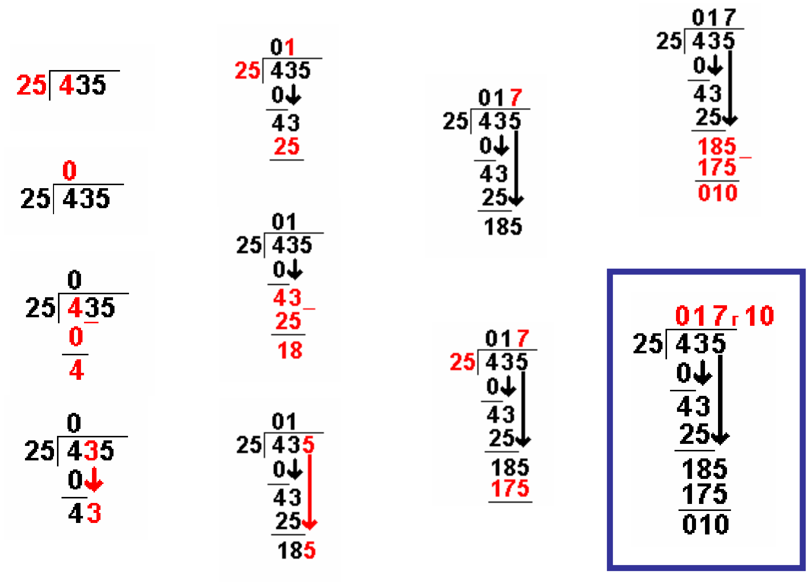
Quelles sont les différences entre ces deux « définitions » ?

- Analyser les productions d'élèves suivantes :

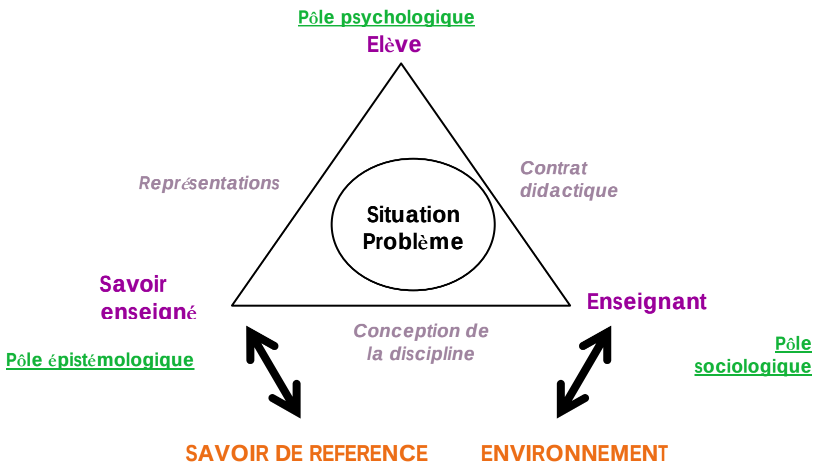


- Différentes approche d'un même objet mathématique en fonction de la culture.

Il existe d'autres manières d'apprendre à diviser. L'analyse des différentes méthodes permet de faire une approche culturelle des apprentissages.



Autre représentation du triangle didactique



Chapitre
2

Différentes approches de l'enseignement et de l'apprentissage

Description sommaire des approches transmissive, béhavioriste, constructiviste et socio-constructiviste

Des théories de l'apprentissage?

Les théories de l'apprentissage désignent un ensemble de lois ou de principes qui décrivent la manière dont l'apprentissage se déroule.

On pourra distinguer : Théories de l'apprentissage // Modèles de l'apprentissage.

Effectivement, on préférera utiliser le terme de « modèle » car ils ont une portée limitée et ils reposent sur des hypothèses qu'il est nécessaire d'expliciter lorsque l'on rend compte d'une situation.

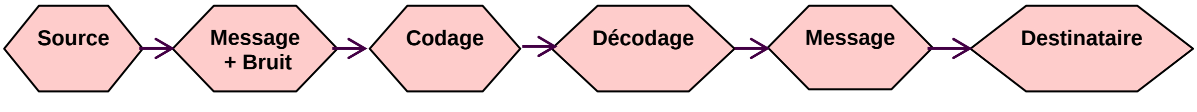
Pourquoi différents modèles pour rendre compte de l'apprentissage ?

En fait, chaque modèle

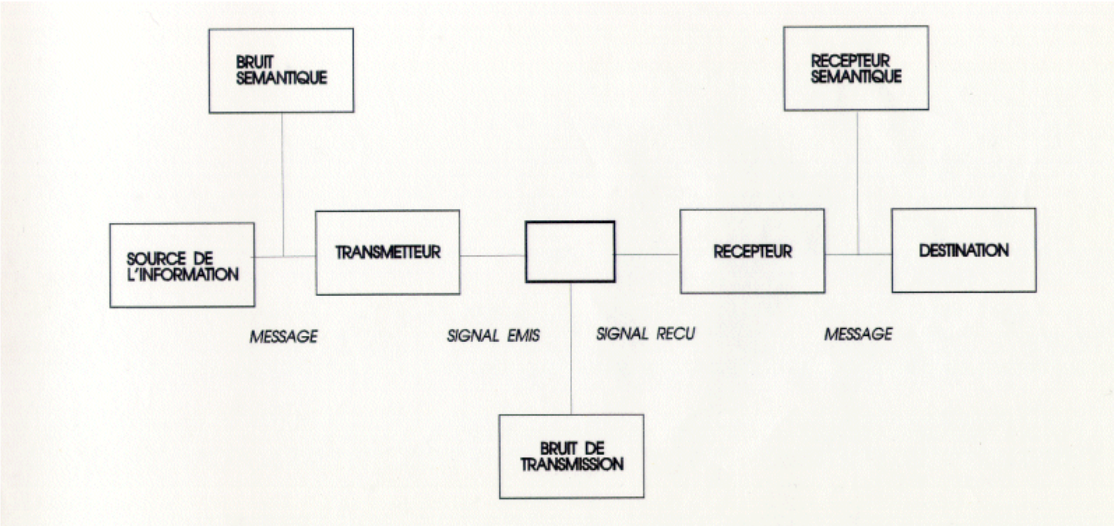
- Apporte des contributions spécifiques pour rendre compte des apprentissages
- Met en œuvre des méthodes d'investigations différentes
- A des limites: un modèle ne permet pas nécessairement de rendre compte de tous les types d'apprentissage

Conception transmissive de l'enseignement et de l'apprentissage

C'est une conception qui traverse souvent l'enseignement traditionnel. L'origine peut se trouver dans le modèle de communication de Shannon & Weaver (transmission télégraphique) fréquemment schématisé comme ci-dessous :



La communication est vue comme simple transmission d'une information, or, elle n'est jamais aussi aisée que le signifie le schéma ci-dessus, même si l'on ne prend en compte que la transmission.



Dans ce modèle, au départ, l'apprenant a la tête vide, et le savoir s'imprime dans sa tête dès qu'il lui a été communiqué (pâte molle, cire vierge) : c'est le modèle des idées claires et du savoir transparent.

Les hypothèses sous-jacentes sont la neutralité conceptuelle de l'élève et l non déformation du savoir transmis.

Ce modèle sous entend une répartition claire des rôles des protagonistes. Le **rôle de l'enseignant** est d'expliquer clairement. Le **rôle de l'élève** est d'écouter attentivement. Les **erreurs** de l'élève sont des accidents dus à une écoute insuffisante ou à une mauvaise explication. Elles sont sous l'entière responsabilité de l'élève. On y remédie par une nouvelle explication, une écoute plus attentive et la répétition des exercices.

Ainsi, l'enseignant attend de l'élève q'il soit attentif, qu'il soit régulier dans le travail et dans l'effort, qu'il fasse preuve de bonne volonté, qu'il accepte de différer son besoin de compréhension globale.

De son coté, l'enseignant montre, l'élève reproduit, il choisit les bons exemples et les explications appropriées. Le programme est abordé séquentiellement. La logique de la progression suit la logique du savoir. La clarté de l'exposé est à la charge de l'enseignant. L'exposé est progressif et ordonné en fonction des pré-requis, des difficultés censées être croissantes.

Les apports et les limites de ce modèle

L'apport principal réside dans l'importance de la structuration du message délivré par l'enseignant. Les limites dépendent de la validité des deux présupposés : en effet, si une conception initiale inadéquate existe elle risque de ne pas être remise en cause, et d'interférer avec la nouvelle connaissance. D'autre part, ce qui est dit par l'enseignant n'est pas toujours entendu de la même façon par tous les élèves.

Béhaviorisme

Le béhaviorisme est issu de la tradition philosophique empiriste (Bacon, Locke, Berkeley, Hume) qui stipule qu'il n'y a pas de « connaissance pure » et indépendante de l'expérience, que les idées innées, naturelles n'existent pas. C'est dans cette mouvance que l'on trouve aussi les travaux d'Aristote.

Le béhaviorisme émerge à la rencontre de 2 courants: la physiologie animale (Russie, Pavlov) et la psychologie expérimentale (USA, Thorndike, Skinner). Les modèles béhavioristes les plus connus sont l'associationnisme (action – réaction, principe de contiguïté de Hartley), l'apprentissage par Essai – Erreur (lois de l'exercice et de l'effet de Thorndike), le conditionnement classique de Pavlov, le conditionnement opérant de Skinner.

Ces différents courants ont eu d'énormes répercussions pour l'enseignement, notamment avec les implications pédagogiques suivantes :

- maximiser la possibilité de produire des actions qui doivent être renforcées dans un délai rapide
- Décomposer les compétences dont on veut doter les élève en ses éléments constituants et les enseigner de manière systématique
- Organiser les exercices en classe selon une hiérarchie de complexité croissante

Dans ce courant, les erreurs sont considérées comme étant liées à des absences de renforcement et donc à un non-apprentissage.

Lorsque l'on se situe dans ce modèle, le rôle de l'enseignant est d'employer volontairement des renforcements pour favoriser l'acquisition de certains comportements et faire disparaître certains autres, de construire et organiser les objectifs d'apprentissage afin de déterminer des objectifs d'apprentissage précis et de sérier les objectifs (plan d'apprentissage).

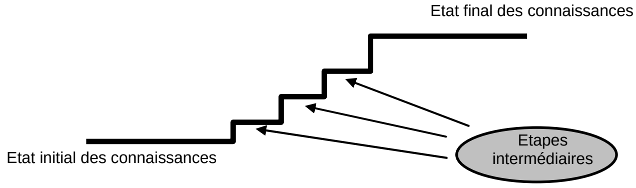
Les apports et les limites de ce modèle

Ce modèle offre une approche intéressante pour explorer des conduites automatiques ou pour étudier des individus privés de langage (nourrissons). « Savoir, c'est agir… »

Les limites sont liées à la nature de l'apprentissage : tous les organismes n'apprennent pas de la même manière. Ce modèle ne prend pas en compte les processus cognitifs interviennent dans l'apprentissage (perception, mémoire, langage, émotion…)

Exemple d'application: savoir conduire »

Nous pouvons prendre l'exemple de « ». Ce n'est pas parce que l'on sait effectuer les différentes opérations débrayer, accélérer, freiner et tourner le volant que l'on sait conduire. Savoir conduire signifie également savoir coordonner ces différentes actions.



Exemple de l'addition

Maîtriser l'addition selon Thorndike, c'est apprendre à :

- se concentrer sur les chiffres colonne par colonne pour les additionner
- garder en mémoire le résultat de chaque addition jusqu'à avoir obtenu le résultat de l'addition suivante
- ajouter le report lors de l'addition suivante
- négliger les 0 à l'intérieur des colonnes
- négliger les espaces vides à l'intérieur d'une colonne
- Ne pas écrire l'entièreté d'une addition, mais seulement le nombre correspondant à l'unité (problème du 0)

Le modèle gestaltiste

Ce modèle met fin à la « boîte noire » (ce qu'il se passe dans la tête). Il est issu de la psychologie de la forme qui est née en opposition au béhaviorisme (début XXème siècle). Il permet de mettre en évidence le caractère relatif de la perception qu'on peut avoir d'un objet.

Les objectifs sont d'identifier certaines variables qui influencent la perception d'une situation et de différencier l'apprentissage par restructuration de l'apprentissage par association.

Différents facteurs influencent la perception. En effet, la perception n'est pas objective, mais elle dépend des attentes du sujet et de l'environnement dans lequel est placé le stimulus. De manière générale, l*es stimuli sont perçus globalement*

2 expériences

Ces expériences montrent que la perception n'est pas objective. Nous ne percevons pas les objets indépendamment du contexte (dans quel lieu, dans quelles conditions). Nous les percevons également en fonction de nos attentes, de nos connaissances. Il est possible de percevoir un même stimulus de manière très différente en fonction de nos attentes, du contexte...

Dans le modèle de la Gestalt, le tout est plus que la somme des parties. Ce sont **les formes** qui constituent les éléments fondamentaux et indécomposables de l'activité humaine. La constitution de ces formes répond à un certain nombre de principes élémentaires mis en évidence par les gestaltistes.

Les principes

Le principe de proximité. Lorsque l'on décrit ce dessin, on ne décrit pas 6 lignes parallèles, mais 3 séries de 2 lignes parallèles. Les éléments ont tendance à se regrouper avec les plus proches. On a tendance à voir les lignes regroupées en trois colonnes.

Le principe de similitude. Les éléments ont tendance à se regrouper avec les plus semblables. On a tendance à voir les lettres regroupées en colonnes plutôt qu'en lignes.

Y T Y T Y T
Y T Y T Y T
Y T Y T Y T
Y T Y T Y T
Y T Y T Y T
Y T Y T Y T

Le principe de closure : Nous avons tendance à organiser nos perception selon une bonne forme; pour cela nous comblons les vides dans les stimuli qui nous sont présentés. On a tendance à voir la forme ci-dessus comme un carré plutôt que comme des lignes séparées.

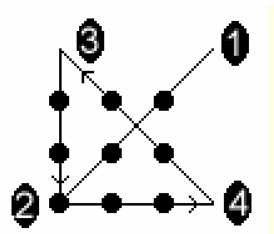
L’insight

En mettant l'accent sur la perception globale des stimuli, les gelstaltistes remettent en cause l'idée que l'apprentissage est basé sur des associations simples. Pour eux, apprendre c'est organiser ou réorganiser différemment certains éléments; c'est découvrir et établir des relations nouvelles entre des éléments qui jusqu'alors étaient vus comme isolés.

Les gestaltistes insistent également sur le rôle actif du sujet dans l'apprentissage. Apprendre pour les gestaltistes c'est avant tout résoudre des problèmes, c'est découvrir une solution appropriée par restructuration des éléments de la situation.

Pour expliquer comment se déroule l'apprentissage, les gestaltistes font appel au phénomène d'insight qui est illustré à partir de l'expérience ci-après :

Vous avez 9 points disposés en carré, votre tâche consiste à les réunir en dessinant quatre lignes droites sans lever le crayon.



Dans cette situation, la découverte de la solution est rendue difficile par la présence d'une bonne forme: les points à relier sont organisés selon un carré. Pour découvrir la solution, il faut se libérer de cette bonne forme afin de réaliser un tracé qui sorte des limites de celle-ci. Pour désigner la prise de conscience qui permet au sujet de sortir des limites du carré, les gestaltistes utilisent le terme "insight".

L'apprentissage par insight décrit par les gestaltistes s'oppose à l'apprentissage par association des béhavioristes par le fait qu'il ne repose pas sur un processus d'amélioration continu de la conduite mais traduit plutôt le passage, souvent brutal, d'un état à un autre qui donne lieu à une restructuration de la perception de la situation.

Les apports et les limites de ce modèle

Ce modèle remet en cause l’apprentissage comme association simple (importance du contexte). Ainsi, dans ce modèle, apprendre c'est organiser ou réorganiser différemment les éléments. Le sujet a un rôle actif dans l'apprentissage.

Ce modèle a permis de montrer que l’apprentissage pouvait se produire par restructuration (brutale) de la perception de la situation. Ill est un précurseur du constructivisme piagétien.

Exemple : lecture

Lors de la lecture d'un texte, les mots sont perçus globalement:

Le temps nécessaire pour lire un mot familier est bien inférieur à celui qu'exige la perception séparée de chacun des éléments qui le compose

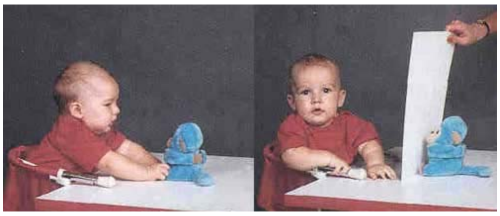
Lors de la présentation très rapide d'un mot (quelques centièmes de secondes), on ne s'aperçoit pas de l'altération voire de la suppression d'une lettre. Pour un mot familier, tout se passe comme si la lettre manquante était réellement perçue.

Constructivisme : l'apprentissage dans l'interaction sujet- objet (Piaget)

Contrairement aux béhavioristes pour lesquels l'individu est modelé par son environnement, Piaget considère que l'apprentissage est le résultat d'une **interaction** entre le sujet et son environnement. Le constructivisme a pour objectif d'étudier le mode de construction des connaissances chez l'individu dans le but de rendre compte du mode de construction de la connaissance scientifique. La méthode employée est la méthode clinique: interrogation guidée pour mettre en évidence les raisonnements utilisés par les enfants.

Il s'agit de dégager la structure caractéristique, la logique des différents stades de développement

Dans cette théorie développée à l'origine par Piaget, le sujet apprend en s'adaptant à un milieu; c'est en agissant sur le monde qu'il apprend. Ainsi, on postule que l'enfant est un individu ayant son propre rythme d'évolution. Cette théorie est en contradiction avec les pédagogies attachées à des programmes précis et valables pour tous, et part du principe que l'on apprend en agissant sur le monde qui nous entoure.

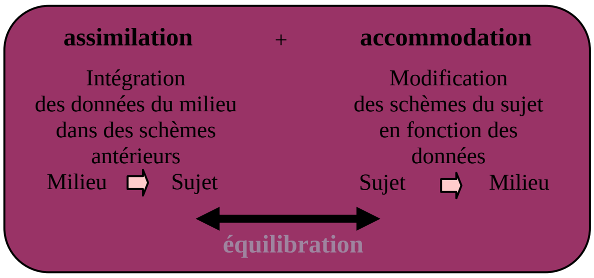


Les 3 stades principaux du développement sont :

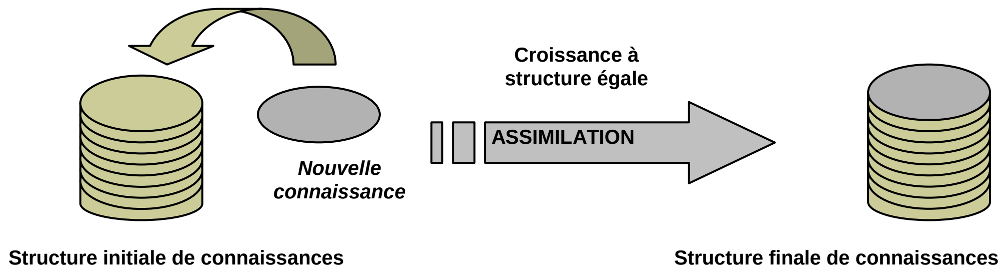
- Stade de l'intelligence sensori-motrice (0-2 ans): construction de l'objet permanent et de l'espace proche

- Stade des opérations concrètes (2-11 ans): construction des notions de quantité, de fonction symbolique, du langage, de la conservation, de la réversibilité, de l'inclusion, de la classification…
- Stade des opérations formelles: passage à la pensée conceptuelle et socialisée, raisonnement hypothético-déductif

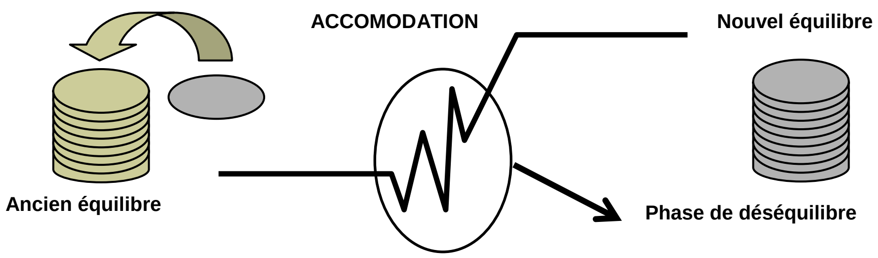
Le modèle de l'apprentissage ainsi développé définit l'intelligence comme une adaptation. L'adaptation est la recherche d'un équilibre entre l'organisme et le milieu. Cette adaptation se fait par assimilation et accommodation.



Le mécanisme de l'apprentissage se fait par assimilation et accommodation. L'assimilation est une croissance à structure égale. Elle permet d'intégrer des expériences à la théorie. L'accommodation implique une réorganisation de la structure. Elle permet d'adapter la théorie à l'expérience.



L'**assimilation** correspond à l'incorporation d'un objet ou d'une situation à la structure d'accueil du sujet (structure d'assimilation) sans modifier cette structure mais avec transformation progressive de l'objet ou de la situation à assimiler. Le sujet transforme les éléments provenant de son environnement pour pouvoir les incorporer à sa structure d'accueil.



Lorsque l'objet ou la situation résistent, le mécanisme d'**accommodation** intervient en entraînant une modification de la structure d'accueil de l'individu de manière à permettre l'incorporation des éléments qui font l'objet de l'apprentissage. Dans ce cas, le sujet est transformé par son environnement.

Les apports et les limites

Ce modèle permet de prendre en compte le rapport de l'individu à l'environnement. Il permet de dresser une typologie des apprentissages possibles en fonction des stades. Par contre, il ne prend pas en compte les rôles pour le langage, l'affectif, ni les aspects sociaux de l'apprentissage: rôle de l'enseignant, rôle des pairs.

Socio-constructivisme (Vygotski)

Le socio-constructivisme lie l'apprentissage aux agents culturels et au rôle des interactions dans et pour l'environnement social et humain.

Ce modèle prend pour origine le fait que chaque sujet a la possibilité d'agir sur l'autre (et réciproquement). Cette possibilité lui permet de transformer son activité.

Le langage a un rôle prépondérant : *« je parle donc je suis »*. En se transformant en langage, la pensée se réorganise et se modifie. Ainsi, le langage a une fonction constitutive de l'activité de pensée. Au fur et à mesure, le langage devient de plus en plus décontextualisé et abstrait, ce qui permet une pensée plus flexible

Dans ce modèle, l'acquisition de connaissances passe par une interaction entre le sujet, la situation d'enseignement, et les acteurs de la situation. Le socioconstructivisme prend en compte les conceptions des élèves, l'importance du langage et du social. *« la vraie direction du développement ne va pas de l'individuel au social mais du social à l'individuel »*

Il existe deux situations possibles d'apprentissage :

- Celle où l'enfant peut apprendre et faire seul certaines activités
- Celle où l'enfant ne peut apprendre et faire une activité qu'avec l'aide d'un adulte ou d'un pair plus âgé.

C'est à partir de ces deux situations que Vygotski définit la Zone de Proche Développement : la distance entre ce que l'enfant peut effectuer seul et ce qu'il est capable d'effectuer avec l'aide d'une personne extérieure.

Dans cette mouvance, on trouvera également les théories permettant de prendre en comte la collaboration et l'étayage : « ce qu'un enfant peut faire aujourd'hui en collaborant avec autrui, il peut le faire seul demain » (Vygotski). En dehors de cette zone, l'enfant ne peut pas réussir, même avec l'aide d'autrui. Pour Bruner: « apprendre est un processus interactif dans lequel les gens apprennent les uns des autres ». Cela l'amène à définir la notion d'étayage et le rôle de médiateur de l'enseignant.

Dans la théorie socioconstructiviste, le rôle de l'enseignant est de décomposer l'activité en sous tâches afin de les rendre plus accessibles aux élèves, faire ressortir certaines caractéristiques de la tâche afin de mettre l'élève sur la voie de la résolution, l'aider à cheminer dans son raisonnement sans lui fournir la réponse à partir de ce qu'il a déjà effectué, l'aider à verbaliser ses procédures de résolution afin de lui faire prendre conscience des stratégies à mettre en œuvre mais aussi de réinvestir ces stratégies

En guise de conclusion…

Ces différents modèles nous amènent à émettre des hypothèses générales pour la didactique

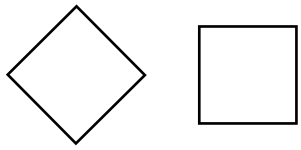
- L'acquisition de connaissances passe par une interaction entre le sujet et l'objet d'études par le biais de résolutions de problèmes
- La tête de l'élève n'est jamais vide de connaissances (conceptions)
- L'apprentissage ne se fait pas par empilement de connaissances, ni de manière linéaire
- L'élève donne un sens à une connaissance que si elle apparaît comme un outil indispensable pour résoudre un problème
- Les interactions sociales entre élèves peuvent aider à l'apprentissage

Si l'on devait résumer très brièvement les apports de chacune de ces théories, nous pourrions dire que le modèle transmissif met l'accent sur le discours et le message de l'enseignant, le bévariorisme sur le feed-back de l'enseignant par rapport aux réponses des élèves, le modèle Gestaltiste donne toute son importance à la forme des informations disponibles, le constructivisme permet de mieux penser l'organisation du milieu et des actions des élèves sur ce milieu, et enfin, le socioconstructivisme permet de prendre en compte les relations avec les autres acteurs du système éducatif.

Exemples d'application à l'enseignement des mathématiques

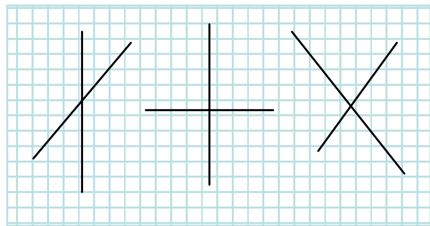
Exercice 1

On propose aux élèves les dessins ci-contre et on leur demande : « laquelle de ces formes est un carré ? »



Cet exemple montre l'influence de la présentation de l'information, tant dans la consigne que dans le choix d'orientation des formes à identifier.

Exercice 2

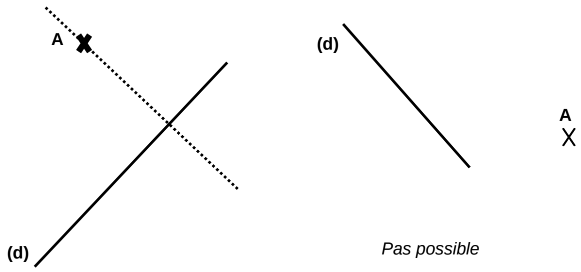


On demande aux élèves de d'indiquer quelles sont les droites perpendiculaires.

Certains élèves répondent en terme de perpendicularité par rapport aux bords de la feuille.

On voit dans cet exemple que le cadre dans lequel l'enseignant répond n'est pas celui de l'élève.

Exercice 3



On demande aux élèves de tracer la perpendiculaire à d qui passe par A. Certains élèves sont bloqués et n'osent pas prolonger la deuxième droite de façon à pouvoir tracer la perpendiculaire (insight).

Exercice 4

Voici des extraits de cahier de progression de deux enseignants

<u>Enseignant 1 : Les élèves doivent faire de façon individuelle une nouvelle fiche d'exercices</u>

1- Flore et Sébastien veulent acheter du ruban pour accrocher des médailles. 1 m de ruban coûte 1,5€. Quel est le prix de 2, 3, 5, 8, 10, 20 m de ruban?

2- Jules fait du vélo. Il a calculé que quand il fait un tour de pédalier, il parcourt 5 m. Quelle est la distance parcourue en 2 tours, 3 tours, 5 tours, 10 tours, 20 tours, 25 tours ?

3- Une école veut acheter des gommes. Elles se vendent par lot de 4. Le lot de gommes coûtent 2€. Quel est le prix de 8, 12, 20, 40, 60, 100 gommes?

4- Pour parcourir 1 km, Sofia met 20 minutes. Combien de temps mettra-t-elle pour parcourir 2, 3, 6 km?

<u>Enseignant 2 : la leçon se déroule en deux grandes étapes</u>

Etape 1 : Au début de ma première séance, j'ai redonné aux élèves ce problème relevant de la proportionnalité: « 15 calendriers coûtent 45 €. Quel est le prix de 30, 80, 120 calendriers ? Quel est le prix de 45, 75, 90, 105 calendriers ? Les élèves travaillaient par deux selon la consigne: « résoudre cet exercice en essayant de trouver différentes façons de le résoudre.

Etape 2 : Cette phase de recherche a été suivie d'une mise en commun collective durant laquelle les groupes d'élèves venaient exposer au tableau leurs procédures. Les différentes démarches ont été analysées, validées ou non selon le cas, et comparées pour leur efficacité. C'est à ce moment que j'ai introduit le mot « proportionnalité »: le nombre de calendriers et leur prix sont proportionnels.

Essayez de reconstruire les présupposés implicites de ces enseignants concernant l'apprentissage des élèves en relation avec les théories présentées au cours de ce chapitre.

Chapitre

3

Le contrat didactique

Attentes du professeur et des élèves dans le cadre de l'enseignement

Comment expliquer les résultats plutôt étonnants de cette expérience intitulée « l'âge du capitaine » de Stella Baruk :

On a proposé à 97 élèves de CE1 et CE2 le problème suivant : Sur un bateau il y a 26 moutons et 10 chèvres. Quel est l'âge du capitaine ? *Parmi les 97 élèves, 76 ont donné l'âge du capitaine en utilisant les nombres figurant dans l'énoncé.*

Il est possible de comprendre ces réponses en mettant en jeu un concept de la didactique : le contrat didactique.

Un système d'attentes réciproques

Dans le cadre de la classe, les enseignants attendent « quelque chose » des élèves et réciproquement, les élèves attendent « quelque chose » de l'enseignant. Ce « quelque chose » traite de l'enseignement et de l'apprentissage.

L'efficacité de la relation dépend de l'intelligence mutuelle des intentions de l'autre

Il existe une différence entre le contrat didactique et le contrat pédagogique. Le contrat didactique dépend toujours des connaissances en jeu, alors que ce n'est pas le cas du contrat pédagogique.

Ainsi, le professeur est supposé créer des conditions suffisantes pour l'appropriation des connaissances et reconnaître cette appropriation quand elle se produit, et réciproquement, l'élève est supposé satisfaire ces conditions. La relation « didactique » doit continuer coûte que coûte.

Une définition

Le contrat didactique, c'est l'ensemble des comportements de l'enseignant qui sont attendus de l'élève, et l'ensemble des comportements de l'élève qui sont attendus de l'enseignant…

Il s'agit d'un ensemble des règles implicites qui permet de déterminer les rôles respectifs de l'élève et du maître dans la classe par rapport au savoir.

Interprétation en termes de contrat didactique

Si l'on souhaite interpréter les réponses données par les élèves au problème de l'âge du capitaine, on peut dire que dans la classe de mathématique :

- Un problème posé a une réponse et une seule

- Pour parvenir à cette réponse, toutes les données doivent être utilisées
- Aucune autre indication n'est nécessaire
- La solution fait appel aux connaissances enseignées

Par ailleurs, de manière assez générale, les enseignants ne peuvent pas donner des exercices impossibles à résoudre.

Des exemples de problèmes

Problème qui indique clairement quels sont les apprentissages en cours :

- dans une école, il y a 68 filles et 54 garçons. Combien y a-t-il d'enfants dans cette école?
- Dans une classe, il y a 28 enfants. Le maître a compté les garçons. Il y en a 12. Combien y a-t-il de filles dans cette classe?

Problème qui peut être résolu de différentes manières, car sa compréhension dépend des apprentissages en cours (addition ou soustraction) :

- le compteur de la photocopieuse marque 132. La maîtresse tire 16 photocopies. Maintenant combien marque le photocopieur?

Problème qui comporte des données supplémentaires (augmentation du degré de difficulté) et qui amène à s'interroger sur les apprentissages à évaluer (soustraction ou compréhension d'un énoncé) :

- Paul joue au jeu de l'oie. Son pion est sur une case bleue. Il avance de 11 cases. Il arrive sur une case rouge. Elle est marquée 37. Quel était le numéro de la case bleue?

Intérêt du contrat didactique

Le contrat comme aide pour les élèves

Le contrat didactique a pour intérêt de faire exister les conditions qui rendent nécessaires l'objet d'enseignement. Il peut ainsi être une aide pour les élèves, en lui indiquant par exemple quelles sont les procédures à utiliser.

exemple de la multiplication

Présentation de la multiplication par l'enseignant: « La multiplication d'un entier a par l'entier b est un entier c qui exprime la somme de b entiers égaux à a. Ainsi ab = a+a+a+a+a … +a ; a figurant b fois »

Pour l'élève, la multiplication est une addition répétée (objet déjà connu) et elle ne fait problème que dans le discours de l'enseignant (nouveauté).

L'enseignant peut se justifier d'avoir introduit un nouveau savoir. Une fois nommé, on peut en parler et poser des questions à son sujet. L'élève peut « multiplier »: geste que son professeur ou ses parents reconnaîtront comme relevant bien de cette opération.

Lorsque le maître annonce « combien font quatre fois trois ? », l'élève pourra répondre « quatre fois trois font douze », ce que le maître pourra interpréter comme « la leçon est comprise, on peut passer à la suivante ». Or, rien n'indique dans la réponse de l'élève quel savoir a été utilisé?

L'élève peut avoir effectué 4+4+4 (Réponse en termes de répétition d'addition et pas de multiplication!).

L'élève se pose implicitement la question « Quand faut-il utiliser la multiplication ? » à laquelle répond l'enseignant « Comment faut-il utiliser la multiplication »

Le contrat comme aide pour l'enseignant

Le contrat didactique peut également être une aide pour l'enseignant : connaître les règles de ce contrat peut lui permettre d'interpréter les réponses des élèves en recherchant le sens mathématique ou social des réponses fournies (mais aussi des énoncés de problèmes : certains énoncés n'ont de sens que dans la classe de mathématiques).

Exemple du dénombrement

En terminale…suite au cours sur les dénombrements… l'enseignant donne le problème : « quel est le nombre de tenues dont je peux disposer, sachant que j'ai 3 paires de chaussures, 4 pantalons, 6 tee-shirts et 2 pulls ». La réponse ne peut être que : 3x4x6x2=144. Quelle autre réponse possible? Et pourtant, d'un point de vue social, cette question n'a aucun sens.

Des effets du contrat didactique

De manière générale, le professeur a envie que ses élèves réussissent. Trois effets du contrat liés à cette envie de réussite sont fréquemment vus dans les classes :

- Effet Jourdain : Un comportement banal de l'élève est interprété comme la manifestation d'un savoir savant.
- Effet Topaze : Lorsqu'un élève rencontre une difficulté, l'effet topaze consiste, d'une manière ou d'une autre à la surmonter à sa place.
- Effet de l'attente incomprise : Croire qu'une réponse attendue des élèves va de soi.

L'effet Jourdain

Ainsi nommé suite à l a scène du bourgeois gentilhomme (Molière)

> Philo : Vous allez donc écrire de la prose.
> M. Jourdain : Non, je ne veux ni prose, ni vers.
> Philo : Il faut bien que cela soit l'un ou l'autre.
> M. Jourdain : Pourquoi ?
> Philo : Parce qu'il n'y a, pour s'exprimer, que la prose ou les vers.
> M. Jourdain : Il n'y a que la prose ou les vers ?
> Philo : Oui Monsieur. Tout ce qui n'est point prose est vers et tout ce qui n'est point vers est prose.
> M. Jourdain : Et quand l'on parle, qu'est-ce donc que cela ?
> Philo : De la prose !
> M. Jourdain : Quand je dis "Nicole, apportez-moi mes pantoufles et mon bonnet de nuit", c'est de la prose ?
> Philo : Oui ! Monsieur !
> M. Jourdain : Par ma foi, il y a plus de quarante ans que je dis de la prose sans que je n'en sache rien.
> Philo : Voilà ce que c'est que d'être instruit, monsieur.

Dans cette extrait, le maître de philosophie révèle à Jourdain ce que sont la prose ou les voyelles. Le professeur reconnaît l'indice d'une connaissance savante dans les réponses des élèves. Cela lui permet d'éviter le constat d'échec. De manière générale, dans ce type d'effet, l'élève traite un exemple, et le maître y voit la structure. Cela permet au maître d'insérer la connaissance dans des activités familières des élèves (il a l'impression que l'introduction de nouvelles connaissance est moins arbitraire).

Un exemple en mathématiques

Élève: « 2x1=2; 1x2=2 »

Professeur: C'est bien, tu sais que 1 est neutre pour la multiplication et la multiplication est commutative

Dans cet exemple, l'élève obtient la bonne réponse par une banale reconnaissance et le professeur atteste la valeur de cette activité par un discours mathématique et épistémologique savant.

L'effet Topaze

Cet effet tient son nom d'une scène de « topaze » de Marcel Pagnol

> Topaze, il dicte en se promenant.
> "Des moutons... des moutons... étaient t-en sûreté... dans un parc ; dans un parc. (Il se penche sur l'épaule de l'Elève et reprend.) Des moutons... moutonss... (L'Elève le regarde, ahuri.)
> Voyons, mon enfant, faites un effort. Je dis moutonsse. Etaient (il reprend avec finesse) étai-eunnt. C'est-à-dire qu'il n'y avait pas qu'un moutonne. Il y avait plusieurs moutonsse."

Il s'agit d'abord pour l'élève d'un problème d'orthographe et de grammaire. Devant les échecs répétés, Topaze négocie à la baisse les conditions dans lesquelles l'élève finira par mettre un s. Le maître « suggère » la bonne réponse en la dissimulant sous des codages didactiques de plus en plus transparents. Le professeur prend à sa charge l'essentiel du travail, les connaissances visées disparaissent complètement...

Un exemple en mathématiques

Passage de la multiplication à l'addition

L'enseignant: 5x4. Cela revient à faire : 4+4+4+4+4= 8+4+4+4=12+4+4=16+4=20

Le professeur simplifie la tâche en faisant en sorte que l'élève obtienne la bonne réponse par une banale lecture des questions du professeur et non par une authentique activité mathématique spécifique sur la structure proposée

De l'attente incomprise...

Cet effet résulte de la complexité du (des) jeu(x) questions / réponses dans la classe

On pourra prendre comme exemple une question posée par un professeur d'histoire en collège : " Au moyen âge, les gens des villes élevaient des … ? ". Question à laquelle les élèves tentent de répondre " des cochons, des enfants, … "... Alors que la réponse attendue était : " des cathédrales ! "

Les effets de contrat au niveau de la conception des programmes

Certains effets du contrat sont directement en lien avec la conception des programmes officiels. Ainsi, dans le contexte : la réforme des « mathématiques modernes » des années 70, deux effets ont été nommés en hommage aux réformateurs de l'enseignement qui les ont produits

Effet Déniès (glissement métacognitif)

La compréhension de la règle du jeu à appliquer exige la connaissance qu'on prétend enseigner

Il peut être assimilé à un effet Jourdain à grande échelle (il n'y a rien à savoir)

Dans cet effet de contrat, il s'agit de remplacer un problème dont le savoir mathématique à enseigner donne la solution par un problème dont la solution matérielle peut s'obtenir aisément. L'enseignant n'aura plus qu'à interpréter cette réussite comme la preuve suffisante de la construction du savoir visé.

Exemple

Les élèves sont invités à permuter des pots de yaourt de manière exhaustive, et on leur explique après qu'ils ont étudié "une structure mathématique de groupe fini".

Effet Papy (ou usage abusif de l'analogie)

Il s'agit d'une substitution d'une activité mathématique par une activité de manipulation de symboles. On peut l'assimiler à un effet Topaze sans contenu disciplinaire.

Dans ce cas, il s'agit de remplacer la construction mathématique par une explication fondée sur la manipulation de symboles de substitution dont l'usage analogique nécessite de nouvelles explications, etc. L'emploi des notations analogues était supposé produire le même savoir que celui des notations mathématiques ordinaires .

Exemple

Tracer des flèches dans les deux sens entre les prénoms des membres d'une même famille pour expliquer « la relation d'équivalence » : pour les élèves, le sens de cette activité n'est pas qu'elle soit l'analogue d'une activité mathématique dont ils n'ont pas idée.

Exercice d'application

1. Concevoir un problème nécessitant de mettre en œuvre des compétences liées à l'addition, soustraction, multiplication…
2. Faire le corrigé de l'exercice
3. Pointer les variables didactiques (celles qui influencent la résolution, les procédures d'entrées, les connaissances mises en œuvre…)
4. Les élèves peuvent-ils répondre uniquement sur la base du contrat didactique?

D'autres exemples de problèmes

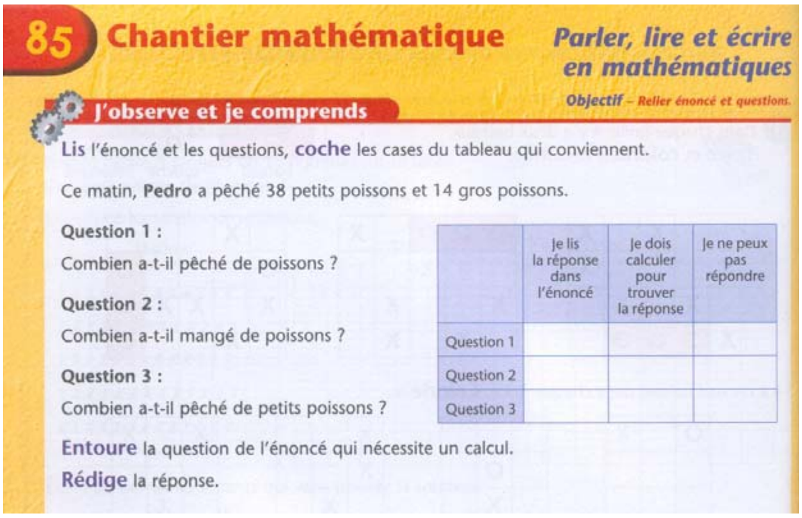
1. Analyser ces problèmes en termes de variables
2. Est-il possible de répondre uniquement sur la base d'un contrat didactique ? lequel ?

Pierre joue deux parties de billes à la suite. Au cours de la deuxième partie, il gagne 13 billes. Au total, après les deux parties, il se rend compte qu'il a perdu 7 billes. Que s'est-il passé au cours de la première partie?

Entre 1970 et 1980, la population du village a diminué de 154 habitants. Entre 1980 et 1990, elle a augmenté de 78 habitants. Que s'est-il passé pour la période 1970-1990?

Exercices d'application

Quels sont les éléments de contrat qui apparaissent dans ces activités ?



85 Chantier mathématique

Parler, lire et écrire en mathématiques

Objectif – Relier énoncé et questions.

J'observe et je comprends

Lis l'énoncé et les questions, coche les cases du tableau qui conviennent.

Ce matin, Pedro a pêché 38 petits poissons et 14 gros poissons.

Question 1 :
Combien a-t-il pêché de poissons ?

Question 2 :
Combien a-t-il mangé de poissons ?

Question 3 :
Combien a-t-il pêché de petits poissons ?

	Je lis la réponse dans l'énoncé	Je dois calculer pour trouver la réponse	Je ne peux pas répondre
Question 1			
Question 2			
Question 3			

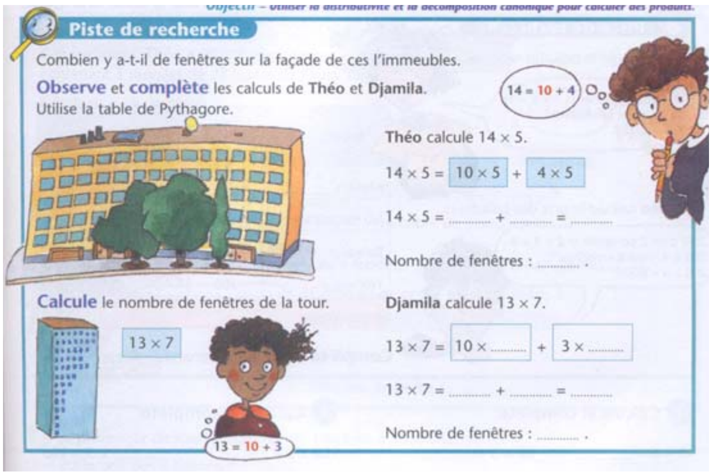
Entoure la question de l'énoncé qui nécessite un calcul.

Rédige la réponse.

C'est la consigne « lis l'énoncé et coche les cases du tableau qui conviennent » qui donne du sens au problème par rapport à ce qui figure comme objectif : « relier énoncé et questions ». Sans cette consigne, le problème peut apparaître dénué de sens mathématique aux élèves (une question pour laquelle on ne peut pas répondre, une autre où la réponse est dans l'énoncé), ce qui les conduirait à répondre à partir de connaissances quotidiennes (on mange un poisson par personne).Le fait que la bonne réponse soit caractérisée par « chaque colonne est utile » est un biais sérieux (on peut répondre à la dernière question en regardant dans quelle colonne on n'a pas mis de croix).

Ce biais est assez fréquent dans les énoncés, ce qui amène l'élève à penser naturellement que toutes les informations fournies sont utiles, et donc doivent être utilisées.

Ici, on peut se demander pourquoi il est demandé d'observer puis de compléter, car si l'on observe les images, toutes les fenêtres n'apparaissent pas (il faut supposer qu'elles sont bien réparties, ce qui est le cas, car il s'agit bien d'un problème de maths. Les fenêtres ne sont pas toutes dessinées… pour éviter à l'élève de toutes les compter sur le dessin ! On leur demander d'observer uniquement pour trouver quels sont les nombres à multiplier. Il faut donc l'élève ait intégré le contrat implicite : en mathématiques, les fenêtres (ou gâteaux dans un plat, ou autre) sont toujours placés de manière à ce que l'on puisse calculer leur nombre en multipliant le nombre de lignes par le nombre de colonnes. Ce qui n'est pas toujours le cas, comme montré dans l'image ci-contre.



Objectif – Utiliser la distributivité et la décomposition canonique pour calculer des produits.

Piste de recherche

Combien y a-t-il de fenêtres sur la façade de ces immeubles.

Observe et complète les calculs de Théo et Djamila.
Utilise la table de Pythagore.

14 = 10 + 4

Théo calcule 14 × 5.

14 × 5 = 10 × 5 + 4 × 5

14 × 5 = ... + ... = ...

Nombre de fenêtres : ....

Calcule le nombre de fenêtres de la tour.

13 × 7

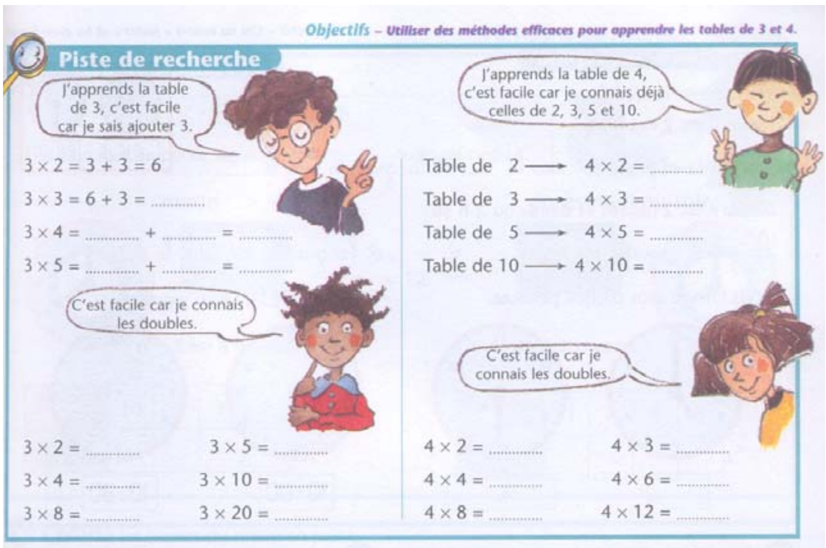
Djamila calcule 13 × 7.

13 × 7 = 10 × .... + 3 × ....

13 × 7 = ... + ... = ...

Nombre de fenêtres : ....

13 = 10 + 3



Objectifs – Utiliser des méthodes efficaces pour apprendre les tables de 3 et 4.

Piste de recherche

J'apprends la table de 3, c'est facile car je sais ajouter 3.

3 × 2 = 3 + 3 = 6
3 × 3 = 6 + 3 = ...
3 × 4 = ... + ... = ...
3 × 5 = ... + ... = ...

C'est facile car je connais les doubles.

J'apprends la table de 4, c'est facile car je connais déjà celles de 2, 3, 5 et 10.

Table de 2 ⟶ 4 × 2 = ...
Table de 3 ⟶ 4 × 3 = ...
Table de 5 ⟶ 4 × 5 = ...
Table de 10 ⟶ 4 × 10 = ...

C'est facile car je connais les doubles.

3 × 2 = ... 3 × 5 = ...
3 × 4 = ... 3 × 10 = ...
3 × 8 = ... 3 × 20 = ...

4 × 2 = ... 4 × 3 = ...
4 × 4 = ... 4 × 6 = ...
4 × 8 = ... 4 × 12 = ...

Dans cet exemple, on retrouve l'idée développée en cours concernant la différence entre comment multiplier et quand multiplier. Ici, on demande à l'élève de donner les résultats de multiplications (nouvelles tables à apprendre normalement), en s'appuyant sur des choses qu'il connait déjà sous un autre nom (l'addition, les doubles, d'autres tables de multiplication). Le principe d'économie cognitive nous dit que les élèves utiliseront préférentiellement les connaissances anciennes. On est dans un effet Topaze.

Chapitre 4

La théorie des situations (Brousseau)

Introduction

Cette théorie est née dans le développement de points de vue constructivistes sur l'apprentissage et l'enseignement. Il s'agissait de mettre en place des méthodes actives privilégiant l'activité des élèves. Ainsi, on a vu naître deux grands types d'innovations : les situations problèmes et les problèmes ouverts.

La théorie des situations didactiques tente de modéliser les rôles et fonctions des différents acteurs et objets d'un système d'enseignement. Une **situation didactique** réunit l'ensemble des activités dans lesquelles des apprenants doivent mobiliser ou construire des savoirs pour atteindre des buts fixés par l'enseignant

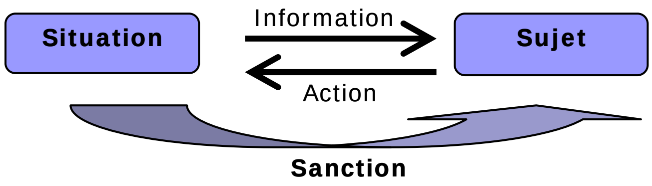
Il est possible d'analyser les processus d'apprentissage des élèves selon quatre phases différentes. Pendant ces phases, le savoir n'a pas la même fonction, et l'élève n'a pas le même rapport au savoir.

Les temps dominants de la théorie des situations sont : l'action, la formulation, la validation et l'institutionnalisation. Entre chaque temps, il y a des échanges et régulation entre élèves ou groupes d'élèves et le savoir en jeu

Cette théorie se base sur un contrôle auto régulé des apprentissage: dialectique.

Approche théorique

Dialectique de l'action



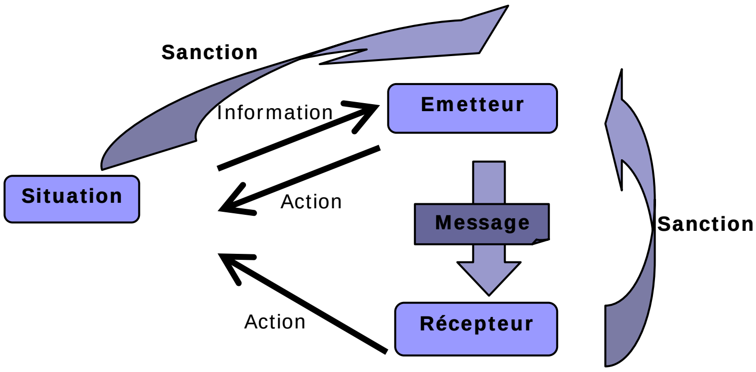
La situation d'action vise à poser à l'élève un problème dont la meilleure solution, dans les conditions proposées, est la connaissance à enseigner. Cette situation permet à l'élève d'agir sur elle et lui renvoie de l'information sur son action. Attentions, il ne s'agit pas uniquement une situation de manipulation libre ni imposée.

Cette dialectique permet à l'élève de juger le résultat de son action, d'ajuster l'action (sans intervention du maître)

Cette situation est inspirée de l'apprentissage par adaptation (Piaget). En effet, il y a instauration d'un dialogue (dialectique) entre l'enfant et la situation.

Lors de la résolution de la tâche, il y a création d'un modèle implicite.

Dialectique de la formulation

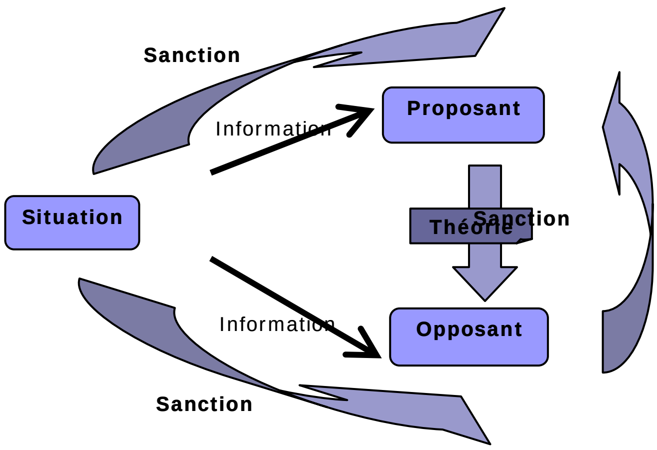


L'élève explicite son modèle implicite de manière à ce que cette formulation ait un sens (obtenir ou faire obtenir un résultat)

Pendant cette dialectique, il y a échange d'information (messages oraux ou écrits, langage naïf ou mathématique) avec d'autres élèves (émetteurs-récepteurs).

Cette dialectique amène l'élève à la création d'un modèle explicite, formulé à l'aide de signes, règles communes, connues ou nouvelles.

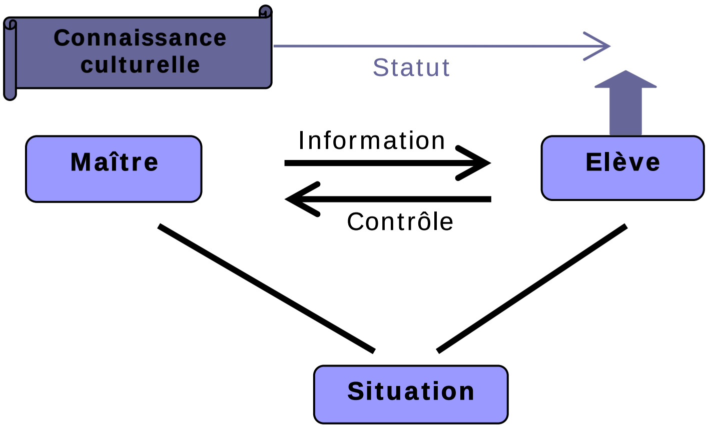
Dialectique de la validation



La formulation est une validation empirique insuffisante. L'élève doit montrer pourquoi le modèle créé est valable: il doit convaincre (les autres élèves, le maître).

Durant cette phase, l'élève (proposant) soumet un message mathématique (modèle de la situation) comme assertion à un interlocuteur (opposant). On assiste alors à une validation sémantique et syntaxique.

Dialectique d'institutionnalisation



Cette dialectique vise l'intégration de la nouvelle connaissance au patrimoine mathématique de la classe. Le professeur fixe conventionnellement et explicitement le statut cognitif du savoir : les connaissances changent de statut. La nouvelle connaissance est étiquetée savoir officiel, les élèves peuvent la retenir et l'appliquer

L'institutionnalisation prématurée interrompt la construction du sens, nuit à l'apprentissage, met le maître et les élèves en difficulté, l'institutionnalisation tardive renforce les interprétations inexactes, ralentit l'apprentissage, gêne les applications.

L'institutionnalisation est toujours négociée dans une dialectique

Des exercices d'entraînement, d'application et de réinvestissement complètent le processus

Dans la pratique…

Les 4 phases ne se succèdent pas régulièrement : elles sont imbriquées (allers-retours)

Il y a parfois des ruptures de contrat didactique

La théorie des situations est une aide pour décomposer les processus et analyser les phénomènes observés (rarement applicable telle quelle).

Exemple: la course à 20

"le but de cette leçon était d'introduire une révision de la ***division*** *(dans des circonstances où le sens de l'opération n'était pas conforme aux apprentissages antérieurs) et de favoriser la découverte et la démonstration, par les enfants, d'une suite de théorèmes".*

Règle d'action: deux équipes de joueurs; à tour de rôle, chaque équipe propose un chiffre de 1 à 3, et l'additionne au chiffre proposé par l'équipe adverse. Gagne l'équipe qui arrive à 20.

1. Jouer le jeu
2. Comment gagner à tous les coups?

Le jeu dans la classe se déroule en **quatre phases** :

- explication de la procédure
- jeu à 1 contre 1 *"Au cours de cette dialectique de l'action, l'enfant organise ses stratégies, construit une représentation de la situation qui lui sert de modèle et de guide pour prendre ses décisions. Cet ensemble de*

relations [...] peut rester tout à fait implicite : l'enfant joue selon ce modèle avant d'être capable de le formuler."

- jeu à une équipe contre une équipe, chacune des deux équipes est représentée par un élève, l'équipe discute de la statégie que doit appliquer son représentant *" Pour gagner, il ne suffit pas qu'un élève sache jouer (c'est à dire qu'il ait un modèle implicite) mais il doit indiquer à ses coéquipiers quelle stratégie il propose [...]. Son seul moyen d'action est de formuler ces stratégies."*
- jeu de la découverte : les enfants énoncent des propositions qui sont discutées. *"... déroulement fictif [...] on est sûr de gagner si on peut dire 17 [...] Je ne suis pas d'accord, il y a des fois où on a joué 17 et on n'a pas gagné"*

Hypothèses d'apprentissage :

Les jeux à stratégie gagnante font appel à des opérations mentales qui aident au développement de la pensée formelle :

* décentrage : pour élaborer une stratégie gagnante, il faut imaginer ce que jouera l'autre joueur, se mettre à sa place (ce qui est assez proche de la capacité à envisager des contre-arguments opposés dans le cas d'un travail sur l'argumentation)

* généralisation : pour élaborer une stratégie gagnante, il faut :

- prendre en compte tous les coups que pourra jouer l'adversaire.

- se dégager des particularités de la partie jouée pour envisager d'autres parties possibles

* prévision : pour élaborer une stratégie gagnante, il faut poser des hypothéses - si mon adversaire fait ceci - et en envisager les conséquences : mettre en place le Si ...Alors.

Approche à partir d'une situation problème

Introduction sur les problèmes

Un problème introduit une discontinuité dans l'expérience du sujet. Traiter un problème, c'est renouer entre le présent (ce qui m'arrive), le futur (l'état meilleur), sur la base du passé (ce que je sais, ce que je suis déjà). Un problème se distingue d'une activité d'exécution pour laquelle le sujet dispose de procédures toutes faites. Ainsi, *Traiter un problème, c'est donc élaborer une procédure, une stratégie, inventer (Hoc, 1963).*

Un problème pour une personne n'est pas nécessairement un problème pour une autre. D'où la difficulté de créer des problèmes à l'école.

Dans cette perspective, les problèmes scolaires sont des tâches d'une relative complexité, mettant en jeu plusieurs compétences (par opposition aux exercices ciblés) où la solution n'est pas immédiatement disponible. Les problèmes scolaires exigent de l'élève mobilisation et initiative. Ils se fondent sur une difficulté objective concernant le savoir à construire.

Définition

C'est une situation d'enseignement qui a pour objectif de permettre aux élèves d'acquérir une connaissance nouvelle (savoir, savoir-faire, méthode, raisonnement…) et qui s'appuie sur une conception socio-constructiviste de l'apprentissage.

Pour la mise en place d'un problème dans le cadre scolaire, il faut avoir repéré une conception erronée liée à l'acquisition de la connaissance que l'on souhaite enseigner (à partir de l'analyse d'erreurs) ou une procédure correcte s'avérant lourde ou source d'erreurs.

Il est important que les élèves puissent s'engager dans la résolution du problème en mobilisant les conceptions erronées (ou procédure insuffisante).

Caractéristiques d'un problème scolaire

Les connaissances des élèves doivent être insuffisantes ou peu économiques (objectif: acquérir une nouvelle connaissance).

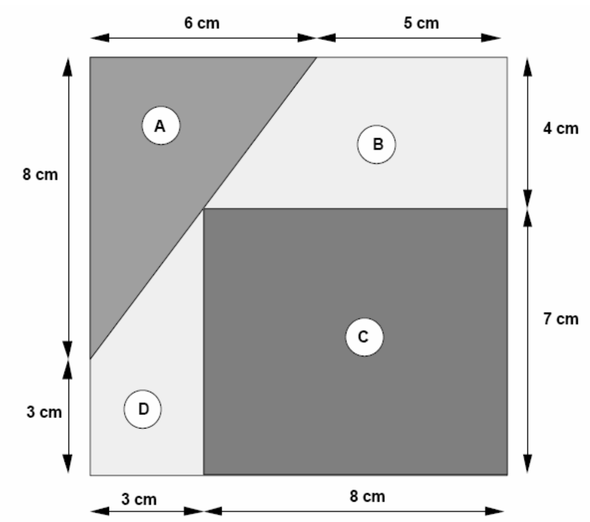
Les élèves doivent avoir un moyen de contrôler eux-mêmes leurs résultats (confrontation des résultats, conflit socio-cognitif).

La connaissance que l'on désire voir acquérir doit être l'outil le plus adapté pour la résolution du problème (à leur niveau).

Cela signifie qu'il est impératif de faire une analyse a priori de la situation (quelles sont les connaissances que les élèves peuvent utiliser, quelles sont les connaissances que la résolution du problème doit les inciter à mettre en œuvre). Dans cette analyse, on veillera à faire un choix de variables didactiques qui soit incite les élèves à voir les limites des méthodes mises en œuvre, soit les amène à mettre en œuvre des connaissances fournissant un résultat erroné.

Le problème peut avoir plusieurs cadres (géométrie, numérique). La correspondance entre cadres est imparfaite ce qui conduit les élèves à acquérir des connaissances différentes. La construction de connaissances dans différents cadres (différents registres sémiotiques) est un facteur favorisant la construction du sens de ces connaissances.

Exemple : l'agrandissement du puzzle



Les consignes

Découper aussi soigneusement que possible le puzzle en quatre morceaux. Chaque élève prendra possession d'une pièce

Mesurer les dimensions de la pièce possédée

Agrandir sa pièce. A la fin, on doit pouvoir reconstituer le puzzle avec toutes les pièces agrandies.

Le côté du puzzle qui mesure 4 cm doit mesurer 6 cm après agrandissement.

Le déroulement

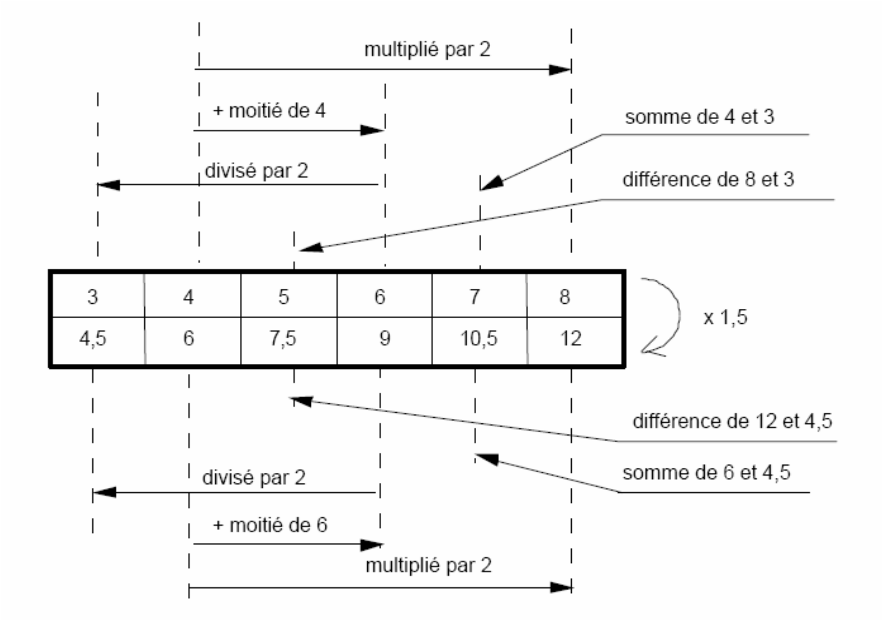
<u>Phase 1 :</u> chaque élève cherche seul et réalise sa pièce agrandie. Le groupe tente de reconstituer le puzzle à l'aide des pièces agrandies.

<u>Phase 2 :</u> Le groupe discute des méthodes de construction utilisées. Dans les groupes en difficulté, le professeur suggère d'écrire les dimensions sous forme d'un tableau de correspondance. Chaque groupe consigne sur une feuille la méthode utilisée et va inscrire sa méthode au tableau

<u>Phase 3 :</u> Les méthodes affichées au tableau sont critiquées par l'ensemble des élèves. Cette phase permet la validation ou rejet des différentes techniques.

Phase 4 : il s'agit d'une phase de synthèse où le professeur institutionnalise qu'agrandir une figure c'est multiplier les dimensions de cette figure par un nombre constant supérieur à 1

Schéma des procédures que les élèves peuvent utiliser



La suite des consignes

Le puzzle que vous devez maintenant construire est tel que le côté qui mesure 8 cm devra maintenant mesurer 6 cm.

Le tableau suivant est proposé

4	6	8	5	7	3
		6			

Synthèse: Réduire une figure, c'est multiplier les dimensions de cette figure par un nombre constant inférieur à 1

Analyse

L'expérience montre que les élèves ajoutent spontanément un même nombre aux dimensions d'une figure géométrique pour l'agrandir (conception du modèle additif). Mais le fait d'ajouter 2 cm ne permet pas de reconstruire le puzzle.

Les élèves ont une vision précise du but à atteindre. Mise en œuvre de la conception erronée liée à la formulation de la consigne « cette pièce qui mesure 4 cm devra mesurer 6 cm »

Le contrôle se fait par le biais de la réalisation du puzzle (le pièces doivent se joindre parfaitement).

Au niveau du choix des variables didactiques, le coefficient d'agrandissement (1,5) est tel que les élèves peuvent ajouter à chaque dimension sa moitié. Pas de nécessité de passer par le coefficient multiplicateur.

Ce problème permet le passage d'un problème de géométrie à un cadre numérique.

Les situations problèmes

On trouve deux grands types de situations problèmes :

- Les problèmes pour lesquels l'acquisition des connaissances passe par la confrontation à un obstacle en vue de la remise en cause d'une conception erronée
- Les problèmes pour lesquels l'acquisition des connaissances passe par la prise de conscience qu'une procédure (juste) devient insuffisante parce que peu économique ou source d'erreurs

En classe, enseigner à partir de situations problèmes amène à une gestion un peu particulière. Les effets sur l'apprentissage peuvent être différents selon si le travail se fait en groupe ou de manière individuelle, si l'enseignant apporte de l'aide ou non.

Dans tous les cas, l'élève doit acquérir des nouvelles connaissances, ce qui signifie que :

- Le problème doit devenir son problème
- Le professeur doit assurer la dévolution du problème à la classe

L'enseignant doit donc choisir une organisation qui permette aux élèves d'être pleinement responsables de la solution du problème et d'être autonomes dans la recherche de solutions.

Phases de la gestion de classe

Phase d'action (les élèves individuellement dans les groupes)

Les élèves s'approprient le problème à partir de leurs connaissances anciennes. Dans cette phase, les élèves utilisent des procédures implicites.

Pour les élèves, l'enjeu est de réussir la tâche. Pour l'enseignant, c'est de permettre aux élèves de s'approprier une procédure

Phase de formulation (les élèves entre eux)

Les élèves explicitent (oral, écrit) les procédures et les solutions. L'eneju est ici de réussir la communication.

Phase de validation (les élèves entre eux)

Dans cette phase, il s'agit de se convaincre et de convaincre les autres que la solution est valable. L'enjeu est de valider une procédure explicitée lors de la phase précédente.

Phase d'institutionnalisation sous la responsabilité du maître)

Lors de cette phase, le maître soit identifier les nouveaux savoirs et savoir-faire, préciser les conventions de langage, homogénéiser les connaissances de la classe : préciser les savoirs construits, ceux à retenir, leur forme.

Phase de réinvestissement

Cette phase permet d'aider les élèves à se familiariser avec les nouveaux acquis et de faire fonctionner les acquis dans différentes situations (champ d'application).

Poids relatif des phases

En fonction de la notion à étudier, des objectifs d'enseignement, les situations proposées en classe mettront l'accent sur des phases différentes.

- Acquisition de concepts, procédures

- Enjeu: réussir la tâche
- Situation d'action
- Acquisition de vocabulaire
- Enjeu: réussir la communication
- Situation de formulation
- Outil de preuve ou règle de débat
- Enjeu: convaincre les autres
- Situation de validation

Les limites et les avantages des situations-problèmes

Il n'est possible de mettre en œuvre des situations problèmes que dans le cas des disciplines dont le domaine de validité est le « vrai ». Ce type de situation n'est pas pertinent pour tous les concepts. Par ailleurs, la gestion en classe est complexe (temps, effectif). Dans les situations problèmes, il n'y a pas de prise en compte de l'affectif (phase de déstabilisation)

Par contre, ces situations permettent de donner un statut à l'erreur (significative d'un état de connaissances, point d'appui), de prendre en compte les conceptions des élèves mais également le problème posé par le sens des connaissances

Comme nous l'avons vu dans le chapitre sur les différentes approches de l'enseignement et de l'apprentissage, ces situations remettent en cause la « pédagogie des petites marches ». Effectivement, il est possible que les élèves adaptent leurs conceptions au fur et à mesure des problèmes posés sans qu'ils prennent conscience de leurs insuffisances. Les situations problèmes les amène au contraire à percevoir l'insuffisance des connaissances acquises et cela les conduit parfois franchir des grandes marches.

Exemples de situations problèmes

Demander aux élèves de trouver la carte qui manque dans un jeu de 7 familles auquel on a enlevé une carte et ceci dans le but d'introduire le tableau à double entrée ; demander aux élèves de fabriquer 12F avec des pièces de 1F, de 2F et de 5F alors qu'ils n'ont pas encore vu ce qu'est une addition et ceci dans le but d'introduire la notion d'addition ; demander aux élèves combien de boîtes de douze oeufs on peut fabriquer avec 135 oeufs alors qu'ils n'ont pas encore vu ce qu'est une division et ceci dans le but d'introduire la notion de division.

Chapitre
5

Résolution de problèmes

Exemple d'activité mathématique dans la classe

Définition : qu'est-ce qu'un problème…

On peut définir l'activité du mathématicien comme « formuler et résoudre des problèmes ». Ces problèmes peuvent répondre à des questions d'ordres différents :

- Questions d'ordre pratique: le calcul pour répondre aux besoins du commerce
- Questions scientifiques: notamment en physique (Galilée), pour modéliser la situation étudiée
- Questions internes aux mathématiques: recherche de nouvelles décimales de π

Dans le cadre scolaire, « un problème est généralement défini comme une situation initiale, avec un but à atteindre, demandant au sujet d'élaborer une suite d'actions ou d'opérations pour atteindre ce but. Il n'y a problème, dans un rapport sujet/situation, que si la solution n'est pas disponible d'emblée, mais possible à construire. C'est dire aussi qu'un problème pour un sujet donné peut ne pas être un problème pour un autre sujet, en fonction de leur niveau de développement intellectuel par exemple » (J. Brun)

On notera donc des différences entre le problème du mathématicien et le problème de l'élève. Le problème du mathématicien n'est pas celui de l'élève : celui de l'élève a déjà été résolu, et il le sait. L'élève doit accepter de rentrer dans le jeu. Le temps de recherche du mathématicien n'est pas défini à l'avance, celui de l'élève est compté.

Cette définition du problème mathématique amène une interrogation : qu'est-ce que l'activité mathématique? En fait, elle regroupe différents types d'activité : résoudre des problèmes, modéliser, argumenter, démontrer, valider, expliquer, passer à l'abstraction, généraliser, élaborer des théories. Bien évidemment, l'élève n'a pas accès à l'ensemble des activités mathématiques : il ne voit de cette activité que ce que l'enseignement veut lui en montrer.

Dans les nouveaux programmes de 2002 il est clairement stipulé que la résolution de problèmes est la source des apprentissages. On peut tenter de réfléchir à cette affirmation.

Intérêt de la résolution de problèmes

Dans les programmes, on trouve la phrase suivante : « élaborées comme des <u>réponses efficaces à des problèmes</u>, les premières notions mathématiques sont identifiées, puis étudiées dans le but d'être réutilisables pour résoudre de nouveaux problèmes ».

Ceci nous ramène à la dialectique outil/objet (les concepts mathématiques comme outils de résolution ou comme objets d'apprentissage) :

« L'élaboration de connaissances se réalise au travers de la résolution de problèmes, leur maîtrise nécessité des moments d'explicitation et de synthèse, et leur efficacité est conditionnée par leur entraînement dans des exercices qui contribuent à leur mémorisation. »

L'activité de résolution de problèmes peut se décomposer en différentes sous-tâches :

- Chercher : la solution n'est pas immédiate
- Tâtonner, faire des essais
- Se tromper, revenir en arrière
- Vérifier
- Utiliser des connaissances, les mettre en lien
- Donner une réponse
- Rédiger sa solution
- Convaincre les autres

Cette définition de la résolution de problèmes implique une organisation de la classe. Effectivement, on ne trouve pas toujours tout de suite, on n'a pas tout de suite une solution parfaite. Ce qui signifie que pour le professeur, il faut accepter de laisser du temps pour chercher, de montrer que l'on peut chercher, de laisser les élèves hésiter, se tromper, faire des essais, de ne pas exiger tout de suite une solution parfaite, de faire des liens entre les différents problèmes résolus pour montrer leur caractère plus général.

Faire de la résolution de problèmes un moyen d'apprendre les mathématiques sous entend des hypothèses sur l'apprentissage liées à l'influence de la discipline (les mathématiques se sont construites à partir des problèmes), mais aussi à l'influence de Piaget (théorie constructiviste de l'apprentissage: on apprend en agissant sur le monde) et à celle de Vygotski (aspects sociaux des apprentissages: on apprend à travers les processus de communication).

Exemples des problèmes

Olivier a 12 billes et Marie en a 6. Combien de billes ont-ils en tout ?

Pierre a 543 billes et Leila en a 1256. Combien de billes ont-ils en tout ?

Il y a dix ans Jean pesait 53 kg. Il pèse maintenant 67 kg. De combien a-t-il grossi ?

Louise a gagné 9 billes en 2 parties. Elle en a perdu 6 à l'une des parties. Combien en a-t-elle gagné à l'autre ?

Résoudre des problèmes à travers les différents cycles d'enseignement

A chaque cycle, de nouveaux types de problèmes sont proposés. Cela suppose d'avoir défini une progression des apprentissages, c'est-à-dire des compétences à acquérir dans chaque cycle ou dans chaque classe. D'où élaboration de progressions des apprentissages à acquérir dans chaque cycle puis classe. Cette progression est révélatrice de l'importance des phases d'institutionnalisation.

Classification des problèmes

On peut classer les problèmes selon différentes catégories :

- À partir des objectifs pédagogiques
  - Problèmes d'introduction d'une notion
  - Problèmes de réinvestissement
  - Problèmes pour chercher (problèmes ouverts)
- A partir des formes d'énoncés
  - Problèmes avec énoncés longs
  - Problèmes avec énoncés à compléter
- A partir des notions mathématiques
  - Problèmes pouvant être résolus avec une notion donnée

Exemples de problèmes pour chercher

Les aimants

Pour accrocher des cartes il faut un aimant, pour accrocher des petites feuilles, il faut 2 aimants et pour accrocher des grandes feuilles il faut 4 aimants. Combien peut on accrocher de feuilles avec 36 aimants ?

Le plus grand produit

Chercher parmi les décompositions additives d'un nombre celle(s) dont le produit des termes est le plus grand.

Exemple de problème de réinvestissement

<u>Jeu à deux joueurs sur calculatrice</u>

Un des joueurs (A) affiche une nombre entier de 4 ou 5 chiffres, par exemple 47 058. Sans effacer, en utilisant uniquement les touche [+] et [=], il s'agit à chaque fois d'afficher un nouveau nombre écrit avec le même nombre de chiffres que le nombre initial et comportant un « 0 » de plus que le nombre affiché précédemment.

Par exemple, à partir de 47 058 :

47 058 [+] 2 [=] 47 060 [+] 3 000 [=] 50 060 [+] 9 940 [=] 60 000

Ce type de problème permet aux élèves de mettre en œuvre des connaissances déjà étudiées.

Evolution de la résolution de problèmes

L'objectif (implicite) de l'enseignant est de faire passer les élèves d'une résolution personnelle à une résolution experte qu'il sera amené à institutionnaliser.

La résolution personnelle provient de la réflexion d'un élève sur un problème et non une classe de problème. Elle est liée au problème et n'est pas forcément générale. Elle est souvent longue, peu adaptée à un autre problème, et surtout elle est exprimée dans le langage de l'élève.

La résolution experte est celle attendue par le maître à un moment donné du processus d'enseignement. Elle répond à un caractère de généralité, elle est performante, rapide et surtout elle est exprimée dans un langage mathématique.

La question qui se pose sur la gestion de l'évolution est : comment faire évoluer les solutions des élèves : des solutions personnelles vers les solutions expertes ?

Il est possible d'y répondre

- Par les institutionnalisations
- Par le jeu sur les variables : les nombres, la formulation des énoncés…
- Par un travail portant sur les écrits des élèves (comparaison des écrits des élèves et de celui donné par l'enseignant)

Les étapes de la résolution de problèmes

Comme nous l'avons vu précédemment, la résolution de problèmes implique différents types d'activités. Dans un premier temps, l'élève doit lire l'énoncé et se construire une représentation du problème. Ensuite, il doit élaborer, instancier et exécuter une procédure de résolution. La dernière étape est la communication du résultat.

Chacune des étapes peut être source de difficulté pour les élèves

Lecture de l'énoncé

Lire, c'est comprendre (programmes), c'est se construire une représentation de la situation décrite à partir de la sélection d'indices qui est fonction :

- Des premiers mots rencontrés dans l'énoncé
- Des consignes données
- Des expériences scolaires et sociales du lecteur

Les connaissances en jeu dans la lecture d'un problème sont les connaissances mathématiques en jeu (en cours de construction), mais aussi d'autres connaissances mathématiques (antérieures au chapitre), les connaissances sur le contexte du problème, sur certaines notations et les modes de représentation et leurs codes (graphiques, schémas, tableau, etc).

Entrent également en jeu les connaissances sur la langue (le vocabulaire, repérage de la question ou de l'injonction) et des éléments de vocabulaire spécifique aux mathématiques (sommet, agrandir, réduire, hypothèse, etc), des tournures de phrases qui peuvent être relativement complexes (Trace la perpendiculaire à D passant par A) ou spécifiques des mathématiques (sachant que, étant donné que…., soit un point …)

Enfin, des connaissances de type contrat peuvent également avoir leur importance. Ces connaissances peuvent être par exemple relatives au fonctionnement de la classe. Ces connaissances de type contrat sont souvent implicites et construites dans l'action. Elles sont facilitatrices ou non (il y a une seule solution, on ne peut faire qu'une seule opération avec les nombres présents, il faut utiliser toutes les données, utiliser les dernières notions enseignées…)

Aide à la représentation du problème

Dans tous les cas on travaillera en même temps les compétences de lecture/représentation des problèmes avec la résolution de problème.

Le fait de résoudre le problème va permettre de valider les hypothèses qui sont faites quand on lit un problème et va entraîner les élèves à chercher, à revenir en arrière, à faire des essais.

Élaboration-exécution de la procédure

Implicite

Deux éléments essentiels

Les problèmes de références et leurs solutions

Les schémas généraux de procédures (procédures reconnues comme adaptées pour des classes de problème)

Au bout du problème...

Il est important que chaque élève ait fait l'expérience plusieurs fois d'aller au bout de la résolution d'un problème

- pour qu'il construise des connaissances mathématiques
- pour le plaisir de chercher et de trouver
- pour qu'il change sa représentation des mathématiques

Multireprésentation

Il s'agit de donner un même problème une structure mathématique semblable avec (éventuellement) données semblables, mais avec des habillages différents ou des contextes différents. L'élève a donc plusieurs problèmes à résoudre et il doit choisir le problème qu'il veut résoudre en premier.

La multireprésentation amène généralement à une amélioration des performances.

Un exemple de résolution de problèmes : les problèmes ouverts

Les problèmes ouverts sont des problèmes pour chercher: Ils ont pour caractéristiques un énoncé court. L'énoncé n'induit ni la méthode, ni la solution. Le problème se trouve dans un domaine conceptuel familier aux élèves.

L'objectif des problèmes ouverts est d'initier à la démarche scientifique dans la recherche, par petits groupes, de la solution d'un problème dont l'énoncé est court, formulé en langage ordinaire, compréhensible par tous, sans indications de méthode ou solution, permettant de faire des essais, de conjecturer, et ne devant faire appel, pour sa résolution, qu'à des outils adaptés au niveau et aux savoirs du public concerné.

Exemples

Je pense à deux nombres qui se suivent. Je les additionne, je trouve 23. Quels sont ces deux nombres?

Quel est le plus grand produit de deux nombres que l'on peut faire en utilisant une fois et une seule les chiffres 1, 2, 3, ... 9 pour former ces nombres ?

On trouve l'incitation à enseigner les mathématiques à partir de tels problèmes dans les programmes : (cycle 2) « analyser des problèmes de recherche simples », (cycle 3) « élaborer une démarche originale dans un véritable problème de recherche, c'est-à-dire un problème pour lequel on ne dispose d'aucune solution déjà éprouvée »

Situation-problème vs problème ouvert

Pour mieux comprendre l'enjeu de tels problèmes, essayons de les resituer dans une typologie caractérisée par les objectifs d'apprentissage poursuivis. On peut ainsi distinguer :

- les problèmes destinés à engager les élèves dans la construction de nouvelles connaissances (souvent appelés " situations-problèmes "),

- les problèmes destinés à permettre aux élèves l'utilisation des connaissances déjà étudiées (souvent appelés " problèmes de réinvestissement "),

- les problèmes destinés à permettre aux élèves l'extension du champ d'utilisation d'une notion déjà étudiée (parfois appelés " problèmes de transfert ", avec toute l'ambiguïté liée à ce dernier terme),

- les problèmes plus complexes dans lesquels les élèves doivent utiliser conjointement plusieurs catégories de connaissances (parfois appelés " problèmes d'intégration ou de synthèse "),

- les problèmes dont l'objectif est de permettre au maître et aux élèves de raire le point sur la manière dont les connaissances sont maîtrisées (" problèmes d'évaluation "),

- les problèmes destinés à mettre l'élève en situation de recherche et donc de développer des compétences plus méthodologiques (" problème ouvert ").

Si une telle catégorisation est sans doute utile à l'enseignant pour repérer des choix possibles et guider son action pédagogique, elle a cependant des limites qu'il convient de souligner. Tout d'abord, il n'est pas certain que tous les problèmes *y* trouvent place. Et, plus fondamentalement, un même énoncé peut, selon le moment où il est proposé, selon les connaissances initiales des élèves, relever de l'une ou l'autre des catégories.

En résumé, un problème ouvert vise à faire chercher une solution originale, personnelle en utilisant les moyens du bord. La solution générale n'est pas envisageable pour les élèves. Dans les situations problèmes, il faut élaborer une connaissance qui a une portée plus générale que la seule situation. La connaissance est destinée à être institutionnalisée, reconnue socialement, et maîtrisée par chacun.

Intérêt des problèmes ouverts

Les problèmes ouverts conduisent à une activité comparable à celle du mathématicien (caractère inédit, solution inconnue). Les objectifs sont d'ordre méthodologique : il faut essayer, organiser sa démarche, mettre en œuvre une solution originale, évaluer l'efficacité de la solution, formuler et tester des hypothèses, argumenter. L'enseignant peut exploiter les différences entre élèves,. Il s'agira ainsi pour les élèves d'expérimenter la résolution de problèmes. Cela signifie qu'il doit chercher (plutôt que trouver), prendre des initiatives (essayer pour voir), être responsable de la solution

Mise en œuvre dans la classe

Pour mettre en œuvre la résolution de problèmes ouverts comme moyen d'apprendre les mathématiques, il est nécessaire que les élèves aient un temps de familiarisation avec le problème. Il faut ensuite un temps de recherche individuelle qui permet l'appropriation du problème. Après ce temps individuel, un temps de travail en groupe permet la comparaison et l'explicitation des solutions, l'élaboration et la formulation d'une solution commune. L'enseignant doit ensuite organiser un temps d'échange et de débat des solutions et enfin un temps de synthèse sur les aspects méthodologiques qui peut être l'occasion d'un réinvestissement des connaissances mises en œuvre.

Dans les classes, le caractère inhabituel de ces problèmes, en rupture avec les pratiques existantes amène souvent des difficultés à percevoir les objectifs spécifiques et donc l'intérêt de tels problèmes : qu'est-ce que les élèves doivent faire, que doivent-ils apprendre ?

Par ailleurs, les manuels ne proposent pas de tels énoncés… ce qui n'incite pas l'enseignant à en donner (voire en inventer !)

Si l'enseignant choisit de donner de tels énoncés, la difficulté ne doit pas résider dans la compréhension de la situation. La phase de recherche doit appartenir aux élèves. La mise en commun est avant tout une phase d'échanges et de débat autour des solutions proposées par les élèves. Enfin, il n'est pas exclu de re-proposer aux élèves une même situation sous des habillages différents…

Exemples

Énoncés à structure langagière semblable

Ces énoncés, qui ont une structure langagière semblable impliquent un traitement numérique différent :

- Un parking dispose de 4 niveaux de 192 places chacun. Combien de voitures peuvent stationner dans ce parking?
- Un parking dispose de 192 places sur 4 niveaux. Combien de voitures peuvent stationner par niveau?

Autre exemple :

- Une école de 6 classes passe commande de 288 pochettes de feutres. Chaque pochette contient 12 feutres. De combien de feutres disposera chaque classe?
- Une école de 6 classes passe commande de 288 feutres. Chaque pochette contient 12 feutres. De combien de pochettes de feutres disposera chaque classe?

Les termes inducteurs

Les termes inducteurs sont ceux qui amène l'élève à choisir un outil mathématique plutôt qu'un autre pour résoudre le problème.

- Aurélie mesure 160 cm. Son frère Cédric mesure 32 cm de plus. Combien Cédric mesure-t-il?
- Cédric veut acheter un blouson à 57 €. Il a un bon de réduction de 12 €. Coimbien va-t-il payer son blouson?

Dans ces exemples, les termes induisent les opérations à effectuer (plus : addition ; réduction : soustraction).

Dans d'autres cas, les termes sont trompeurs et incitent l'élève à choisir un outil mal adapté.

- Aurélie mesure 160 cm. Son frère Cédric mesure 192 cm. Combien Cédric mesure-t-il de plus que sa sœur?
- Cédric paye un blouson 45€. Il a bénéficié d'une réduction de 12€. Quel est le prix normal?

Production d'énoncés

Une activité en lien avec la résolution de problèmes consiste à faire produire aux élèves des énoncés. Produire des énoncés peut aider les élèves à lire des écrits mathématiques. Par exemple, on demande à des élèves de produire des énoncés pour lesquels la réponse fait intervenir 6 x 4. Les élèves produisent les énoncés ci-dessous :

- J'ai 6 paquets de 4 crayons. Quel nombre total?
- Marie a 6 gâteaux au chocolat et 4 aux noix. Elle veut savoir combien elle a de gâteaux.
- Maman veut acheter un bouquet. Combien coûtera un bouquet avec 6 fleurs à 4 € l'une?
- Papa achète 6 boîtes d'œufs à 4 €. Combien aura-t-il d'œufs?

Que montre l'analyse de la production de ces énoncés ?

Chapitre

6

Les champs conceptuels (Vergnaud)

Introduction

Il ne s'agit pas à la base d'une théorie de la didactique, mais psychologique.

« Une théorie cognitiviste qui vise à fournir un cadre cohérent et quelques principes de base pour l'étude du développement et de l'apprentissage des compétences complexes, notamment de celles qui relèvent des sciences et des techniques » (Vergnaud, 1996)

Les buts de cette théorie sont de fournir un cadre permettant de comprendre les filiations et les ruptures entre les connaissances et de rendre compte du processus de conceptualisation des structures mathématiques

Définitions (Vergnaud)

Le champ conceptuel

« Un espace de problèmes ou de situations-problèmes dont le traitement implique des concepts et des procédures de plusieurs types en étroite connexion, ainsi que les représentations langagières et symboliques susceptibles d'être utilisées pour les représenter »

Le schème

C'est « l'organisation invariante de la conduite pour une classe de problèmes donnée ». C'est une organisation invariante de l'activité pour une classe de situations définie. L'invariance caractérise l'organisation et non l'activité ; le schème n'est pas un stéréotype ; il permet au contraire de traiter la contingence et la nouveauté, ce qui ne serait pas le cas s'il s'agissait d'un stéréotype.

Vergnaud précise que « c'est dans les schèmes qu'il faut rechercher les connaissances en acte du sujet, c'est-à-dire les éléments cognitifs qui permettent à l'action du sujet d'être opératoire »

Concepts et schèmes

Les schèmes – concepts sont relatifs à ce que l'élève apprend. Il faut garder à l'esprit la différence entre apprentissage et enseignement. Effectivement, un concept ne peut être réduit à sa définition. Il doit pouvoir être mis en œuvre par les élèves. C'est à travers des situations et des problèmes à résoudre qu'un concept acquiert du sens pour l'enfant

On peut relever 2 classes de situations dans lesquels les schèmes fonctionnent différemment :

- Celles pour lesquelles le sujet dispose des compétences nécessaires

- Celles pour lesquelles le sujet ne dispose pas des compétences nécessaires: exploration, réflexion

Un concept est défini comme un triplet de 3 ensembles :

S: l'ensemble des situations qui donnent du sens au concept (la référence)

I: l'ensemble des invariants sur lesquels repose l'opérationnalité des schèmes (le signifié)

S: l'ensemble des formes langagières et non langagières qui permettent de représenter symboliquement le concept, ses propriétés, les situations et les procédures de traitement (le signifiant)

Exemple de champ conceptuel : structures multiplicatives

Une situation d'achat à l'unité peut donner lieu à un problème reconnu comme relevant

- de la multiplication : Quel est le prix de 15 objets valant 3€ l'un?
- de la division : Quel est le prix d'un objet si je sais que j'ai payé 15 de ces objets pour 45€ ?
- de la proportionnalité : Quel est le prix de 15 objets valant 6€ les deux?

Ces trois problèmes relèvent du champ conceptuel des structures multiplicatives.

Exemple de concept: additivité

On peut dénombrer 6 situations additives (voir plus loin). Les élèves peuvent associer à l'additivité des invariants vrais comme la commutativité (4+3 = 3+4), associativité (3+ (4+5) = (3+4) +5)[1] et des invariants faux comme par exemple affirmer que l'ordre d'addition des chiffres est indifférent. Les élèves peuvent s'être construit cet invariant à partir des exemples d'additions faites en cours (au début, il n'y a pas de retenues). Cet invariant est vrai dans certains cas (23+36) et faux dans d'autres (34+67)

L'additivité comprend des formes langagières identiques à celles utilisées dans le langage quotidien « plus, et, synonymes », des symboles « + ».

Fonctionnement des schèmes

On peut distinguer deux types de situations. Les situations dans lesquelles l'élève a les compétences nécessaires à la résolution d'une tâche et celles pour lesquelles il ne dispose pas des compétences nécessaires.

Dans les situations pour lesquelles il dispose de compétence, la mise en œuvre des schèmes se fait sous forme de conduites automatisées. L'organisation de la résolution de la tâche se fait autour d'un schème unique. On dira que les situations permettent la mise en œuvre d'automatismes.

[1] Attention ! La soustraction n'est pas associative. 3 - (5 - 2) = 3 - 5 + 2 = 0 et (3 - 5) - 2 = 3 - 5 - 2 = -4

Dans les situations pour lesquelles l'élève ne dispose pas de compétences, l'élève va procéder par amorçage successif de différents schèmes. Il va y avoir compétition entre schèmes pour au final aboutir à l'accommodation des schèmes. On dira que ce sont des situations de découvertes.

Un exemple de schème: le dénombrement d'une petite collection

Prenons le cas d'un enfant de 5 ans. On peut étudier les variations de la forme du schème "dénombrement" dans différents cas : des bonbons posés de manière aléatoire dans un plat, des assiettes réparties régulièrement sur une table, des personnes assises de manière éparse dans une pièce.

Ces situations peuvent conduire à des procédures différentes pour parvenir au dénombrement Ce qui nous intéresse, c'est l'organisation invariante du schème de dénombrement. L'enfant va procéder de la manière suivante :

- Coordination du mouvement des yeux et des gestes du doigt et de la main
- Énoncé coordonné de la suite numérique (différence entre connaître la suite numérique et dénombrer)
- Cardinalisation (de l'ensemble dénombré par soulignement tonique ou par répétition du dernier mot-nombre prononcé (un, deux, trois, quatre…). Le dernier nombre est alors entendu comme le cardinal de l'ensemble et pas seulement comme le quatrième élément de l'ensemble dénombré.

Un enfant qui a acquis le schème du dénombrement pourra le mettre en œuvre quelque soient les caractéristiques de la situation.

Évolution des schèmes

Lorsqu'un schème se révèle inefficace dans certaines situations, il peut y avoir soit changement de schème soit modification du schème.

Dans la théorie de Piaget, les schèmes sont au cœur du processus d'adaptation des structures cognitives. Ils peuvent évoluer soit par assimilation, soit par accommodation.

Les schèmes reposent sur une conceptualisation implicite. Cela signifie qu'un élève qui applique un schème n'est pas nécessairement conscient de l'ensemble des opérations qu'il effectue pour le mettre en œuvre. Par exemple, nous pouvons regarder quels sont les différentes opérations qui sont mises en œuvre dans le schème de l'addition.

Exemple d'un schème-algorithme: l'addition des nombres entiers

1. On peut détailler le schème de l'addition comme indiqué :
2. Commencer par la colonne des unités, la plus à droite
3. Continuer par la colonne des dizaines, des centaines,…
4. Calculer la somme des nombres dans chaque colonne. Si la somme des nombres dans une colonne est inférieure à dix, inscrire cette somme sur la ligne du total (ligne du bas). Si elle est égale ou supérieure à dix, écrire seulement les chiffres des unités de cette somme et retenir le chiffre des dizaines, que l'on reporte en haut de la colonne immédiatement située à gauche, pour l'ajouter aux autres nombres de cette dernière colonne
5. Et ainsi de suite en progressant de droite à gauche, jusqu'à épuisement des colonnes

Lorsque un élève additionne il est généralement incapable de décrire toutes les opérations décrites ci-dessus.

Exemple des structures additives

Vergnaud a construit l'essentiel de son travail en précisant les schèmes de deux grandes structures : les structures additives, et les structures multiplicatives.

Exercice préliminaire

- Aurélie joue au jeu de l'oie. Elle est sur la case 12. Elle lance le dé et dois avancer de 4 cases. Sur quelle case va-t-elle arriver ?
- Théo et Olivia ont mangé beaucoup de bonbons. Théo en a mangé 4 et Olivia 6. Combien de bonbons ont-ils mangé en tout ?
- Djamila a dépensé 3 euros hier et 5 euros aujourd'hui. Combien a-t-elle dépensé ?
- 5 enfants veulent goûter. Il y a 3 brioches. Combien en manque-t-il pour que tous les enfants puissent en avoir une ?
- Sofia collectionne les feuilles Diddle. Au début de la semaine, elle en a 14. A la fin de la semaine, elle en a 23. Combien en a-t-elle gagné pendant la semaine ?
- Justine et Coralie ont acheté 6 carambars et 3 malabars. Combien ont-elles acheté de bonbons en tout ?
- Léa joue aux billes. Au début de la récréation, elle en a 5. Elle en gagne 4. Combien a-t-elle de billes à la fin de la récréation ?
- Cédric joue au jeu de l'oie. Il est sur la case 13. Il lance le dé. Il doit reculer de 4 cases. Sur quelle case va-t-il arriver ?
- Il restait 5 carambars dans le paquet. Tristan en a mangé 2. Combien en reste-t-il ?
- Sur la table, j'ai 6 crayons et 4 bouchons. Combien me manque-t-il de bouchons pour boucher tous mes crayons ?
- Ce matin, j'ai perdu 4 cartes Pokemon. J'ai rejoué cet après midi. Sur toute la journée, j'en ai gagné 7. Que s'est-il passé cet après midi ?
- Mélissa joue aux billes. Au début de la partie, elle en a 15. Elle en perd 7. Combien lui reste-t-il de billes à la fin de la partie ?

Essayez de classer ces problèmes en différentes catégories. Pour cela vous pouvez vous aider en faisant des dessins.

Catégoriser des classes de problèmes

On considère l'addition et la soustraction comme des opérations mathématiques parentes. Il est donc intéressant de les étudier ensemble sous une même appellation : le problèmes additifs. Dans ces problèmes, la solution n'exige que des additions et des soustractions. La légitimité de ce regroupement tient également dans le fait que ce sont les mêmes énoncés qui vont fournir les problèmes permettant de mettre en œuvre l'une ou l'autre de ces opérations. Effectivement, si on regarde les énoncés suivants :

1. Au début de la récréation Elise a 8 billes. Pendant la récréation elle en gagne 4. Combien en a-t-elle à la fin de la récréation ?

2. Au début de la récréation Elise a des billes. Pendant la récréation elle en gagne 4. À la fin de la récréation elle en a 12. Combien en avait-elle au début de la récréation ?
3. Au début de la récréation Elise a 8 billes. Pendant la récréation elle en gagne plusieurs. À la fin de la récréation elle en a 12. Combien en a-t-elle gagné pendant la récréation ?

Visiblement ces trois énoncés font partie de la même catégorie de problèmes. On y trouve trois "quantités" :

- le nombre de billes qu'Elise possède au début de la récréation,
- le nombre de billes qu'Elise acquiert pendant la récréation,
- le nombre de billes qu'Elise possède à la fin de la récréation.

Ce qui distingue les trois énoncés est l'emplacement de la question, c'est-à-dire l'emplacement de l'inconnue parmi les trois quantités dont on parle dans l'énoncé.

On peut illustrer chaque situation par un schéma pour mettre en valeur la classification que l'on propose.

numéro du problème	**1**	**2**	**3**
Schéma	$8 \xrightarrow{4} ?$	$? \xrightarrow{4} 12$	$8 \xrightarrow{?} 12$
Problème résolu par	Une addition 8 + 4 =	Une soustraction 12 – 4 =	Une soustraction 12 - 8 =

D'autres problèmes nécessitent des représentations différentes, d'où l'intérêt de la classification faite par Vergnaud.

Les classes de Vergnaud

En ce qui concerne l'addition, Vergnaud distingue 6 classes de structures additives :

1. Deux mesures se composent en une troisième
2. Une transformation opère sur une mesure pour donner une mesure
3. Relation quantifiée statique entre deux mesures: comparaison
4. Deux transformations se composent en une transformation
5. Une transformation opère sur un état relatif pour donner un état relatif
6. Deux états relatifs (relations) se composent pour donner un état relatif

Pour chacune de ces classes, nous donnons un exemple, et la manière de représenter graphiquement la classe de problèmes selon Vergnaud. Nous analyserons pour chacune de ces classes quelles sont les représentations graphiques susceptibles d'aider les élèves et leur difficulté relative.

Les termes utilisés par Vergnaud ont des définitions précises :

- Une « mesure » ou un « état », c'est une quantité, donnée par un nombre, mesurée (quantifiée) à partir d'une unité ; par exemple : 7 billes ; longueur de 15 m ; 45 secondes… Les mesures (ou états) peuvent « se composer », c'est à dire s'additionner ou se soustraire.
- Une transformation, dans les situations additives, c'est l'ajout ou le retrait d'une quantité à un état initial, d'une quantité exprimée dans la même unité que celle de l'état initial, pour donner une état final (exprimé aussi dans la même unité). Une transformation correspond à un aspect dynamique.
- Le terme « opère » signifie « agit ».
- Le terme « relation » implique une idée statique de ce qui différencie deux états donnés.

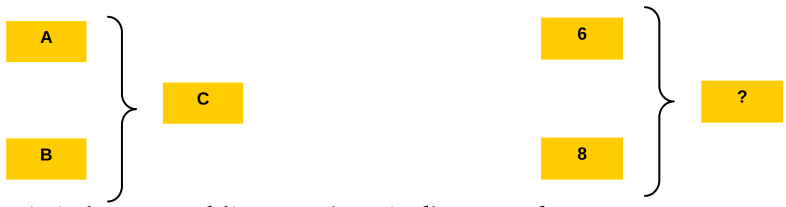
De même, les éléments de schémas de Vergnaud sont les suivants :

- un rectangle entoure un nombre naturel ;
- un cercle entoure un nombre relatif ;
- l'accolade verticale ou horizontale indique la composition de deux éléments de même nature ;
- la flèche horizontale ou verticale indique la composition d'éléments de nature différente.

Les schémas proposés par Gérard Vergnaud visent à donner une meilleure compréhension du problème et de la mise en œuvre de la procédure de résolution : si deux nombres sont représentés sur une même ligne horizontale, nous sommes dans une situation dynamique c'est-à-dire variable dans le temps, où un état initial se trouve changé pour donner un état final. Mais si deux nombres sont représentés l'un au-dessous de l'autre nous sommes dans une situation statique ou deux éléments existent en même temps en formant, sur place, un troisième élément. Autrement dit les situations dites statiques présentent des états simultanés, au même instant dans le temps, et les situations dites dynamiques présentent des états décalés, qui se succèdent dans le temps. L'axe du temps est ici horizontal.

Exemple 1 : deux mesures se composent en une troisième

Paul a 6 billes en verre dans sa poche droite et 8 billes en acier dans sa poche gauche. Combien de billes a-t-il en tout ?



De manière générale, ce problème revient à dire que <u>deux mesures se composent en une troisième</u>. Dans l'exemple, on cherche C (la composition des deux mesures). Ici, le terme « composition » signifie « on met ensemble, on réunit ». Deux quantités de même nature s'assemblent pour donner une quantité encore de même nature. On peut dire que c'est une situation statique : il y a deux "paquets" séparés et le paquet formé par la réunion des deux autres.

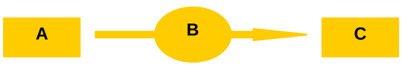
Une des caractéristiques de ce type de problèmes, c'est qu'il n'y a pas d'histoire. Les deux mesures sont données. Il est possible de faire un lien avec la réunion ensembliste. Ce type de schéma aide les élèves à se construire une représentation du problème à résoudre.

On aurait aussi pu avoir dans la même classe de problèmes : Paul a 6 billes dans sa poche droite et 14 billes en tout. Combien de billes a-t-il dans sa poche gauche ? Dans ce cas, A et C étaient connus, et on recherchait B. Ce problème se résolvait avec une soustraction, mais relève du champ conceptuel de l'addition.

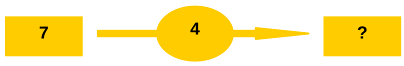
Ce type de situation n'est pas forcément le premier dans l'apprentissage. Il est souvent en compétition avec le deuxième (mais pas n'importe quelle forme du deuxième : A et B sont donnés et positifs)

Exemple 2 : une transformation opère sur une mesure pour donner une mesure

Paul avait 7 billes avant de jouer. Il a gagné 4 billes. Combien en a-t-il maintenant ?



A et C sont des mesures
B est une transformation



A et C sont des mesures
B est une transformation

Ce problème revient à dire qu'<u>une transformation opère sur une mesure pour donner une mesure</u>. Dans notre exemple, on cherche C qui est le résultat de la transformation. C'est une situation dynamique : on ajoute ou on retranche quelque chose à une quantité donnée (1ère mesure ou état) pour trouver un résultat (2ème mesure ou état). La transformation peut être positive ou négative.

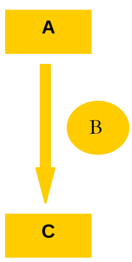
Dans cette classe de problèmes, il y a une histoire (verbe d'action : il se produit un changement, une transformation), le dynamisme indiqué par un changement de temps dans l'emploi des verbes. On peut donner ce type de schéma aux élèves pour les aider à se représenter le problème, en mettant un ? à la place du C par exemple, pour indiquer que c'est ce que l'on cherche.

On aurait aussi pu avoir dans la même classe de problèmes : Paul avait 7 billes avant de jouer. Il en a maintenant 11. Combien en a-t-il gagné ? Dans ce cas, A et C étaient des mesures connues, et on cherchait à connaître la transformation (l'opération) qui permettait de passer de l'état A à l'état B.

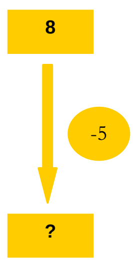
Les difficultés liées à la résolution de cette classe sont variables, selon que la transformation B est positive ou négative et que l'on cherche ou le premier état (A, B et C étant connus) ou le deuxième (C, A et B étant connus) ou la transformation (B, A et C étant connus), il y a donc 6 classes possibles dans cette catégorie. Les facteurs de difficulté peuvent être liés par exemple à l'impossibilité de faire une soustraction, à la difficulté du calcul nécessaire à la résolution, à celle de la procédure de résolution, à l'ordre et présentation des informations ou au type de contenu et relations envisagées. On a ainsi une hiérarchie des difficultés, selon la place de l'inconnue et les ordres de grandeur de A et B. Le plus facile des problèmes étant celui où l'inconnue est C et B est positif.

Exemple 3 : Relation quantifiée de comparaison entre deux mesures

Paul a 8 billes. Jacques en a 5 de moins. Combien Jacques a-t-il de billes ?

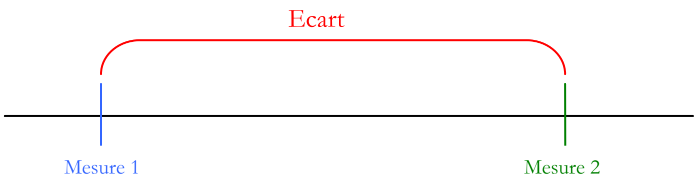


A et C sont des mesures
B est un nombre relatif



Dans ce type de problèmes, les mesures ne sont pas relatives à la même entité (les billes de Paul et celles de Jacques). Il ne s'agit donc pas d'une transformation de mesures, mais de la relation quantifiée de comparaison entre deux mesures. Ici, on cherche la mesure C (nombre de billes de Jacques). On a une situation statique où l'on compare deux états. Cette comparaison est la différence existant entre les deux, on pourrait dire la « distance ».

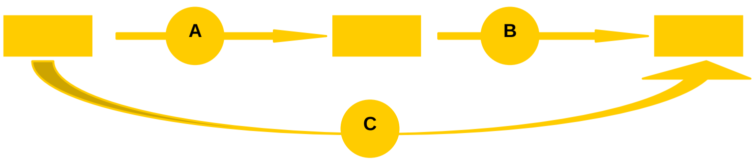
La représentation du problème par Vergnaud n'est pas celle qui aide le plus les élèves (pas pertinente du point de vue didactique). Compte tenu du fait que les mots « écarts » et « distance » sont des mots fréquemment associés à ce type de situations, une représentation qui aide les élèves est par exemple celle donnée ci-dessous :

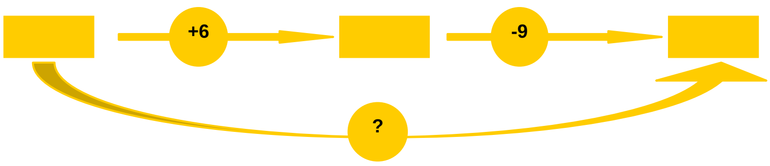


Dans notre exemple, on connaît une des mesures et la relation quantifiée de comparaison, mais on pourrait aussi avoir les deux mesures, et chercher la relation quantifiée de comparaison : Paul a 8 billes. Jacques en a 3. Combien Jacques a-t-il de billes de moins que Paul ? Dans ce cas, on chercherait B.

Exemple 4 : deux transformations se composent pour donner une transformation

Paul a gagné 6 billes hier et il en a perdu 9 aujourd'hui. Combien en a-t-il gagné ou perdu en tout ?





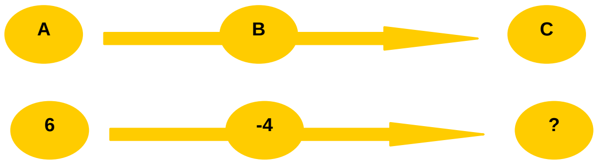
On ne connaît pas les états, et on cherche à réunir des transformations pour n'en avoir qu'une. Il s'agit donc de deux transformations qui se composent en une transformation. On a une situation doublement dynamique puisque deux transformations opèrent l'une après l'autre. On se préoccupe de la transformation pouvant remplacer la suite des deux transformations données.

Cette classe de problème est très complexe pour les élèves, car on travaille sur les transformations des états et non sur les états eux-mêmes. Souvent, les élèves ont besoin de donner une valeur quantifiée aux états (mesure) pour pouvoir résoudre le problème. Les états sont ici inconnus et les élèves ont du mal à accepter que l'on puisse résoudre ce type de problème sans les connaître. Le détournement par l'algèbre est artificiel, mais il peut permettre aux élèves d'avancer (pas avant le collège).

La représentation donnée peut aider les élèves à comprendre cette réunion de transformations.

Exemple 5 : une transformation opère sur un état relatif pour donner un état relatif

Paul devait 6 billes à Henri. Il lui en rend 4. Combien lui en doit-il encore ?



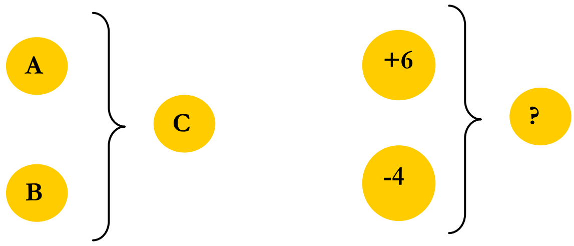
Il n'y a pas de mesures (on ne sait pas combien Paul et Henri ont de billes, on ne connaît que ce qu'ils se doivent). On connaît des états relatifs qui sont modifiés par des transformations. Il s'agit donc d'une transformation qui opère sur un état relatif pour donner un état relatif.

Cette classe de problèmes est encore plus difficile. Vergnaud dit que ces situations ne sont dominées que par les collégiens, et encore… Elles sont donc à éviter au primaire.

La représentation peut aider les élèves, mais elle est difficile à associer au problème (quel chiffre doit on associer à quelle partie du schéma).

Exemple 6 : deux états relatifs se composent pour donner un état relatif

Paul doit 6 billes à Henri mais Henri lui en doit 4. Combien Paul doit-il de billes à Henri ?



Dans ce type de problèmes, nous n'avons que des états relatifs qui se composent pour donner un autre état relatif. Il s'agit de la classe deux états relatifs (relations) se composent pour donner un état relatif.

Cette catégorie, comme la précédente ne relève a priori pas de l'enseignement primaire. Le schéma peut aider à se faire une représentation du problème.

De manière générale, la question de chaque problème peut porter sur n'importe laquelle des trois quantités citées. Par exemple, dans la première catégorie, le problème peut être posé de trois façons différentes, selon justement la quantité à déterminer :

- Paul a 6 billes en verre et 8 billes en acier. Combien a-t-il de billes (au total[2]) ?
- Paul a 6 billes en verre et des billes en acier. En tout il a 14 billes. Combien en a-t-il en acier ?
- Paul a des billes en verre et 8 billes en acier. En tout il a 14 billes. Combien en a-t-il en verre ?

[2] On peut d'ailleurs chercher à éviter l'utilisation des expressions "en tout" ou "au total" et écrire : Paul a 14 billes. Dans ces billes il y en a 6 en verre, les autres sont en acier. Combien en a-t-il en acier ?

Le premier problème est résolu à l'aide d'une addition, le deuxième problème est résolu à l'aide d'une soustraction, le troisième problème est résolu à l'aide d'une soustraction.

On voit ainsi que l'expression « problèmes additifs » ou « situations additives » désigne bien l'ensemble de ces situations que l'on résout par une addition ou par une soustraction.

L'expression « situation dynamique » fait référence à des problèmes où il y a une quantité ou grandeur qui augmente ou diminue (J'ai 3 œufs dans mon panier, j'en place 6 autres. Combien y a-t-il maintenant d'oeufs dans mon panier ?).

L'expression « situation statique » fait référence à des problèmes où il n'y a pas de quantité ou de grandeur qui augmente ou diminue (Sur la route que je parcours, le village A est au kilomètre 13 et le village B au kilomètre 27. Quelle est la distance entre les deux villages ?)

Retour sur l'exercice préliminaire

Catégoriser les problèmes de l'exercice préliminaire selon la classification de Vergnaud.

Aurélie joue au jeu de l'oie. Elle est sur la case 12. Elle lance le dé et dois avancer de 4 cases. Sur quelle case va-t-elle arriver ?	2
Théo et Olivia ont mangé beaucoup de bonbons. Théo en a mangé 4 et Olivia 6. Combien de bonbons ont-ils mangé en tout ?	1
Djamila a dépensé 3 euros hier et 5 euros aujourd'hui. Combien a-t-elle dépensé ?	4
5 enfants veulent goûter. Il y a 3 brioches. Combien en maque-t-il pour que tous les enfants puissent en avoir une ?	3
Sofia collectionne les feuilles Diddle. Au début de la semaine, elle en a 14. A la fin de la semaine, elle en a 23. Combien en a-t-elle gagné pendant la semaine ?	2
Justine et Coralie ont acheté 6 carambars et 3 malabars. Combien ont-elles acheté de bonbons en tout ?	1
Léa joue aux billes. Au début de la récréation, elle en a 5. Elle en gagne 4. Combien a-t-elle de billes à la fin de la récréation ?	2
Cédric joue au jeu de l'oie. Il est sur la case 13. Il lance le dé. Il doit reculer de 4 cases. Sur quelle case va-t-il arriver ?	2
Il restait 5 carambars dans le paquet. Tristan en a mangé 2. Combien en reste-t-il ?	2
Sur la table, j'ai 6 crayons et 4 bouchons. Combien me manque-t-il de bouchons pour boucher tous mes crayons ?	3
Ce matin, j'ai perdu 4 cartes Pokemon. J'ai rejoué cet après midi. Sur toute la journée, j'en ai gagné 7. Que s'est-il passé cet après midi ?	4
Mélissa joue aux billes. Au début de la partie, elle en a 15. Elle en perd 7. Combien lui reste-t-il de billes à la fin de la partie ?	2

Les structures multiplicatives

Ce champ conceptuel regroupe tous les problèmes pouvant se résoudre à l'aide d'une multiplication ou d'une division. L'objectif est de définir une classification des situations proposées à l'école primaire et de proposer une approche aidant l'enseignant dans le choix des activités.

Préambule sur la proportionnalité

Les problèmes sur la proportionnalité peuvent être résolus (proposés) dans 3 cadres : le cadre des grandeurs, le cadre numérique et le cadre graphique.

Les situations qui mettent en œuvre la proportionnalité sont issues de problèmes sociaux ou permettent la modélisation d'un phénomène. C'est également un outil de définition de nouveaux concepts (exemple en physique, quand on trouve que U (tension) est proportionnelle à I (intensité) on peut introduire la résistance.

On peut dresser une typologie des problèmes sur la proportionnalité :

- Problèmes de reconnaissance de proportionnalité
- Problèmes de quatrième proportionnelle
- Problèmes de comparaison
- Problèmes de double proportionnelle
- Problèmes de passage d'un cadre à l'autre

Le champ conceptuel des structures multiplicatives

Une situation d'achat à l'unité peut donner lieu à un problème reconnu comme relevant

- de la multiplication : Quel est le prix de 15 objets valant 3€ l'un?
- de la division : Quel est le prix d'un objet si je sais que j'ai payé 15 de ces objets pour 45€ ?
- de la proportionnalité : Quel est le prix de 15 objets valant 30€ les deux?

Afin de représenter ces trois problèmes, il est possible de faire un tableau mettant en évidence les deux grandeurs (quantité et prix)

quantité	prix		quantité	prix		quantité	prix
1	3		1	?		2	30
15	?		15	45		15	?

Les structures multiplicatives regroupent les problèmes pouvant être résolus en utilisant une multiplication, une division ou une suite de multiplication et de division

Les 3 notions multiplication, division proportionnalité ne sont pas indépendantes

Dans les problèmes mettant en œuvre les structures multiplicatives, on répertorie 6 types de problèmes

- Proportion simple avec présence de l'unité
- Proportion simple sans présence de l'unité
- Problème de type « fois plus, fois moins »
- Produit de mesure
- Proportion double

- Proportion simple composée

Les problèmes de proportionnalité peuvent se représenter sous forme d'un tableau générique de la forme ci-contre.

a	c
b	d

1	c
b	d

Proportion simple avec présence de l'unité (a=1)

1. Problèmes de multiplication : on donne b et c et on cherche d

1	c
b	?

Je veux faire 14 paquets de 32 billes chacun. Combien me faut-il de billes?

2. Problèmes de division-partition. On recherche la valeur-part

1	?
b	d

Avec 448 billes je veux faire 14 paquets identiques. Combien y aura-t-il de billes dans chaque paquet?

3. Problèmes de division-quotition. On recherche le nombre de parts

1	c
?	d

Avec 448 billes je veux faire des paquets de 32 billes. Combien y aura-t-il de paquets remplis ?

a	c
b	d

Proportion simple sans présence de l'unité

On se retrouve avec les différents problèmes possibles de proportionnalité. Les problèmes ne peuvent pas être résolus par le seul produit ou quotient de deux nombres.

J'ai payé 5,40€ pour 3 kg de raisin, combien coûtent 7,5 kg ?

a	c
?	d

Objet A	a
Objet B	b

Problème de type « fois plus, fois moins »

Il existe une relation quantitative entre l'objet A et l'objet B. On cherche une quantification de la relation « combien de fois plus? » ou « combien de fois moins?

Dans cette classe de problèmes, on trouve des problèmes du type :

Mélanie a 11 ans. Sa mère est 3 fois plus âgée qu'elle. Quel âge a-t-elle?

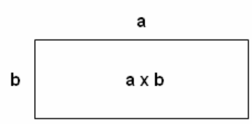
Objet A	a
Objet B	b

Dans ce problème, Mélanie = objet A, la maman de Mélanie = objet B, a = 11.

Produits de mesures

On peut schématiser ces problèmes par un tableau à double entrée ou par l'aire d'un rectangle.

	A1	A2	…
B1			
B2			
…			



On trouve dans cette classe les problèmes de multiplication et les problèmes de division

<u>Exemples de problèmes de multiplication</u>

- Quel est le nombre de carreaux sur une page de cahier quadrillé de 25 carreaux sur 60 carreaux?
- Avec 3 sortes de figures (carré, triangle, rond) et 5 couleurs (rouge, vert, bleu, jaune,noir) combien peut-on réaliser de pièces différentes?

<u>Exemples de problèmes de division</u>

- Pour faire un quadrillage rectangulaire de 1500 carreaux ayant 25 carreaux sur un côté, combien faut-il de carreaux de l'autre côté?
- J'ai 3 sortes de figures à colorier (carré, triangle, rond). Combien dois-je avoir de couleurs différentes pour obtenir 15 pièces différentes?

a	(c,e)
b	(d,f)

Proportion double

Cette classe regroupe les problèmes relatifs à des situations dans lesquelles une grandeur varie proportionnellement à deux grandeurs indépendantes

Par exemple : la location d'un gîte pour les vacances. Le prix à payer est fonction du nombre de personne et de la durée du séjour

Dans ce type de problèmes, il est possible de décomposer la question en 2 questions pour revenir à un problème de proportion simple.

a	c	e
b	d	f

Proportion simple composée

Il s'agit de problèmes relatifs à des situations dans lesquelles une grandeur varie proportionnellement à une autre qui varie elle-même proportionnellement à une troisième

Par exemple : dans une boîte d'œufs il y a 12 œufs. Chaque œuf coûte 30 centimes. J'achète 3 boîtes d'œufs. Combien vais-je payer ?

Les procédures utilisées par les élèves dans les problèmes de multiplication

Considérons le problème initial :

Paul achète x paquets de y bonbons chacun. Combien a-t-il acheté de bonbons?

La résolution se fait par la multiplication de 2 nombres de l'énoncé. Il s'agit d'un problème de proportion simple avec présence de l'unité (mot « chacun »)

Nombre de paquets	Nombre de bonbons
1	y
x	?

variables

Les types de procédures utilisées par les élèves sont fonction d'un certain nombre de variables didactiques parmi les quelles les outils de calcul disponibles et les valeurs de x et y. Concernant ces valeurs, trois cas peuvent se présenter :

- y petit et x petit
- y grand et x petit
- y grand et x grand

y et x petits (ex: y=4 et x=3)

Les élèves peuvent utiliser une procédure utilisant le support d'un dessin ou d'un schéma (comptage un par un ou 4 par 4)

Ils peuvent utiliser une procédure additive :

4+4+4=12 ou 4/8/12 (dans ce cas, il n'y a pas d'explicitation de l'addition)

Enfin, ils peuvent mettre en œuvre une procédure multiplicative : calcul mental de 3x4 par référence à la table de multiplication

y grand et x petit (ex: y=37 et x=4)

Dans ce cas, les procédures utilisant le support d'un dessin deviennent coûteuses.

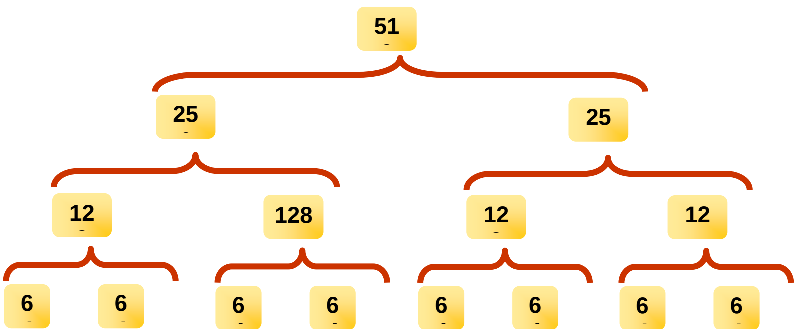
Les procédures de type additif sont efficaces quand l'addition à 2/3 chiffres est maîtrisée (x doit être petit)

La procédure multiplicative est très efficace quand elle est maîtrisée ou si l'on dispose de l'outil calculatrice (avantage si x=10)

y et x grands (ex: y=64 et x=38)

Les procédures utilisant le support d'un dessin sont inutilisables

Les procédures de type additif deviennent très difficiles. Des moyens peuvent toutefois être trouvés (influence des valeurs de x et y pour l'utilisation de multiples: doubles, produits par 10), même si le contrôle du nombre d'itérations est difficile.



Dans ce cas, la procédure multiplicative est la plus efficace.

Les variables didactiques dans les problèmes de multiplication

Les variables qui jouent sur les connaissances mises en œuvre par les élèves et sur les procédures qu'ils vont utiliser sont :

Le type de problème : le type proportion simple est mieux réussi que le type produit de mesures

Les types de nombres utilisés (nombres entiers, décimaux…)

La taille des nombres en jeu(grand, petits, cf paragraphe précédent)

Les outils de calcul disponibles (calculatrice, feuille à carreaux…)

Le type de contexte (familiarité)

La manière dont l'énoncé est formulé (est-ce qu'il est facile de trouver les données utiles, quel est le vocabulaire employé…)

Sommaire

Le contrat didactique

La théorie des situations

Les champs conceptuels