Didactique des mathématiques

Ce texte est produit à partir d'exposés
effectués par Joël Briand et Marie-Hélène Salin
auprès de professeurs de mathématiques (Yaoundé 1999).

Y figurent quelques exercices que le lecteur pourra « passer ».

Table des matières

1 Prologue

1.1 D'un modèle spontané d'enseignement aux pratiques rituelles

8

$$4x + \frac{3x}{4} - 7 = 5x - 8 - \frac{2x}{8}$$
$$\frac{3x}{4} - 7 = x - 8 - \frac{2x}{8}$$
$$\frac{3x}{4} - 7 = x - 8 - \frac{x}{4}$$
$$\frac{3x}{4} = x - 1 - \frac{x}{4}$$
$$x = x - 1$$
$$0 = -1$$

Voici le travail d'un (bon) élève de classe de 4.°

Une fois ce travail terminé, l'élève déclare : : « les x sont partis » et ne sait conclure.

Analyse :
- L'équation n'est pas comprise comme une égalité conditionnelle. La question de l'équivalence des écritures, donc des suppositions, n'est plus présente. (Bien souvent un élève est étonné lorsqu'un professeur demande de reporter la valeur de x dans l'équation initiale « pour vérifier »). Il y a eu glissement de sens. Il est probable, comme chez pas mal d'élèves, que cette suite de transformations effectuées ne réponde qu'à une pratique rituelle de l'équation du premier degré à une inconnue. Cette pratique fonctionne en apparence **sauf** pour les équations dites « indéterminées » et les équations dites « impossibles ». Mais comme elle fonctionne sur les autres, professeur et élèves s'accordent implicitement sur un contrat minimum d'apprentissage qui produira des effets positifs dans la **plupart** des cas.

Remarque : ce travail ne permet pas de savoir comment l'élève a travaillé. A-t-il travaillé par ajout de quantités égales ou par la règle de transposition. La première procédure est licite mathématiquement, la deuxième aussi sauf qu'elle n'a aucune existence mathématique. C'est une pure création didactique. Tout se passe comme si. (D.Woillez DEA Bordeaux I-1992). Cette deuxième procédure participe à sa façon, à la transformation de l'activité mathématique en une pratique rituelle si l'on y prend garde.

Le remplacement d'une réelle activité mathématique par des pratiques rituelles va rendre des investigations futures quasiment impossibles. Les effets à long terme sont importants. Prenons l'exemple de la recherche de solution d'équations du second degré à une inconnue :
$x^2+5x-24 = 0$
En continuité avec les pratiques déjà ritualisées pour les équations du premier degré, l'élève va vouloir faire apparaître « x= ». D'où des productions de ce type :
$x^2+5x = 24$
$x(x+5)=24$.

$x+5= \frac{24}{x}$ ……

Rechercher le remplacement du second degré par un travail (maîtrisé) de premier degré, en vue d'une mise en facteur, donc de recherche de solution serait une bonne rupture épistémologique (M.Legrand). Mais comment faire pour que $x^2+\frac{5}{2}x$ soit une « piste à prendre » par l'élève dans une réelle activité mathématique et ne soit pas a priori enseigné par le professeur ? La question paraît légitime, la solution n'est pas simple. En particulier, pour qu'un élève puisse s'approprier cette problématique, il devra comprendre le projet général « résoudre une équation ». Dans ce cadre, il y a des théorèmes à valoriser (le produit de monômes est nul si un des monômes est nul), donc des curricula à réorganiser.

En conclusion de ce que nous nommerons les pratiques ritualisées :

Il est tentant de prescrire à l'élève des règles d'emploi dans des contextes donnés afin de satisfaire à des exigences locales, mais que du même coup, on hypothèque à terme les capacités à faire des mathématiques.

Or, **« dès qu'un exercice est posé à des élèves et que l'indice répertorié apparaît, une partie non négligeable d'entre eux estime que le procédé attendu est celui qui a été associé aux indices répertoriés au cours des répétitions. Et ils agissent en ce sens, transformant à terme les mathématiques en pratiques rituelles »(**M.Legrand 1997). « Un élève a des connaissances en mathématiques s'il est capable d'en provoquer le fonctionnement comme outils explicites dans les problèmes qu'il doit résoudre. » R.Douady 1992.

1.2 Pratiques ritualisées du système :

Les manipulations des racines carrées méritent d'être étudiées sur le long terme : Par exemple, la pratique « rendre rationnel » le dénominateur d'une fraction. Autrefois, ces exigences étaient légitimes puisqu'il s'agissait souvent d'effectuer un calcul mais aujourd'hui, avec les calculettes, quelle est la raison qui fait que l'on demande de « rendre rationnel » un dénominateur : (de $\frac{1}{\sqrt{2}}$ à $\frac{\sqrt{2}}{2}$ par exemple ?)

Il faut chercher ailleurs une justification aux manipulations :

Question 7 :- Après avoir rendu le dénominateur de la fraction rationnelle (pour faciliter le calcul), Calculer, à 10^{-4} près l'expression $\frac{1}{1+\sqrt{2}}$ (1) en prenant 1,414 comme valeur approchée de $\sqrt{2}$.

Question 8 : à l'aide d'une calculette, on obtient à partir de (1) 0,414213. A partir de la forme $\sqrt{2}$-1, on obtient 0,4140. Prévoyez à l'aide des dérivées de $x \longrightarrow \frac{1}{1+x}$ et $x \longrightarrow x-1$ en $x=\sqrt{2}$ quel est le résultat numérique le plus proche du résultat exact.

1.3 Savoir « où l'on va » :

Au lycée, soit à étudier la fonction

f(x) = $\dfrac{x^3 + x^2 - 2x}{x^2 - 5x + 6}$

Il s'agit d'étudier le domaine de définition, les limites aux bornes, les asymptotes éventuelles, et, pour finir de calculer une primitive. Cela va supposer un travail sur l'expression. Analysons ce travail :

pour étudier la détermination des limites en x=2 et x=3, imaginez une réécriture adaptée de l'expression.

comment réécririez vous f(x) pour l'étude des asymptotes obliques ?

comment réécririez-vous f(x) pour en calculer une primitive ?

Conclusion : la réécriture de l'expression se justifie par une fin extrinsèque au calcul lui-même.

2 Quels domaines convient-il d’interroger lors dune formation à l’enseignement des Mathématiques ?

De notre point de vue, il serait illusoire d'imaginer l’enseignement des mathématiques, quels que soient les élèves auxquels il s’adresse, sans débattre et réfléchir sur :
- la place et le rôle des mathématiques dans notre société ;
- le rapport personnel des élèves aux mathématiques ;
- le rapport personnel de chaque enseignant aux mathématiques.

De plus, l'idée que pour enseigner à des élèves il suffirait de bien connaître les contenus mathématiques est fausse. Cette connaissance est bien sûr nécessaire mais certainement pas suffisante. Par exemple, un enseignant qui ne ferait pas le lien au début du collège entre proportionnalité et fonction linéaire ou, plus tard entre la définition d’une primitive et la quête historique de la mesure d’aires ou de volumes, qui imaginerait que la notion de variable s’acquiert de façon spontanée, qui ne verrait pas dans les décimaux une première approche de l’analyse, n’aurait pas la possibilité d’envisager tout un champ de problèmes utiles aux futurs élèves du collège et du lycée.
Il faut donc maintenant imaginer l'enseignement des mathématiques comme une continuité de l'école au collège et au lycée. Tout isolement au niveau du savoir mathématique est d'abord préjudiciable aux élèves.

Mais une fois ce propos tenu, on n'est pas quitte. La maîtrise des contenus ne suffit à assurer leur enseignement. L'enseignement des mathématiques ne peut se résumer en une simple transmission de savoir immuable. Il met en jeu plusieurs composantes dont le savoir n’est qu'une partie, certes importante, mais ce n'est pas la seule. Il nous paraît utile, voire indispensable, d’étudier les **processus de transmission et d'acquisition des mathématiques**, particulièrement en situation scolaire, de poser des questions telles que :

- comment ce savoir mathématique s’est-il construit ?
- quelles sont les attentes d'une société par rapport à ce savoir mathématique et à la façon de l’acquérir ?
- quel rôle institutionnel le professeur doit-il tenir ?
- les élèves arrivent-ils avec une tête vide qu'il suffirait de remplir ?

Autant de questions qui font qu'une formation à l'enseignement des mathématiques ne saurait se réduire ni à l'acquisition de contenus mathématiques, ni à un discours de pédagogie générale (qui, par nature exclut l'étude des contenus).

En somme, question « naïve » : Comment sauver l’essentiel du sens au moment de l’introduction d’un concept ?
Nous devons donc interroger l’histoire des mathématiques, des sociétés, de l’enseignement des mathématiques.

2.1 Rapport aux mathématiques et au métier d’enseignant : représentations des enseignants

On ne peut pas faire comme si les (futurs) enseignants étaient vierges en matière d'idées sur l'enseignement des mathématiques. »[1]

Un enseignant de mathématiques (professeur d'école ou professeur du secondaire) a un rapport privé au savoir mathématique. De plus ayant été lui même élève de classe de mathématiques, il a des idées personnelles sur la manière dont il faut enseigner. Ces représentations influent constamment sur sa pratique professionnelle.

« il est donc vain de séparer la formation en didactique de la formation en général, tant la conception d'un enseignement de mathématiques est liée aux mathématiques elles-mêmes et donc à l'enseignement qu'on en a eu.[...]

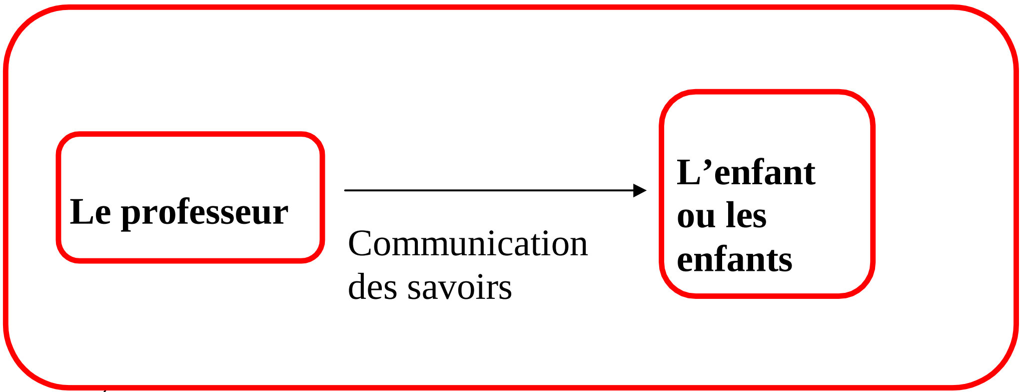
En étudiant ces interférences entre rapports privés et professionnels « La didactique des mathématiques se doit de contribuer à une "professionnalisation" de ceux qui ont la charge d'enseigner. »[2]

Il n’y a pas de déterminisme à être un bon ou mauvais enseignant de mathématiques. Toute personne qui a une connaissance théorique correcte d’un objet mathématique devra acquérir des compétences professionnelles pour pouvoir l’enseigner à des élèves.

[1] ROBERT A. "Une introduction à la didactique des mathématiques (à l'usage des enseignants)" Cahier de didactique n°50 - IREM de Paris VII (1988)
[2] ROBERT A. "L'illusion pédagogiste"

3 Plusieurs façons d'envisager l'enseignement

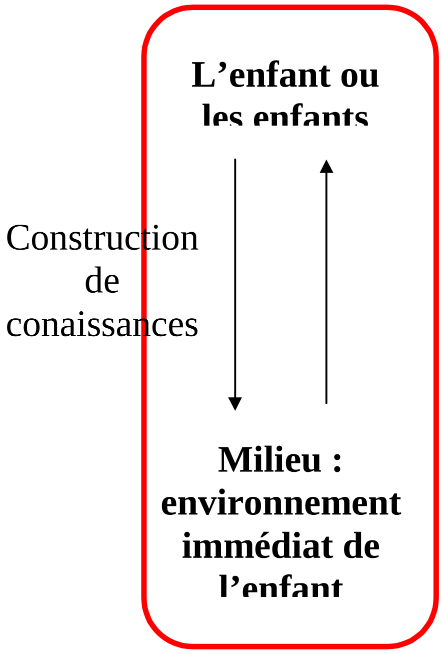
Depuis longtemps, philosophes, pédagogues et psychologues se sont interrogés sur les conditions dans lesquelles un enfant acquiert des savoirs.
Plusieurs conceptions sont apparues :
La conception dogmatique qui conduit à des apprentissages par répétitions de textes oraux ou écrits jugés fondamentaux.



La maïeutique de Socrate[3] qui part du principe que tout homme est détenteur du savoir. Le rôle du pédagogue est alors de permettre à ce savoir de se révéler. Socrate comparait son art à celui de Phénarète qui était sage-femme : il ne se contente pas de convaincre son interlocuteur d'ignorance, il lui montre aussi qu'il porte en lui des vérités qu'il ignore. (Voir le texte célèbre dans lequel Socrate amène un esclave de Ménon à découvrir comment on obtient un carré de surface double d'un carré donné.)

Jean Jacques Rousseau[4] réagit à l'éducation classique (clarté de l'exposé, mémorisation) principalement diffusée par les institutions religieuses. Elever un enfant, c'est moins lui apprendre quelque chose que le placer dans des situations où il prendra la mesure des difficultés. Il pense que l'autorité n'a pas à intervenir, la nature se chargera elle-même des réprimandes. « N'offrez jamais à ses volontés indiscrètes que des obstacles physiques, ou des punitions qui naissent des actions mêmes et qu'il se rappelle dans l'occasion : sans lui défendre de mal faire, il suffit de l'en empêcher ». (Emile, livre III).

[3] SOCRATE : THEETETE.
[4] JJ ROUSSEAU : L'EMILE .



Le début du 20° siècle reprend essentiellement les principes de l’éducation classique. Il s’agit de remplir des têtes vides ou de modeler des esprits encore « mous ». Cette approche conduit à interpréter les erreurs commises comme le signe d’une inaptitude. Dans cette mouvance, naissent les théories béhavioristes[5], thèses selon lesquelles il faudrait s'en tenir à l'étude systématique des comportements et des rapports qui existent entre les stimulations et les réponses de l'organisme. Les travaux de Skinner (1904-1990) développent des théories sur le langage et l'apprentissage fondées sur la thèse selon laquelle la répétition régulière des mêmes stimulations finit par produire des comportements et des savoir-faire.

Plus récemment, les conceptions constructivistes ont largement contribué à mettre en cause ces conceptions antérieures. Piaget en particulier développe l’idée que c’est en agissant que l’on apprend. Les connaissances ne s’accumulent pas comme des strates. « Les connaissances passent d’un état d’équilibre à un autre par des phases transitoires au cours desquelles les connaissances antérieures sont mises en défaut. Si ce moment de déséquilibre est surmonté, c’est qu’il y a eu réorganisation des connaissances, au cours desquelles les nouveaux acquis sont intégrés au savoir ancien. ». La résolution d’une difficulté cognitive aboutit alors à un nouvel équilibre (principe d’équilibration).
La Tdidactique va se fonder à partir de cet héritage.

C’est à Bachelard (la formation de l’esprit scientifique) que l’on doit la notion de représentation spontanée à propos de certains phénomènes. Il développe alors l’idée des obstacles causés par l’existence même de ces connaissances premières (exemple de l’électricité). On voit alors que l’erreur prend sa place « naturelle » dans ces nouvelles approches et que « les situations-problèmes présentées aux élèves constituent un levier important pour faire évoluer leurs représentations et leurs procédures. »[6].
La théorie des champs conceptuels et celle des situations vont reprendre ce travail. Elles vont développer en particulier le concept d’obstacle et les ruptures obligées dans les apprentissages.

[5]Behaviorisme : étymologie : de l'anglais behavior qui signifie comportement. C'est au psychologue J.B. Watson (1878-1958) que l'on doit le nom de béhaviorisme.

[6]G.VERGNAUD 1981.

Exemple de l'analyse : l'analyse va consister en des ruptures : passer par exemple de a=b à $\forall\varepsilon$, $|b-a| < \varepsilon$. Il s'agit d'une rupture. C'est le monde des approximations et non celui de l'exactitude.
Ces dernières théories sur l'apprentissage ont été reprises et complétées par l'idée que l'appropriation collective des connaissances pouvait favoriser les acquis individuels par le rôle des confrontations, des productions d'écrits en particulier.

Depuis un vingtaine d'années, de nombreux chercheurs on travaillé sur les conditions d'élaboration, de mise en place, de gestion de situations permettant la construction, par le sujet, du savoir visé par l'enseignant. En particulier, les chercheurs ont étudié le rôle de la communication orale et écrite dans l'activité mathématique en classe.

4 Une analyse systémique.

A première vue, toute action d'enseignement met en jeu trois composantes principales :
- les élèves, pour lesquels la société a défini un certain projet de développement et de formation
- le savoir visé par cette action d'enseignement
- le professeur dont le rôle, dans le système français est d'être un médiateur entre l'élève et le savoir.

Il faut alors ajouter le milieu modélisé qui contribue pour une large part à la mise en scène de l’activité. (voir théorie des situations).La première question théorique qui se pose alors est celle-ci : peut-il être fait abstraction de ce milieu ou non ? La deuxième est : quelle structure faut-il lui attribuer ?

Cette construction n'est pas isolée. Elle est plongée dans un système plus vaste, car le projet d'enseignement dépasse largement le professeur. C'est toute une épistémologie ainsi qu’une société qui participe à sa définition. Le tableau ci-dessous montre les secteurs de la recherche en didactique des mathématiques : (sont écrits en italiques, les concepts ou thèmes principaux de la recherche en didactique des mathématiques).

Deviennent alors objets d’étude :
- la genèse des savoirs dans une société.
- les décisions des responsables du ministère de l'éducation
- l’influence des parents d'élèves, organisés ou à titre individuel, (attentes ou images de l'enseignement)
- les rôles des professionnels : enseignants de la discipline au niveau supérieur, professions concernées, etc. La société élabore un projet d’enseignement, impose un certain nombre de contraintes, la plupart d'entre elles implicites. (Vers la théorie de la transposition didactique puis la théorie anthroplogique.)

Enfin, les caractéristiques sociales, affectives, intellectuelles des enfants sont un objet d’étude, pas uniquement d’un point de vue psychologique, mais dans la relation didactique relativement à un savoir donné.

Conclusion : l’organisation d’un apprentissage se réfère à au moins trois structurations « déjà là » ou « à construire » :
- Celles des savoirs, qui viennent de communautés qui les produisent.
- Celles des connaissances de l’élève prise en référence à un champ conceptuel.
- Celles imposées par la logique des rapports avec le milieu et du problème qu’il pose à chaque instant ; ces dernières sont modélisées par une « situation ».

5 La didactique des mathématiques

« La didactique des mathématiques étudie les processus de transmission et d'acquisition de cette science, particulièrement en situation scolaire. Elle se propose de décrire et d'expliquer les phénomènes relatifs aux rapports entre son enseignement et son apprentissage. A terme, elle se propose d'améliorer les méthodes et les contenus de l'enseignement,... assurant chez l'élève la construction d'un savoir vivant (susceptible d'évolution) et fonctionnel (qui permette de résoudre des problèmes et de poser de vraies questions). »

Cette définition de la didactique, tirée de l'Encyclopedia Universalis, résume bien le projet de ceux qui ont été à son origine, en particulier de G. Brousseau.

Il s'agit de *« théoriser l'activité d'enseignement des mathématiques en tant qu'objet original d'études et non pas en tant que simple conjonction de faits théorisables dans des domaines autonomes comme la pédagogie, la sociologie, la psychologie, les mathématiques, la linguistique ou l'épistémologie »* (Brousseau, introduction à sa thèse).

Quand on étudie le fonctionnement de l'enseignement des mathématiques, on peut s'intéresser à des aspects différents de ce fonctionnement qui bien sûr interagissent les uns avec les autres : on peut s'intéresser par exemple aux transformations que subit le savoir quand il est enseigné à tel ou tel niveau, c'est l'étude de la transposition didactique, on peut étudier comment évoluent les connaissances des élèves sur un sujet donné au cours du temps, c'est l'objet de la théorie des champs conceptuels dont les résultats permettent à un enseignant de comprendre pourquoi, par exemple, les élèves mettent tant de temps à comprendre quelque chose qui lui paraît évident. Enfin, pour construire des situations d'enseignement, on s'intéresse à la théorie, développée par G Brousseau, théorie qu'il a nommé « théorie des situations didactiques », dont le poids dans les recherches françaises et dans le monde francophone est très important .
La théorie des situations est *« avant tout un réseau de concepts ainsi que les méthodes de recherches et de protocoles d'expérimentation, appuyés notamment sur l'ingénierie didactique, qu'utilisent et que développent beaucoup de chercheurs en France et au-delà »* (MJ Perrin).

.

L'environnement de l'enseignement des mathématiques et la place possible des principaux concepts de didactique.

LES SAVOIRS MATHEMATIQUES : -Naissance d'un corpus de savoirs.
-Du savoir savant au choix des savoirs à enseigner.
-La transposition didactique.
- Les objets, l'approche

L'ELEVE :
Ses caractéristiques sociales, affectives, intellectuelles.
Les conceptions, les théorèmes en acte.
Théorie des champs conceptuels.
- Le rapport connaissances-

La noosphère : Ministère Académies Personnalités.

Le professeur

action didactique

L'élève ou les élèves

Milieu modélisé

Situation didactique comme moyen.

SITUATION DIDACTIQUE COMME ENVIRONNEMENT

-Théorie des situations *situations a-didactiques, Situations fondamentales Variables didactiques.*
Professionnel concerné par : *- Le contrat didactique :(contrat et effets de contrat).*
- Transferts de responsabilité : dévolution et institutionnalisation Développement d'ingénieries.
Action : connaissance. validation : savoir.

LE PROFESSEUR :
Personne privée : Rapports personnels avec les mathématiques
Ses conceptions de l'apprentissage.
L'idée qu'il se fait de ses élèves.

6 Approche anthropologique : de la transposition didactique à l’approche anthropologique :

Yves Chevallard a considéré les interactions didactiques comme des cas particuliers d’interactions entre des institutions (qui peuvent être réduites à une personne). Leur activité propre leur fait construire des connaissances par nature différentes, même si un regard extérieur pourrait les reconnaître comme procédant d’une même notion. Lorsque des interactions demandent de la part de ces institutions des connaissances “ communes ” ces différences se révèlent et créent une sorte de “ tension ” didactique, qui peut aboutir à un projet didactique. L’action didactique devient alors le moyen général de réduction de cette tension. Mais toute action didactique créé aussi de la transposition didactique de sorte qu’il faut la comprendre plutôt comme un moyen de régulation que comme un moyen d’action isolé.

Le thème central est celui des savoirs et des institutions : *« un savoir n’existe pas « in vacuo » dans un vide social : tout savoir apparaît à un moment donné, dans une société donnée, comme ancré dans une ou des institutions.* » Y.Chevallard.

- Tout savoir est savoir d’une institution.
- Un même objet de savoir peut vivre dans des institutions différentes.
- Pour qu’un savoir puise vivre dans une institution, il faut qu’il se soumette à un certain nombre de contraintes, ce qui implique qu’il se modifie.

Yves Chevallard analyse le travail du mathématicien : le mathématicien ne communique pas ses résultats sous la forme où il les a trouvés. Il les réorganise, il leur donne une forme aussi générale que possible.

« Il fait de la "didactique pratique" qui consiste à mettre le savoir sous une forme communicable, décontextualisée ». (Arsac).

L'enseignant fait le travail inverse du mathématicien. Il effectue une recontextualisation du savoir. Il cherche des situations qui vont donner du sens aux connaissances à enseigner.

Pour faire l'objet d'un enseignement un savoir donné subit des transformations inévitables.

Y. Chevallard a mis en évidence ce phénomène et lui a donné le nom de transposition didactique.

"Tout projet social d'enseignement et d'apprentissage se constitue dialectiquement avec l'identification et la désignation de contenus de savoirs comme contenus à enseigner.[...] Un contenu de savoir ayant été désigné comme savoir à enseigner subit dès lors un ensemble de transformations adaptatives qui vont le rendre apte à prendre place parmi les objets d'enseignement. Le "travail" qui d'un objet de savoir à enseigner fait un objet d'enseignement est appelé **transposition didactique.**"[7]

Il y a une transposition didactique dans l’institution sociale au fil des âges, du savoir savant au savoir enseigné, une transposition didactique de l’institution professeur à l’institution élève et

[7] CHEVALLARD Y "la transposition didactique" - la pensée sauvage (1985)

une transposition didactique à l'intérieur de l'institution scolaire (exemple de la symétrie axiale).
Y.Chevallard distingue technique, technologie, et théorie selon le rapport au savoir du sujet..
Voir Ecologie de la racine carrée (thérésa Assude). et l'analyse petit x n° 45 I. Bloch.

Le tableau ci-dessous montre les transformations d'un savoir depuis le sujet de recherche jusqu'à son enseignement en scolarité obligatoire :

	communauté scientifique		la noosphère[8]			
Sujet de recherche	--------------->	Savoir savant	-------------->	Savoir à enseigner	--------------->	situation d'enseignement
	travail du mathématicien		Les instructions officielles		Le travail du professeur	

6.1 L'exemple d'un savoir et de sa place dans un curriculum :

Compléments :
Qu'est-ce qu'un objet de savoir ? En mathématiques, on peut ranger dans cette catégorie

- les "notions mathématiques" telles que l'addition, le cercle, les équations différentielles du premier ordre à coefficients constants, etc. Ces exemples sont donnés par des étiquettes qui font sens dans la communauté. Il faut conduire une analyse épistémologique et didactique de ces étiquettes.
- - Il y a les notions "para mathématique" telles que la notion de paramètre, d'équation, de démonstration. Ces notions ne sont pas, habituellement des objets d'étude. Il n'y a pas étanchéité entre ces deux domaines. En effet, la distinction doit se référer à une pratique d'enseignement précise.

Exemple : Equation et identités :

En seconde *:* x est un nombre non nul. Démontrer que $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x(x+1)}$ (1).

Trouver une écriture fractionnaire de : $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots \frac{1}{1994.1995}$

L'élève résoud la première partie mais est bloqué pour trouver l'écriture fractionnaire.

Les notions pré-mathématiques (ou proto-mathématiques Y.Chevallard) sont plus souvent qu'on ne le croit pré-construites. Il existe une strate plus profonde de "notions" mobilisées implicitement par le contrat didactique. Ces notions qui sont souvent identifiées à des capacités, des compétences, ne se retrouvent pas dans l'acte explicite d'enseignement. Elles se retrouvent dans les évaluations et dans les pédagogies qui visent des capacités (pédagogie par objectif). De nombreuses "capacités" ainsi identifiées restent absentes de l'univers de l'enseignant", notamment parce qu'elles ne peuvent pas, comme telles, faire l'objet d'un enseignement.
Ce sont les premiers objets. Plus tard, YC . dans une approche anthropologique considérera les objets, les personnes et les institutions. Le savoir est alors un objet de la théorie comme un autre. Il est fonction des institutions. Il parle d'écologie des savoirs (à l'intérieur d'un même

[8]La noosphère désigne l'ensemble des personnes ou instances qui participent à la définition des programmes. Il ne faut pas y voir que le Ministère de l'Education Nationale. D'autres institutions participent à ces choix : (académies, parents, etc.)

institution) ce qui permet à YC et GB de s'intéresser à des occurrences de savoirs différentes selon les institutions dont ils sont issus.

6.2 Dans l'enseignement actuel : qu'est-ce qui conditionne le choix des savoirs à enseigner ? :

« L'étude de l'écologie d'un objet peut amener à prendre en compte des conditions de natures diverses : institutionnelles, mathématiques, didactiques, psychologiques, sociologiques, etc. »Y.C.
Qu'est-ce qui existe et pourquoi ?, mais aussi qu'est-ce qui n'existe pas et pourquoi ? et qu'est-ce qui pourrait exister ? Ces questions qui peuvent sembler naïves s'avèrent fructueuses pour interroger et comprendre le « réel » didactique.
Dans le paragraphe "Transposition didactique" nous avons parlé des transformations que subit le savoir savant afin de devenir un savoir à enseigner. Mais nous ne nous interrogeons pas souvent sur les raisons des choix de tel ou tel type de savoir à enseigner et sur leur présentation :

6.2.1 Les savoirs qui « passent de mode :

sous l'effet de contraintes naturelles et de tendances sociologiques :
conséquences heureuses : Abandon del'apprentissage de l'algorithme de l'extraction d'une racine carrée autrefois passage incontournable en classe de troisième dans les années 60.
Conséquences fâcheuses : le triomphe empiriste : l'enseignement des nombres en 5° et 4°
L'enseignement de la proportionnalité, de l'arithmétique (en particulier du PPCM et du PGCD ne se fait plus, d'où des difficultés dans le travail des fractions (petit x 45 PPCM I.BLOCH)), des réels, se délite.

6.2.2 Des choix délibérés :

En France, l'enseignement des probabilités à de jeunes enfants n'est toujours pas d'actualité alors que de nombreux travaux ont montré tout l'intérêt qu'il y aurait à développer cet enseignement.

6.2.3 Les effets de mode

Actuellement, la géométrie vient à prendre une place démesurée dans l'enseignement. Il suffit de regarder les évaluations nationales pour constater ce phénomène.

6.2.4 L'idée actuelle que les mathématiques ne sont que des outils

qui serviront plus tard en tant que tels et qu'il ne faut pas chercher la « petite bête ».

D'où la disparition d'objectifs au hasard des formations, des programmes, des urgences :

Exemple (Yves Chevallard) : en classe de 5°, 4° on apprend à transformer une expression algébrique :

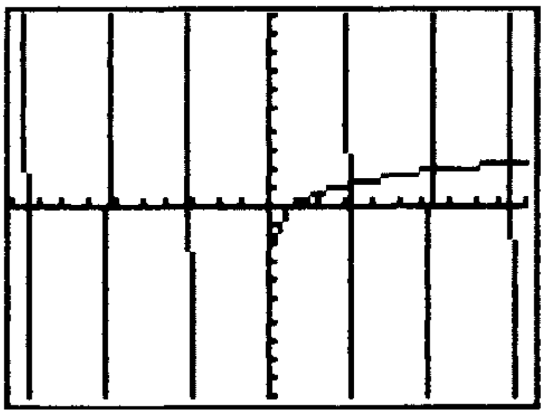
Factoriser $(2x-3)^2 - 4(x+1)(4x-6) + (4x^2-9)$
L'élève aboutit à $(2x-3)(-4x-8)$, voire $-4(2x-3)(x+2)$.
M : Est-ce juste ?
E : je crois.
M : Vérifie en prenant $x=-2$ par exemple.
E : On n'a jamais fait ça.

Le rapport de l'élève au calcul algébrique n'incorpore pas l'idée d'une relation entre manipulation de l'expression, d'une part, et substitution des valeurs numériques dans l'expression d'autre part.
D'où la difficulté ultérieure à factoriser un polynôme P(x) du troisième degré afin de résoudre l'équation P(x)=0

6.2.5 -L'évolution technologique

l'arrivée des calculettes et des ordinateurs influence déjà certains secteurs de l'enseignement des mathématiques.
Les logiciels permettent des simulations. Des nouveaux rapports aux savoirs (variables, figures, etc.) naissent.

Résoudre graphiquement l'équation ln(x) = 100 sin x



Réponse d'un étudiant :
« il y a une infinité de solutions »
voir aussi n°44 petit x : « cohabitation entre le calcul numérique et la calculatrice du point de vue du contrat didactique ». A.Birebent

Conclusion :

Imaginer les mathématiques, comme étant définitivement installées dans leur contenu, comme dans leur approche, est illusoire.

7 La théorie des champs conceptuels :

La théorie des champs conceptuels occupe une place à part puisque : « elle n'est pas, à elle seule, une théorie didactique » (G.Vergnaud). C'est une théorie cognitiviste. Il s'agit d'une théorie psychologique de la conceptualisation du réel. Sa principale finalité est de fournir un cadre qui permette de comprendre les filiations et les ruptures entre connaissances chez les enfants et les adolescents.
Elle vise à fournir un cadre cohérent et quelques principes de base pour l'étude du développement et l'apprentissage de compétences complexes, notamment de celles qui relèvent des sciences et des techniques (Vergnaud 1990).
C'est un point de vue résolument psychologique dans le prolongement de l'épistémologie génétique de Piaget. L'originalité de cette démarche est d'avoir permis de développer des outils théoriques prenant en compte une double exigence que G Vergnaud décrit ainsi :
-Tenir compte des savoirs sociaux constitués.
- Ne pas rester prisonnier de leur description actuelle, de manière à analyser au plus près la formation et le fonctionnement des connaissances des sujets individuels. (G Vergnaud 1984).
Dans cette théorie, une approche psychologique et didactique de la formation des concepts mathématiques conduit à considérer un concept comme un ensemble d'invariants utilisables dans l'action. La définition pragmatique d'un concept fait donc appel à l'ensemble des situations qui constituent la référence de ses différentes propriétés, et à l'ensemble des schèmes mis en œuvre par les sujets dans ces situations. Le schème est alors une « organisation invariante de la conduite pour une classe de situations. ». Il est composé essentiellement d'invariants opératoires de 2 types logiques principaux : les théorèmes en acte et les concepts en acte.

Les concepts mis en évidence :
Théorème en acte : est un théorème jugé vrai par l'élève et utilisé dans l'action. Il permet des prises de décision. Il est plus ou moins implicite. Il a son propre champ de validité, mais il produit des résultats faux hors de ce champ de validité.
Les théorèmes en acte sont des invariants de type « proposition ».

Exemples

- De deux nombres, le plus grand est celui qui a l'écriture la plus grande. - Plus l'aire augmente, plus le périmètre augmente. - Toute fonction croissante tend vers l'infini lorsque x tend vers l'infini.

Remarque : la mise en garde de F.Conne qui étudie « l'échange didactique » : *« on ne peut pas considérer comme identique sans autres [précautions], un théorème en acte que l'observateur repérera chez un sujet avec un (ou des) savoirs de ce sujet, car cette concordance dont nous avons fait état est le fait de l'observateur, de sa lecture de la situation »*

D'où la définition d'un concept comme un ensemble d'invariants utilisables dans l'action. **La définition d'un concept (dans cette théorie) fait donc appel à l'ensemble des situations qui constituent la référence de ses différentes propriétés, et à l'ensemble des schèmes mis**

en œuvre par les sujets dans ces situations. (G Vergnaud). Pour J.Brun, « un schème chez un sujet n'est qu'à l'état de virtualité et c'est l'action en situation qui décidera en quelque sorte de l'individualisation du schème. (1993).
Concept en acte : est un invariant de type propositionnel : par exemple, concept de collection, de cardinal, de transformation.

Ceci conduit donc à la mise en évidence de champs conceptuels : par exemple ;, le champ conceptuel des structures additives est à la fois l'ensemble des situations dont le traitement implique une ou plusieurs additions ou soustractions, et l'ensemble des concepts ou théorèmes qui permettent d'analyser ces situations comme des tâches mathématiques.

8 La théorie des situations :

Pour comprendre les phénomènes d'enseignement, Guy Brousseau propose de prendre comme objet central de l'étude les situations d'enseignement, en précisant ce qu'il entend par situation.
Une situation désigne l'ensemble des relations concrètes qui, à un moment donné, unissent une personne ou un groupe au milieu et aux circonstances dans lesquelles elle doit vivre et agir.
Le terme de **situation didactique** est utilisé pour décrire les relations pertinentes d'un élève avec un milieu mobilisé par un enseignant pour lui faire approprier un savoir déterminé.
Une **situation didactique spécifique d'un savoir** est donc d'abord déterminée par le fait qu'un observateur extérieur peut y reconnaître une volonté d'enseigner ce savoir de la part d'un des sujets de la situation à un ou plusieurs autres. On ne s'intéresse, quand on parle de la situation didactique, qu'aux paramètres de la situation qui sont liés à la transmission du savoir.
La théorie des situations didactiques s'intéresse à l'étude de toutes les situations didactiques possibles mais ses premiers outils d'analyse, (que l'on peut qualifier de concepts didactiques) ont été élaborés dans le but de produire et d'observer des phénomènes d'enseignement liés à un point de vue particulier sur les connaissances mathématiques et sur leur apprentissage et de comparer ces phénomènes avec ce qui se passe dans les situations d'enseignement classiques. Ce sont quelques-uns de ces concepts, dont certains font partie maintenant de la formation des instituteurs et des professeurs de mathématiques que je vais vous exposer et que nous utiliserons dans les travaux dirigés.

8.1 Une approche originale des savoirs à enseigner fournie par la théorie des situations

Les mathématiques ne sont pas vues d'abord comme un ensemble de vérités instituées qu'il faut connaître et appliquer mais comme des « instruments de contrôle des situations ». C'est par exemple le cas du comptage auquel vous faites appel spontanément si vous devez préparer un matériel individuel pour vos élèves.
Une question essentielle : « de quels problèmes tel savoir est-il le meilleur outil de résolution ? »
La démarche de la théorie des situations consiste à se poser la question, dans un premier temps indépendamment de l'existence d'élèves : « de quels problèmes ce savoir est-il le meilleur outil de résolution ? » ou « dans quelles situations est-il nécessairement mobilisé ? » et d'une certaine manière à « représenter » ce savoir par ces situations, que l'on peut qualifier de **non didactiques** : elles sont spécifiques du savoir, mais sans comporter aucune intention d'enseigner.
Un exemple
Le concept d'agrandissement, abordé à l'école primaire puis au collège est nécessaire à l'artisan peintre qui doit reproduire une fresque sur un mur, à partir d'un modèle sur papier avec la contrainte « telle dimension sur le modèle doit donner telle dimension sur le mur ». On peux qualifier cette situation de situation non didactique spécifique de l'agrandissement, parce que seule la connaissance (en actes) de l'agrandissement permet d'obtenir le résultat escompté.

8.2 L’utilisation de cette approche pour construire des situations didactiques

Selon G. Brousseau, mettre en scène dans la classe des situations qui fonctionnent comme les situations non didactiques est nécessaire On connaît la difficulté des élèves à faire appel à une connaissance dans des contextes qui supposent un changement de son statut. Or c’est bien ce qui est visé par l’enseignement, que ce qui est appris à l’école soit mobilisable spontanément par l’élève quand cela s’avère nécessaire, soit dans un autre contexte mathématique, soit en dehors du contexte d’enseignement.

Pour qu’un élève puisse affronter une telle situation, il est nécessaire que, dans le cadre de la classe, le professeur l’ait déjà placé dans ce type de situation. Un moyen est de proposer des **situations dites a-didactiques** que l’élève peut et doit gérer lui-même sans faire appel à des raisons didactiques et en l’absence de toute indication intentionnelle de la part de l’enseignant. Celui-ci organise dans la classe une simulation d’une **situation non didactique**, telle que les élèves soient confrontés à un des problèmes qui nécessitent la connaissance visée. Mais, comment l’élève peut-il résoudre le problème s’il ne dispose pas de cette connaissance ? Le but n’est pas qu’il résolve le problème du premier coup, mais qu’il s’engage dans une démarche de résolution. Si la situation lui renvoie des rétroactions, par exemple de manière matérielle ou par des échanges avec ses camarades, s’il a les moyens de se rendre compte qu’il s’est trompé et la possibilité de faire d’autres essais en tenant compte de ce que lui a appris son échec, l’élève est supposé capable de s’adapter, c’est-à-dire de changer de méthode de résolution et de progresser dans sa maîtrise du problème, en construisant ainsi peu à peu un modèle, implicite dans les premiers temps, qui deviendra explicite plus tard.

Un exemple : l’agrandissement du puzzle

Quelle est la connaissance mathématique qui permet de résoudre le problème du peintre évoqué tout à l’heure ? C’est l’application linéaire qui fait passer de l’ensemble des dimensions du modèle à celui des dimensions de la fresque. Or, pour beaucoup d’élèves, on peut aussi bien « agrandir » en ajoutant un même nombre qu’en multipliant par un même nombre.

Pour « travailler » cette connaissance, G. Brousseau a proposé une situation, devenue célèbre, « l’agrandissement du puzzle », insérée dans un processus d’enseignement des rationnels et des décimaux. Les équipes de l’Institut National de la Recherche Pédagogique l’ont adaptée pour la classe de 6ème, c’est la version qui constitue l’annexe 1.

La forme d’apprentissage correspondante : l’apprentissage par adaptation

Pour réaliser l’agrandissement demandé, les élèves proposent pratiquement tous d’ajouter 2cm à toutes les dimensions de leur pièce. Le professeur n’a pas besoin d’intervenir pour évaluer leur travail : ils sont très étonnés de ne pas pouvoir reconstituer le puzzle, ce qui les conduit à s’interroger sur les raisons de ce constat et à rejeter la solution qui leur paraissait la plus simple et à en chercher une autre. La connaissance nouvelle, formulée dans la dernière partie de la séquence, est le résultat de l’adaptation des élèves à la situation.

Mais l’efficacité de cette situation est fragile : si au lieu de « 4 cm sur le modèle doit donner 6cm sur le puzzle agrandi, le professeur propose aux élèves l’agrandissement correspondant à « 4 donne 8 », cela ne marche plus ! En effet, beaucoup d’élèves réussissent en multipliant par 2 les dimensions de leur pièce, mais sans avoir compris pourquoi l’addition ne convenait pas. Il en serait de même si le rapport « dimension finale / dimension initiale » était un autre entier simple.

8.3 Différentes phases nécessaires :

8.3.1 Dialectique de l'action.

Elle consiste à placer l'élève devant un problème présentant plusieurs caractéristiques :
- la solution est la connaissance visée ;
- l'élève doit posséder un ou des modèles, plus ou moins perfectionnés, lui permettant de prendre des décisions ;.
- la situation doit renvoyer à l'élève des informations sur son action lui permettant de juger du résultat, d'ajuster cette dernière, sans l'intervention du maître.

Cette adaptation se fait par essais et erreurs ; les informations renvoyées par la situation sont perçues par l'élève comme des renforcements ou des sanctions de son action. Un véritable dialogue s'instaure entre l'enfant et la situation. Cette dialectique permet donc d'activer des modèles implicites d'action, c'est à dire non encore formulable par l'élève ni a fortiori organisable en théorie.
Le sujet donne ainsi du sens à la connaissance qu'il fait fonctionner en tant que modèle implicite qu'il a validé empiriquement.
Mais il ne suffit pas alors de l'interroger pour qu'il explicite le modèle ainsi créé, il faut organiser une autre phase.

8.3.2 Dialectique de la formulation.

Pour que le sujet puisse expliciter lui-même son modèle implicite, et pour que cette formulation ait du sens pour lui, il faut qu'il rencontre un nouveau problème dans lequel la connaissance va obligatoirement intervenir sous forme d'un langage (écrit ou oral).
Lors de ces situations, l'élève échange avec une ou plusieurs personnes des informations rédigées dans un langage qui sera, lui-même, objet d'étude.
Ainsi, se type de situations permet d'expliciter des modèles et donc de les formuler à l'aide de signes, de codes et de règles mises au point dialectiquement. Les situations qui lui sont proposées dans ce cadre, son dites des situations de formulation. Les situations dites "de communication" entre élèves en sont un exemple.

8.3.3 Dialectique de la validation.

La validation empirique obtenue lors de la dialectique de l'action est insuffisante pour une réelle activité mathématique. Dans cette nouvelle phase, l'enseignant doit construire une situation dont l'objectif est de démontrer pourquoi le modèle créé est valable ou non.
Pour que l'élève construise une démonstration et pour qu'elle ait du sens pour lui, il faut qu'il puisse le faire dans une situation dont l'enjeu est de convaincre quelqu'un d'autre.
(On pourrait disserter longtemps sur la définition de démonstration (voir partie relative à ce sujet). Une démonstration est ce qui « donne les raisons de la vérité de certains théorèmes dans un domaine donné comme par exemple celui de l'analyse élémentaire »).
Les situations ainsi crées sont des situations de validation.
On distingue validation sémantique et validation syntaxique.

8.3.4 L'institutionnalisation

Une situation qui vise l'apprentissage d'une connaissance ne pourra remplir son rôle que si le savoir en jeu est repéré, identifié par l'élève. Certains résultats pourront être rapidement oubliés, d'autres doivent être retenus. L'enseignant a la responsabilité d'organiser cette distinction.

8.3.5 L'articulation des différentes phases :

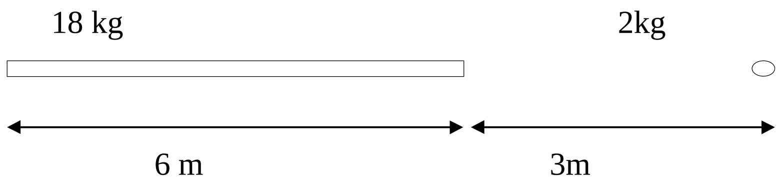
Il faut bien être conscient que, dans la pratique, ces phases ne se succèdent pas aussi systématiquement. La plupart des séquences de classes qui prennent en compte cette approche vont se caractériser par la présence d'une ou de plusieurs de ces phases.

En particulier, une erreur fréquente est de croire qu'en une séance de travail, ces phases devraient être systématiquement présentes. On peut concevoir une suite de deux ou trois séquences de travail au cours desquelles les seules phases d'action et de formulation sont présentes. Il faut que les élèves aient été plusieurs fois émetteurs puis récepteurs pour qu'ils puissent prendre clairement conscience du problème qui est en jeu.

L'approche par la théorie des situations constitue un modèle théorique qui est une aide précieuse pour décomposer finement les processus d'apprentissage et analyser les phénomènes observés.

Beaucoup de recherches ont permis que se construisent des situations fondamentales relatives à des savoirs précis : citons entre autres : situation fondamentales du nombre, , des rationnels et décimaux (voir ouvrage construction des rationnels et des décimaux G.Brousseau), de la proportionnalité (voir TP), de la géométrie (communication de figures, médiatrice), situation fondamentale de l'intégrale (voir article « la problématique des situations fondamentales M.Legrand Repères IREM n°27 avril 97) :

Dans ce dernier exemple, il s'agit de « demander aux étudiants (DEUG) d'évaluer la force d'attraction newtonienne qui s'exerce entre un barreau rectiligne et une masse ponctuelle :



F=	-8k	4/9 k	k	4/3 k	4k	8k	?
Nb d'étudiants	10	3	50	8	10	4	25

Une démarche va conduire peu à peu les étudiants à rejeter certaines réponses et à construire l'intégrale de Riemann.

Voir aussi : Construction de situations qui lancent la notion de variable : n° 45 petit x Bessot.

8.4 Variable cognitive, variable didactique :

Pour rendre compte des effets des valeurs de certaines variables sur les apprentissages des élèves, G. Brousseau a introduit les concepts de variable cognitive et de variable didactique.

Variable cognitive ; variable didactique

Une situation a-didactique spécifique d'une connaissance est caractérisée par un certain nombre de paramètres. La modification de certains paramètres peut ou non affecter la connaissance nécessaire à la solution, comme nous venons de le voir.

Variables cognitives

Une variable cognitive d'une situation a-didactique est un paramètre de cette situation qui, suivant les valeurs qui lui sont attribués, modifie la connaissance nécessaire à la solution.

Certains paramètres sont des variables numériques, d'autres sont binaires (la condition est réalisée ou non).

Variables didactiques

Une variable didactique est une variable cognitive dont la valeur peut être fixée à volonté par l'enseignant. La modification de la valeur de ces variables permet d'engendrer, à partir d'une situation,

- soit un champ de problèmes correspondant à une même connaissance. En particulier, ceci permet à l'élève de se confronter à plusieurs reprises à la même connaissance, à travers une situation dont le milieu lui est pour l'essentiel connu, sans que les réponses lui soient connues. (par exemple, ici, dans une deuxième étape, les auteurs d'Ermel proposent le problème « 10 doit donner 4 ».
- soit un éventail de problèmes correspondant à des connaissances différentes. En particulier, il peut utiliser d'abord des valeurs correspondant à des connaissances acquises, ce qui permet à l'élève de comprendre le problème, puis modifier la variable pour lui faire affronter la construction d'une connaissance nouvelle..

Le **saut informationnel**

JM Digneau (1980). En étudiant les effets de changement de valeur de variables didactiques, l'auteur définit un saut informationnel comme étant un changement de valeur d'une variable didactique à l'intérieur d'une situation susceptible de provoquer un changement de stratégie.

8.5 Les caractéristiques générales des situations didactiques ainsi construites

- Elles s'inscrivent dans un projet du maître de faire approprier un savoir spécifié
- Elles sont construites autour de *situations a-didactiques* dont la résolution suppose le recours à la connaissance visée
- L'enseignant doit donc dans un premier temps faire la *dévolution* à l'élève de la responsabilité de résoudre le problème
- La situation doit être organisée de telle manière que les résultats des élèves soient validables par la situation ou par eux-mêmes, et qu'ils puissent faire plusieurs tentatives en tenant compte des informations apportées par les rétroactions de la situation.
- En cours ou au terme du déroulement de la situation a-didactique, l'enseignant est responsable de *l'institutionnalisation* des connaissances élaborées par les élèves

Quand un élève a résolu un problème en élaborant une nouvelle connaissance, celle-ci ne lui sera utile que s'il est capable d'y faire appel dans une autre situation. Pour cela, il faut que

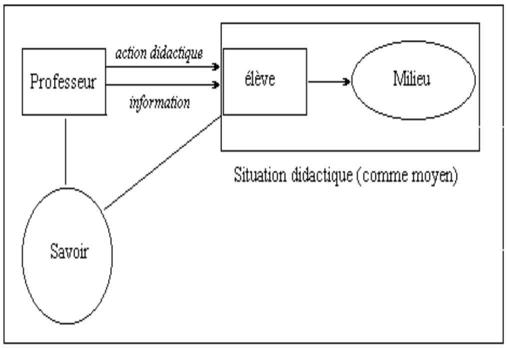
l’enseignant aide les élèves à identifier le savoir en jeu, à distinguer entre les résultats à retenir et ceux à oublier etc.
L’institutionnalisation est l’acte qui consiste à donner un statut scolaire à la connaissance produite dans la situation. Cet acte est sous la responsabilité de l’enseignant.

8.6 La construction d'un processus d'enseignement s'étendant sur un temps long

Les recherches en didactique menées dans ce cadre théorique ont conduit à l’élaboration de processus d’enseignement couvrant de larges pans des programmes, en particulier de l’école primaire. Le plus fouillé concerne l’enseignement des rationnels et des décimaux, il recouvre sur ce thème tout ce qui a trait aux rationnels et aux fonctions linéaires pratiquement jusqu'à la fin du collège.
Ce type de travail est très lourd : il faut choisir la ou les situations clés, déterminer les valeurs pertinentes de leurs variables didactiques puis étudier la succession des types de situations a-didactiques et d’institutionnalisation.

8.6.1 Compléments : le concept de milieu

Même si le concept de milieu n’est explicité que beaucoup plus tard, il est dès le début, la préoccupation majeure de G.Brousseau :



Situation didactique (comme environnement)

« La première question théorique qui se pose alors est celle-ci : peut-il être fait abstraction de ce milieu ou non ? La deuxième est : quelle structure faut-il lui attribuer ?

Le texte qui suit est extrait d’une conférence de G.Brousseau Montréal 1997.
Structures du “ milieu didactique ”
a) L’étude des situations comme moyen didactique conduit à accepter les propositions suivantes :
La communication “didactique ” a pour objet de donner à son destinataire un moyen de contrôle ou de régulation sur un certain *milieu*. Nous avons appelé *modèle implicite d’action* la capacité minimale de contrôle. La conscience que le sujet apprenant peut avoir de sa capacité de contrôle sur une situation ou un milieu donné, est repérée comme “ sa ” connaissance. Prendre conscience de ses connaissances suppose de la part de l’apprenant, d’une part la pratique (effective ou fictive) de certains types d’interactions sociales (formulation, preuve) et l’usage d’un certain répertoire culturel. Ce bagage de connaissances culturelles (formulables ou communicables au moins par des procédés non verbaux) est lui-

même l'objet d'une reconnaissance par un système de savoirs et de 'syntaxes' plus ou moins spécifiques.

b) Les instruments culturels de reconnaissance et d'organisation des connaissances sont des *savoirs*, objets d'une activité spécifique des institutions, ou d'une activité d'institutions spécifiques. La *compréhension* est la mobilisation concomitante de savoirs, de connaissances et l'évocation de situations non directement nécessaires à la décision dans l'action en cours mais supposées utiles au contrôle des connaissances qui régulent cette décision. L'équilibre général des différents répertoires par lesquels un sujet régule ses rapports à un milieu obéit à des principes d'ergonomie.

c) Le “ *sens* ” d'une connaissance est une image culturelle de la compréhension, un moyen de la reconnaître et de la gérer, comme le savoir est un moyen de reconnaissance et de gestion des connaissances, moyen personnel ou institutionnel, et donc variable suivant les institutions. Le sens peut donc se décomposer suivant les “ types didactiques ” de connaissances en une composante *sémantique*, par laquelle la connaissance à l'oeuvre est reliée à un champ de situations, en une composante *syntaxique* qui la relie aux différents répertoires (en particuliers logiques et scientifiques) qui en régissent la manipulation, et en une *composante pragmatique* qui en décrit les caractères d'utilisation.

d) L'action du professeur comprend une forte composante de régulation des processus d'acquisition de l'élève. L'élève lui même apprend par des régulations de ses rapports avec son “ milieu ”. Les régulations cognitives concernent un milieu a-didactique dont une partie de la structure est déterminée par la même méthode que celle employée dans la partie A.

* Milieu “ objectif ” : L'élève considère comme milieu objectif l'ensemble des objets et relations qui ne dépendent ni de ses actions et connaissances, ni de celles du professeur. Ce milieu peut être lui même structuré comme une situation non didactique avec des actants objectifs et des milieux en interactions.

* Le milieu objectif est mobilisé dans une situation d'action dont il constitue soit le milieu effectif sur lequel l'élève est appelé à agir (les figures planes par exemple) soit un milieu fictif dont il doit imaginer le fonctionnement ou les transformations pour répondre à une question. Dans les deux cas il est un actant qui opère en fonction de ses modèles implicites d'action. Dans cette classification les situations de formulation ou de preuves sont des situations d'actions de ce niveau.

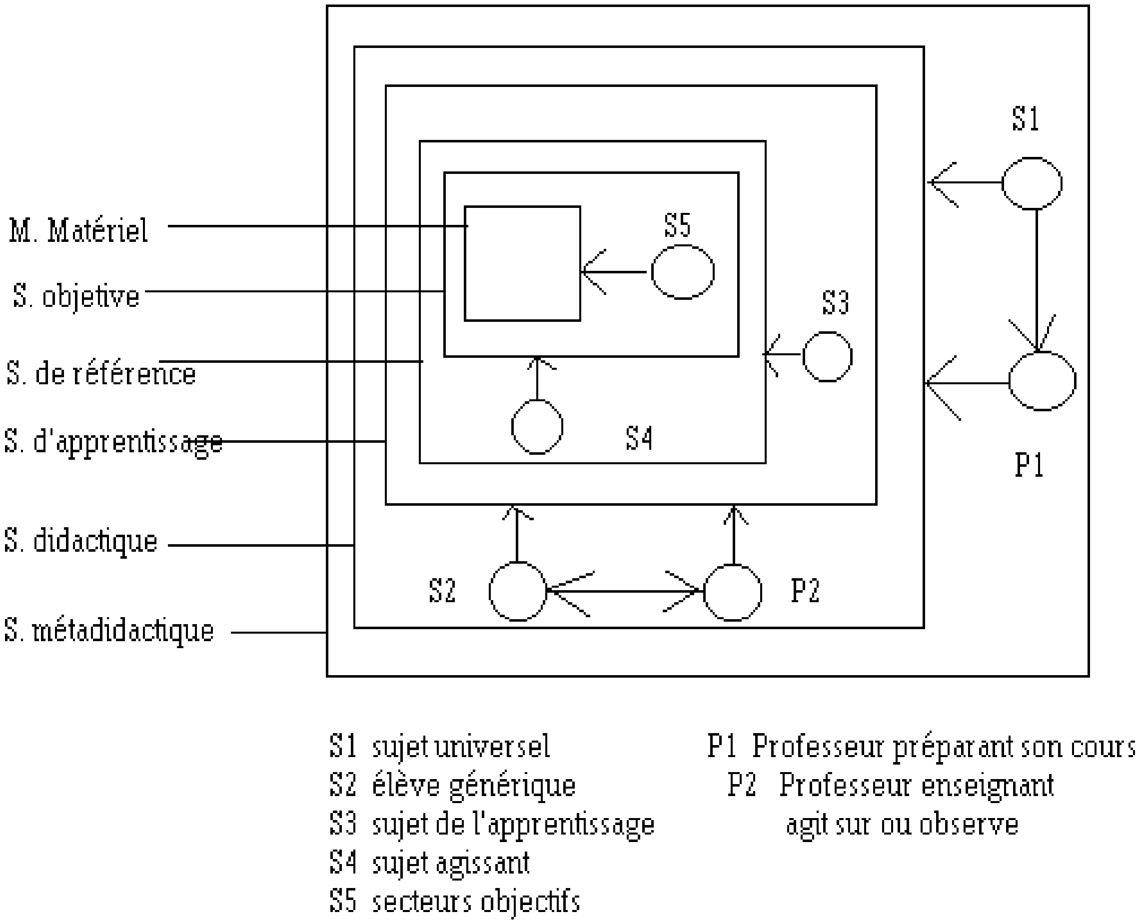
* Le sujet apprend en corrigeant ses actions et en anticipant leurs effets. Les situations d'action où il s'est engagé sont donc pour lui des milieux (de référence) sur lesquels il exerce ses capacités de construction de connaissances et d'apprentissage. Ces situations d'apprentissage, dont le milieu est une situation d'action, sont au cœur du dispositif de construction des connaissances et de leur signification. Elles s'effacent habituellement spontanément de la mémoire de l'apprenant.

* Etre élève, c'est gérer des situations d'apprentissage - avec l'aide du professeur -. Le milieu que l'élève doit traiter est donc celui de ses situations d'apprentissage. Ces interactions constituent des situations d'enseignement. Le professeur y est un actant comme l'élève.

* Le professeur doit d'autre part considérer les situations d'enseignement comme des milieux qu'il doit réguler - y compris sa propre action au sein des situations d'enseignement - par des actions, des connaissances et des savoirs spécifiques.

* Chaque relation avec un milieu de niveau différent fait appel à des connaissances, à des concepts, à un vocabulaire, et à des savoirs différents. Le professeur traite l'ensemble de ces assujettissements. Il est possible d'observer des contradictions flagrantes entre ce qui est dit par le professeur, ce qui est donné à voir et à comprendre aux élèves, et la règle effective des interactions avec le milieu. (cf. plus loin l'abus de l'analogie)

Cette structure exposée dans un article publié au Québec et a été étudiée et approfondie par Claire Margolinas. »



8.7 Petit à petit l'enseignant est pris en compte dans le modèle.

8.8 Conclusion

La théorie des situations fournit une méthode de construction de situations didactiques très riche. Elle a permis l'élaboration de nombreux processus d'enseignement, surtout pour l'école et le collège.

Ces situations qui permettent de simuler dans la classe le fonctionnement du savoir dans les situations non didactiques, ne sont pas faciles à mettre au point ni à gérer par l'enseignant, aussi elles restent assez marginales. Mais leur existence même, le fait qu'on ait pu observer leurs effets sur le comportement et les apprentissages des élèves, ont ouvert des perspectives quant aux caractéristiques des situations « ordinaires » qui favorisent les apprentissages ou qui leur nuisent. Tous les apprentissages ne nécessitent pas constamment la mise en oeuvre de situations de ce genre, mais l'élève ne peut apprendre que s'il se place de lui-même en « position a-didactique » dans les situations d'enseignement classiques.

Les recherches se poursuivent pour à la fois comprendre comment marche (ou ne marche pas bien) l'enseignement des mathématiques et pour trouver comment l'améliorer.

9 Erreurs, obstacles et apprentissage des mathématiques

Tout enseignant est constamment confronté aux erreurs produites par ses élèves, elles constituent une rétroaction de sa propre action. Les points de vue sur les erreurs peuvent être très différents selon la façon dont on les conçoit leur rôle dans l'apprentissage. Les études menées en didactique sur ce thème ont fourni de nombreux résultats, objet de cet exposé.

9.1 les rapports erreur - échec

Les deux termes sont souvent mal distingués. Or, dans le dictionnaire Robert, « échec » est opposé à « succès », lui-même défini par « heureux résultat » alors qu'« erreur » est opposé à « vérité ».
L'échec qualifie le fait que le résultat attendu ne soit pas atteint. Ainsi, l'enfant qui projette de faire une tour de cubes haute comme lui, a conscience de l'échec de son action quand la tour s'écroule.
L'erreur qualifie non le résultat, mais la démarche de prise de décision.
L'adulte qui a vu faire l'enfant en train de construire la tour peut analyser cet échec en terme d'erreurs parce qu'il dispose d'un système de validation de l'action supérieur à celui de l'enfant (système s'appuyant sur des connaissances comme les lois de la gravité). Pour l'enfant, le seul système de validation à cet âge et pour ce problème est pragmatique : ça marche ou ça ne marche pas. Il n'y a pour lui d'erreurs dans son action. A 8 ans, ce sera différent.
Pour l'élève, l'interprétation de l'échec en termes d'erreurs nécessite :
- un constat de l'échec du résultat,
- l'attribution de l'échec à des *choix* qu'il a fait et dont il peut assumer la *responsabilité* (ce qui implique le rejet de causes comme le hasard, la fatalité, le rejet de la culpabilisation et du dénigrement de soi-même, etc.),
- la recherche d'identification des relations entre choix et résultats,
- une modification de ses choix de manière plus adéquate.

La transformation de l'*échec* en *erreur* est la condition d'un progrès, d'un apprentissage.

9.2 Les erreurs, manifestation de la cohérence des élèves ?

Les régularités dans les réponses à certaines questions.
De nombreux questionnaires ont été posés à de larges populations, à plusieurs reprises au cours de leur scolarité. Les résultats montrent qu'un certain nombre d'erreurs sont de fréquence faible, d'autres sont de fréquence forte.
Parmi ces dernières : certaines disparaissent relativement vite, pour d'autres, les résultats ne s'améliorent que lentement.
Un exemple : les décimaux

Les annexes 3 et 4 présentent les résultats d'enquêtes auprès d'élèves de CM2 et de 4ème qui attestent de la persistance de certaines erreurs concernant les opérations de base sur les décimaux.

9.3 Les erreurs, manifestation d'obstacles à l'acquisition des connaissances

Définition
Un obstacle se manifeste par un ensemble d'erreurs relatives à un savoir. Ces erreurs ne sont ni fugaces ni erratiques, mais reproductibles et persistantes.
Un obstacle est :

- une connaissance
- il existe un domaine où cette connaissance est utile, vraie, adaptée etc..
- il existe un domaine où cette connaissance est fausse et produit des réponses fausses.
- cette connaissance résiste aux contradictions auxquelles elle est confrontée et à l'établissement d'une connaissance meilleure. C'est en cela qu'un obstacle est différent d'une difficulté.

L'exemple des décimaux : La connaissance obstacle, c'est celle des entiers ! Elle se manifeste par des difficultés à :

- accepter que l'on puisse obtenir un agrandissement par une division et un rapetissement par une multiplication
- trouver un décimal entre 2 autres
- accepter la double écriture des décimaux : 1,5 et 1,4999...
- concevoir le produit de décimaux
- concevoir de nouveaux types de division ex on a payé 38,50 F pour 0,850 kg de viande. Quel est le prix du kg ?

Les **modèles implicites** : les modèles implicites d'action sont ceux à l'aide duquel un observateur formule, prévoit et explique les comportements du sujet placé dans une situation déterminée. Ces modèles implicites sont à mettre en relation avec les théorèmes en actes ou règles d'action de G Vergnaud, mais ils sont réglés en terme d'action dans une situation.

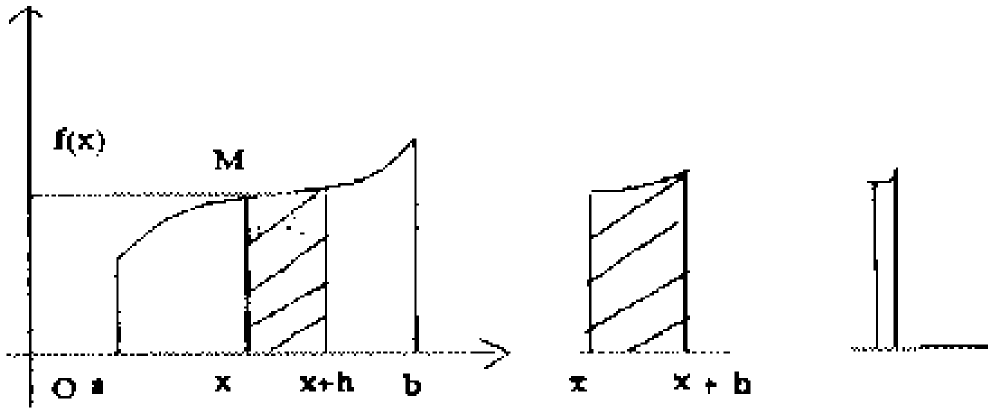
Exemple :
$45<405 \Rightarrow 3{,}45<3{,}405$
$(a+b)^2 = a^2 + b^2$
Soit un triangle quelconque ABC.

Elles peuvent être licites
La règle d'action du « changement de terme » . Sait-on si elle est toujours utilisée ?
$2x+7 = 22$ est perçue comme une opération (au premier membre) et un résultat au second membre. (obstacle didactique). (2+3 sont ou font 5)
Donc « J'ai déjà 7, il me faut 15 pour obtenir 22 donc il faut que 2x fassent 15 ».

9.4 Origine des obstacles

Leur origine peut être ontogénique, didactique ou épistémologique.
Les obstacles d'origine ontogénique sont ceux qui surviennent du fait des limitations (neurophysiologiques entre autres) du sujet à un moment de son développement : il développe des connaissances appropriées à ses moyens et à ses buts à cet âge là.
ex de la conservation des quantités discrètes
Les obstacles d'origine épistémologique : Obstacles attestés dans la genèse historique d'un concept et constitutifs du savoir actuel.
Ce concept a été mis en évidence par Bachelard (« Naissance de l'esprit scientifique »).

En ce qui concerne les décimaux, G. Brousseau a montré par une étude historique que c'est la connaissance des nombres naturels qui est le plus gros obstacle à l'apparition des décimaux (qui a pris 15 siècles).
L'obstacle est formé à la fois par l'idée de vouloir concevoir les nouveaux nombres sur le modèle des anciens et par l'impossibilité de concevoir les anciens nombres comme des objets nouveaux.(ex les entiers sont des décimaux)
Un autre exemple d'obstacle d'origine épistémologique concerne les nombres relatifs, plus particulièrement leur ordre et la règle des signes. Celle-ci a mis plusieurs siècles à être acceptée.
Autre exemple d'obstacle épistémologique : le découpage infini des surfaces et des solides : [M.Schneider (1991) Repères 31 p.74]



(15) *In Un obstacle épistémologique soulevé par de "découpages infinis" des surfaces et des solides* (1991).

« Une hypothèse est que l'élève est habitué à considérer segments, droites et plan comme des ensembles de points. :
La théorie des grandeurs fait une distinction très claire entre les différents types de grandeurs et leurs mesures intervient de façon spécifique, comme longueur aire ou volume. »
« Par contre, le point de vue ensembliste ne fait pas de distinction » […]. « C'est là qu'est l'obstacle ». Repères 31 p. 75.

Les obstacles d'origine didactique sont ceux qui semblent ne dépendre que d'un choix ou d'un projet du système éducatif.
L'annexe 2 évoque une erreur fréquente chez les élèves au début du collège. R. Berthelot et moi-même avons montré que cette erreur était d'origine didactique en mettant à l'épreuve un processus d'enseignement des angles pour des élèves de CM1, à l'issue duquel les élèves ne tombent pas dans le piège perceptif fourni par la figure.
Dans le cas des décimaux, les choix pédagogiques peuvent renforcer les obstacles d'origine épistémologique. La présentation actuelle des décimaux au niveau élémentaire est le résultat d'une longue évolution dans le cadre d'un choix didactique fait par les encyclopédistes puis par la Convention : compte tenu de leur utilité, les décimaux allaient être enseignés à tout le

monde le plus tôt possible, associés à un système de mesure, et en se référant aux techniques d'opération dans les entiers. Aussi, pour beaucoup d'élèves, les décimaux sont des entiers naturels avec un changement d'unité, donc des naturels (avec une virgule) et des mesures.

Autre exemple d'obstacle didactique à voir en annexe à propos de la résolution d'équations.

9.5 Le traitement de l'erreur par l'enseignement

Des études sur ce sujet ont été faites dans différents contextes. Pour en parler de manière convenable, il faut introduire un concept de didactique proposé par G. Brousseau, et repris dans d'autres didactiques que celle des mathématiques : celui de contrat didactique.

9.5.1 Contrat pédagogique / contrat didactique

Le contrat pédagogique est constitué de l'ensemble des règles de vie en vigueur dans une classe. La nature de ce contrat n'est pas liée à une discipline enseignée.
Le contrat didactique est d'une autre nature : il régit les rapports entre l'enseignant et les élèves à propos des tâches qu'ils ont à réaliser pour apprendre un savoir particulier. Il définit les rôles respectifs des uns et des autres et la part de responsabilité de chacun dans la gestion des savoirs.
Mais, le plus souvent, cette définition reste implicite. Ce sont les attentes de l'enseignant, qui se manifestent par ses décisions en face de tel ou tel événement dans la classe à propos du savoir qui sont déterminantes pour que les élèves sachent ce qui est attendu d'eux. Si par exemple, un professeur n'interroge que les élèves qui ont trouvé la solution, ceux-ci interprètent cette manière de faire ainsi : *ne sont intéressantes pour apprendre que les réponses justes.*
Le contrat didactique comporte aussi des « clauses » exprimant les attentes des élèves vis-à-vis de l'enseignant : par exemple, des élèves entre 16 et 18 ans, très en difficulté, refusent de commencer par chercher seuls un exercice : pour eux, le professeur est là pour aider. S'il refuse de le faire, il ne fait pas son travail.
C'est ce que veut exprimer la définition suivante :
« Le contrat didactique est le résultat de la négociation des rapports établis explicitement et/ou implicitement entre un élève ou un groupe d'élèves, un certain milieu et un système éducatif, aux fins de faire approprier aux élèves un savoir constitué ou en voie de constitution. (Brousseau 1984) »
A cette définition, il convient d'ajouter les remarques suivantes (G.Brousseau 1984).
« Le contrat didactique est en fait souvent intenable. Il met le professeur devant une véritable injonction paradoxale : tout ce qu'il fait pour faire produire, par les élèves les comportements qu'il attend, tend à priver ces derniers des conditions nécessaires à la compréhension et à l'apprentissage de la notion visée : si le maître dit ce qu'il veut, il ne peut plus l'obtenir. (ex de la situation du dénombrement spontané)
Mais l'élève est lui aussi devant une injonction paradoxale : s'il accepte que, selon le contrat, le maître lui enseigne les résultats, il ne les établit pas lui-même et donc, il n'apprend pas les mathématiques, il ne se les approprie pas ; Apprendre, implique pour lui refuser le contrat mais aussi accepter la prise en charge.
Donc l'apprentissage va reposer, non pas sur le bon fonctionnement du contrat, mais sur ses ruptures »

Voir à ce sujet: « Une étude du contrat didactique à propos de la racine carrée ». petit x n° 35 Annie Bessot.

44 petit x : « cohabitation entre le calcul numérique et la calculatrice du point de vue du contrat didactique ». A.Birebent.
Calculatrices : n° 39 et 40.
TP : l'inégalité triangulaire A.Berté petit x 45, n°39 Ruhal Floris « la géométrie traite-t-elle des illusions d'optique ? 4 élèves aux prises avec le triangle aplati.

9.5.2 effets de contrat

G.Brousseau a mis en évidence les « effets de contrat » qu'il a nommé « effet Jourdain », « effet Topaze » et « glissement méta-didactique ». On se reportera à ses articles.
TP enseigner des méthodes fiche méthode alerte R.Noirfalise repère 16 ;Enseigner une règle d'action repère 3 1991 Julo

Un exemple : L'enseignement en ostension . l'ostension comme effet secondaire.
L'ostension: 1977 Ratsimba Rajhon: "La donnée par l'enseignant, de tous les éléments et relations constitutifs de la notion visée."
L'ostension consiste à exposer les savoirs ou a proposer des activités qui montrent ces savoirs dans des occurrences simples. Dans ce cas, on parle d'ostension déguisée. Dans ces deux cas, la problématique posée par l'activité ne suppose pas le savoir visé. mais un autre, ou des savoir-faire. Le savoir sera là peut-être à l'insu de l'apprenant.
L'ostension déguisée est le plus souvent pratiquée à l'école primaire:: L'enseignant présente directement les connaissances en s'appuyant sur l'observation dirigée d'une réalité sensible ou d'une de ses représentations, et suppose les élèves capables de se les approprier et d'en étendre l'emploi à d'autres situations. exemple en géométrie: dans un premier temps, les propriétés visées sont mises en évidences dans un cas facile à voir. L'observation doit permettre à l'apprenant de s'approprier cette marque du savoir. Dans un deuxième temps, il est demandé aux élèves d'utiliser ce savoir dans les différents exercices dont la proximité avec les premiers n'est pas contrôlée.

9.5.3 La mémoire didactique :

- La mémoire didactique devient nécessaire dès que l'on veut opérationnaliser celle de contrat didactique. 1991 G Brousseau, J.Centeno.
- Je placerai les travaux d'A.Mercier près de ces travaux : A.Mercier a montré à partir de la biographie personnelle de l'élève, les effets des contraintes dues au temps didactique sur les savoirs personnels. Il a mis en évidence que « c'est en définitive aux élèves eux-mêmes de constituer - chacun pour soi - les objets ainsi connus en une organisation de savoirs. » On retrouve là la difficile question de ce qui doit rester in fine sous la responsabilité de l'élève, son jardin secret, là où il SE construit, où il assume la responsabilité de la signification des savoirs.

9.6 Le traitement de l'erreur : une composante essentielle du contrat didactique

La détermination et l'attribution de l'erreur

- Elle est le plus souvent le fait de l'enseignant. Les recherches ont montré qu'une même réponse erronée était attribuée à des causes différentes suivant ce que l'enseignant connaît de l'élève qui l'a produite. (les bons élèves sont sur-notés, les faibles sous-notés)

- La façon dont l’enseignant traite les erreurs est déterminante pour la représentation par les élèves de ce qu’est l’activité mathématique et pour l’idée qu’ils se font d’eux-mêmes en tant que mathématicien et même personne intelligente.

Le traitement de l’erreur dans les pratiques usuelles

- Dans la pédagogie classique, l’erreur n’avait pas d’existence publique dans la classe : seuls sont interrogés pour la correction ceux qui ont bien fait, (par peur de la contamination). Par contre, elle était prise en compte par l’enseignant sur le mode privé, de manière plus ou moins approfondie : « tu t’es trompé » sans préciser en quoi à l’élève, ou « réapprends la table de 3 » , et plus ou moins culpabilisante.
- Actuellement, tous les pédagogues sont d’accord pour « réhabiliter l’erreur » .

Une littérature abondante a été écrite sur ce sujet, mais les pratiques restent tributaires des possibilités de gestion de la classe.

Les deux modes de prise en compte et de re-médiation les plus courants visent la compréhension en ré-expliquant, ou la réussite en proposant des méthodes de résolution à appliquer.

Deux raisons aux effets limités de ces traitements

- Le travail sur l’erreur, pour être efficace, doit être à la charge de l’élève et non du professeur

La correction la meilleure possible ne sert réellement que si elle répond aux questions que l’élève se pose à propos de son erreur ; Non pas quelle est la bonne réponse, mais d’où vient que ma réponse ne convient pas ? Dans le contrat didactique usuel, cette attitude n’est pas courante, l’élève attend l’évaluation du professeur. Seuls les bons élèves le font.

- Ces traitements ne sont pas efficaces quand l’erreur est la manifestation d’un obstacle.

La connaissance obstacle doit être identifiée et son rejet doit être incorporé dans le nouveau savoir.

Or toutes les façons de faire entrer les élèves dans le savoir mathématique ne permettent pas de tenir compte des connaissances antérieures. Quand le savoir est exposé par le maître, deux modèles peuvent coexister dans la tête de l’élève : le modèle antérieur, implicite, et celui enseigné. Un certain nombre de travaux ont attesté de l’existence de plusieurs modèles, en les reliant aux conditions dans lesquelles ils étaient utilisés par les élèves.

9.7 Le traitement des obstacles

Le franchissement d’obstacles implique très souvent à la fois une restructuration des modèles d’action, du langage et des systèmes de preuves des élèves.

Pour ce faire :

- certains enseignants provoquent délibérément les erreurs pour attirer l’attention de leurs élèves sur ces difficultés.
- la théorie des situations propose une démarche « d’apprentissage par adaptation », qui a été présentée ci-dessus. Cette démarche doit permettre de prendre en compte les connaissances déjà là de l’élève et de travailler sur les contradictions que leur prise en compte exclusive provoque dans la résolution de problèmes bien choisis. Un exemple, celui de l’agrandissement du puzzle pour travailler sur l’obstacle additif vous a été proposé.

BIBLIOGRAPHIE

BACHELARD G. (1938) *La formation de l’esprit scientifique.* Vrin
BROUSSEAU G. (1998) *La théorie des situations* La Pensée Sauvage
Ce livre est le recueil des principaux articles de G. Brousseau, écrits entre 75 et 90

Equipe ERMEL INRP (1991) *Apprentissages mathématiques en 6ème*, éditeur Hatier

10 La dialectique outil-objet des cadres et jeux de cadres.

R.DOUADY a étudié ce fait suivant : pour un élève, pouvoir passer d'un cadre de résolution à un autre constitue sans aucun doute une étape nécessaire à l'acquisition d'un notion mise en jeu dans un problème.
Reprenons ses définitions : "Un **cadre** est constitué des objets d'une branche des mathématiques, des relations entre les objets, de leurs formulations éventuellement diverses et des images mentales associées à ces objets et ces relations.[...] Le **changement de cadres** est un moyen d'obtenir des formulations différentes d'un problème qui sans être nécessairement tout à fait équivalentes, permettent un nouvel accès aux difficultés rencontrées et la mise en oeuvre d'outils et techniques qui ne s'imposaient pas dans la première formulation."[9]

Dialectique outil-objet :

Un concept est outil lorsque nous focalisons notre intérêt sur l'usage qui en est fait pour résoudre un problème. Par objet, nous entendons objet culturel ayant sa place dans un édifice plus large qui est le savoir savant à un moment donné, reconnu socialement.

Cette théorie s'est donc développée en adoptant un point de vue épistémologique qui donne une grande importance à la résolution de problèmes, aussi bien dans la construction du savoir que comme critère du savoir. C'est pour cela que nous plaçons ce travail entre la transposition didactique et la théorie des champs conceptuels.

Citons les travaux de R.Douady sur l'enseignement des décimaux, de M.J. Perrin : "Aires de surfaces planes et nombres décimaux. Questions didactiques liées aux élèves en difficulté aux niveaux CM-6ème" Thèse Université Paris 7 ainsi que (1989) Une expérience d'enseignement des mathématiques à des élèves de 6ème en difficultés *Cahier DIDIREM n° 5* IREM de Paris 7

[9] DOUADY R. "Jeux de cadres et dialectique outil-objet" - RDM vol n°7/2 (1987)

11 Prolongements : les inter-actions entre ces théories :

11.1 avec l'approche anthropolgique :

Nous disons que la théorie des situations s'intéresse au fonctionnement de la machine, la théorie anthropologique s'intéresse aux conditions de fonctionnement de la machine. (économie, écologie).L'approche " anthropologique " s'articule avec la théorie des situations et la complète. Elle permet un accès plus direct à un certain nombre de problèmes notamment ceux concernant la macro-didactique et le rapport au savoir. La théorie des situations peut étendre avec profit ses méthodes de modélisation à ce champ. Par exemple, qu'est-ce qu'une population " homogène " relativement à une connaissance ? dans quelles conditions cette homogénéité s'accroît ou décroît ? Le choix d'une bonne définition de l'homogénéité joue une rôle important, aussi bien pour comprendre comment les résultats de l'action scolaire peuvent ou non s'adapter à la demande sociale, que pour concevoir l'action didactique à mener dans une classe " hétérogène ". L'étude des conditions générales qui permettent à un savoir de percoler dans l'ensemble des institutions d'une société ou qui le condamnent à rester confiné dans des isolats est de première importance pour la détermination des savoirs de la scolarité obligatoire.Y. Chevallard s'intéresse surtout au passage de l'objet de savoir savant à l'objet à enseigner, GB s'intéresse plus au passage de l'objet d'enseignement à l'objet enseigné. Idée de produire et de contrôler.

Sujets étudiés : construction des nombres entiers, des rationnels et des décimaux, numération, opérations arithmétiques, géométrie, raisonnement, algèbre.

TP : le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Petit x 19 Y.Chevallard.

TP faire renaître des objectifs en terme d'épistémologie des savoirs. C'est lié à la réorganisation des savoirs jusqu'à la recherche (non toujours fructueuse des situations fonfdamentales : d'où l'intérêt de l'article de Marc Legrand.

Il y a un lien entre

Genèse de la mise en facteur du trinôme du second degré, découverte de l'intégrale de Riemamn à partir de la SF de l'attraction d'une barre et d'une masse ponctuelle, statut des travaux algébriques du collège, et leur poursuite en lycée, genèse liée à celle des fonction.

11.2 avec la théorie des champs conceptuels : confirmer les rôles réciproques des connaissances et des savoirs

Tout un champ de recherches est ouvert : il s'agit confirmer le rôle des connaissances spontanées dans leur rapport aux savoirs enseignés. Dès lors, la théorie des situations va s'enrichir :

- Harrisson Ratsimba Rahjohn, en travaillant sur l'introduction des rationnels dans la scolarité obligatoire mettent au point une méthodologie de reconnaissance de l'existence de conceptions chez les élèves.
- A.Rouchier étudie le problème de la conversion réciproque entre savoir et connaissance et le rôle de l'institutionnalisation dans cette conversion.

Les travaux de J Briand (l'énumération 1993), M H Salin & R Berthelot (la géométrie 1992), de Pilar Oruz Baguena (la logique 1991), montrent que pour acquérir certains savoirs, et non des moindres, l'élève doit mettre en œuvre des connaissances qui ne font pas l'objet d'un enseignement, mais qui sont toutefois attendues par le système.

11.3 Le professeur comme objet d'étude dans la relation didactique

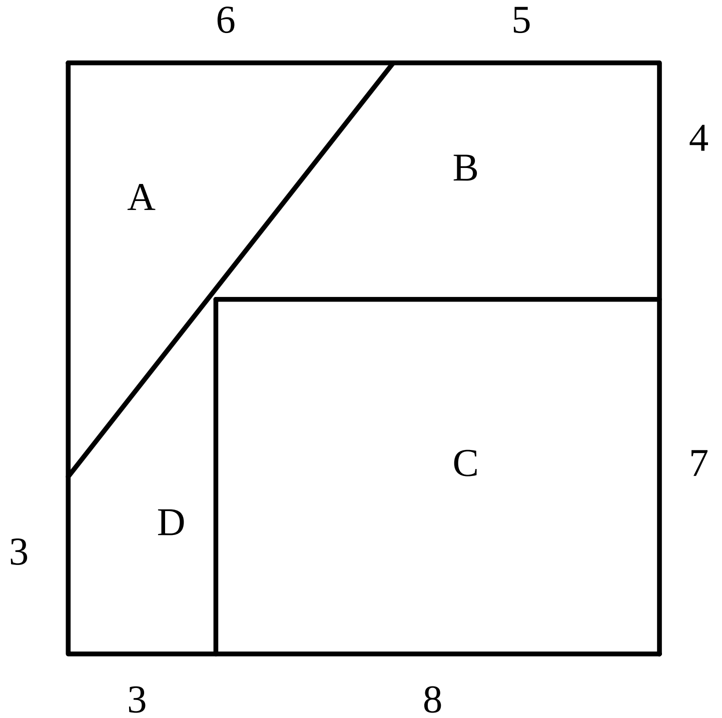
Le professeur n'est pas un acteur neutre : Influent sur son enseignemement,
- le rapport qu'il entretient avec les mathématiques, par le biais de ses représentations sur ce savoir
- ses conceptions de l'apprentissage.
- l'idée qu'il se fait de chacun de ses élèves, et donc les attentes qu'il développe à leur propos.

Voir, en particulier le travail récent de Blanchard Laville et coll : « Variations sur une leçon de mathématiques » ed. l'Harmattan. (1997)

12 Annexes

12.1 Annexe

D’après les pages 64 à 67 de INRP, ERMEL (1991) « Apprentissages mathématiques en 6ème » éditeur Hatier
DEUXIEME SITUATION
Organisation de la séance
Le professeur a préparé autant de puzzles en carton identiques au modèle ci-dessous que de groupes de 4 élèves. Il dispose d'un agrandissement du puzzle, coefficient 1,5, non communiqué aux élèves et d’un calque de cet agrandissement.



Un puzzle est remis à chaque groupe de 4 ; chaque élève reçoit une pièce. Il doit en mesurer les dimensions et les noter sur la pièce. Vérification collective des mesurages.
Consigne :
« J'ai fait un agrandissement de ce puzzle. Le voici. Par groupe, vous devez réaliser le même agrandissement . Chaque élève doit agrandir sa pièce.
Attention, à la fin, il faut pouvoir reconstituer le puzzle avec les pièces agrandies. Je vous donne une seule information : « ce côté (il montre le côté correspondant) qui mesure 4 cm sur votre puzzle, doit mesurer 6 cm sur le puzzle agrandi. »
Phase 1 :
Dans un premier temps, après une rapide concertation, chaque élève cherche seul à réaliser sa pièce agrandie ; puis le groupe essaie de reconstituer le carré.

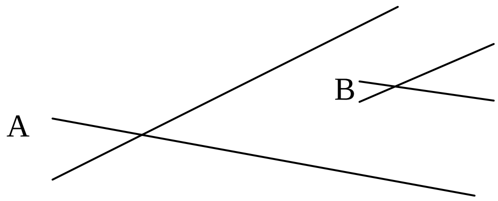
Phase 2 :
Les élèves sont invités, à l'intérieur de chaque groupe à discuter du résultat obtenu et de la méthode utilisée par chacun d'eux, et, en cas d'échec, à rechercher ensemble une nouvelle méthode commune à tous les élèves du groupe et à fabriquer les pièces correspondantes.

Pour terminer, chaque groupe consigne, sur une feuille prévue à cet effet, la méthode qu'il a utilisée pour réaliser l'agrandissement.
Phase 3 (séance suivante)
Les élèves de chaque groupe se concertent pour choisir un rapporteur et se mettre d'accord sur ce qui devra être rapporté. Le porte-parole de chaque groupe explique aux autres la méthode utilisée. Les diverses méthodes sont toutes affichées. Des demandes de renseignements peuvent être faites, des contradictions apportées.
Phase 4
On pourra classer les méthodes :
- celles qui aboutissent
- celles qui se ressemblent,
- ....

Pour expliciter les méthodes utilisées, on pourra utiliser les diagrammes suivants :
$4 \rightarrow 4 \times 1,5$ ou $\rightarrow \times 1,5$
$4 \rightarrow 4 + (4 : 2)$ ou $\rightarrow + (\ : 2)$

12.2 Annexe

Pour beaucoup d'élèves, la mesure de l'angle A n'est pas égale à celle de l'angle B



12.3 Annexe 3

COPIRELEM (1986) Eclairages sur l'enseignement des nombres décimaux in *Aides Pédagogiques pour le cycle moyen* Publication de l'APMEP n°61

4. Causes d'erreurs
Voici quelques exemples d'erreurs relevées dans l'usage des décimaux:
E_l: on rencontre fréquemment chez les élèves des égalités du type:
2,3 x 2,3 = 4,9
17,3 + 21,8 = 38,11
Ces erreurs sont interprétées généralement comme une difficulté à placer la virgule.
E_2. Pour 37 % des élèves de CM2 (Enquête INRP, 1979) le nombre 3,2 est inférieur à 3,135.
E_3: L'exercice :
écris un nombre dans la case vide, les nombres sont supposés rangés du plus petit au plus grand 1,23 1,24
est peu traité en général. Pour les élèves 1,23 et 1,24 sont deux décimaux consécutifs: ils ne conçoivent pas qu'on puisse intercaler d'autres décimaux.
E_3: les élèves ressentent souvent deux écritures du type. 1,23 et 1,230 comme représentant des nombres différents.
E_4 A la question : *lorsqu'on multiplie un nombre par un autre, le résultat sera-t-il automatiquement plus grand ?* La plupart des enfants répondent par l'affirmative.
Que signifient ces erreurs?

Les erreurs signalées plus haut, s'expliquent par le fait que les méthodes d'apprentissage des décimaux utilisées ne remettent pas en cause le modèle des entiers naturels, mais au contraire, l'utilisent.

- Considérons l'erreur désignée par E_l. : pour le produit et la somme indiquée, un décimal est considéré comme un couple de deux entiers naturels séparés par une virgule.

Le produit et la somme portent alors sur chaque composante des couples
2,3 x 2,3 = 4,9 car 2 x 2 = 4 et 3 x 3 = 9
17,3 + 21,8 = 38,11 car 17 + 21 = 38 et 3 + 8 = 11
• Pour comparer 3,2 et 3,135 (erreur E_2), les élèves comparent 2 et 135.
• Les élèves pensent que multiplier un nombre par un autre nombre n c'est obtenir un "nombre plus grand", car exceptés les cas où le nombre n est nul ou égal à 1 (cas que l'on rencontre peu souvent) c'est ce qui est vrai pour l'ensemble des entiers naturels.

12.4 Annexe

Quelques résultats des recherches de F. Léonard et C. Grisvard publiées dans : Sur deux règles implicites utilisées dans la comparaison de nombres décimaux positifs in *Aides Pédagogiques pour le cycle moyen* Publication de l'APMEP n°61

- 134 élèves de 4ème avaient à mettre en ordre les nombres suivants :

11,98 12,4 12 11,898 11,09 12,04 12,1 12,113 11,8 12,001
Font une erreur ou plus : 40 % des élèves
Les élèves ont recours à des règles fausses :
R1 : le nombre qui a le plus grand « entier » comme partie décimale est le plus grand :
12,113 > 12,4 car 113 > 4
R2 : le nombre qui a le plus grand nombre de décimales est le plus petit
12,04 < 12, 4 12,17 < 12,8 12,113 < 12,1
62 % des réponses erronées sont conformes à R1, 16 % à R2

12.5 Annexe

Il s'agit de comparer des productions d'élèves selon deux règles (règles d'action) de résolution d'équations à une inconnue[10] :
- la **« règle d'addition[11] »** (L'opération al-jabr :complément ou remplissage) qui consiste à se débarasser des termes à faire disparaître dans un membre de l'équation, par addition de termes égaux dans les deux membres.),
- la règle de **« transposition du terme »** : faire passer de l'autre côté en changeant de signe.
par exemple :

5x-12=3x 5x -12 +12 = 3x + 12 5x = 3x + 12 5x - 3x = 3x - 3x + 12 2x = 12 x = 6	5x-12=3x 5x = 3x + 12 5x - 3x = 12 2x = 12 x = 6

[10] (DEA de Didactique des mathématiquesD.Woillez Bordeaux 1993)
[11] (Voir explication historique page 161 du manuel de 4°)

Dans la classe, le professeur a coutume donner des règles d'action comme « simplifier », « mettre les x ensemble ». Or les recherches citées ci-dessus montrent que les élèves ont de la peine à contrôler simultanément la notion de « termes » et la notion « d'égalité ».
- Exemple 1 (issu du questionnaire qui suit) : On a l'équation $x^2 + 3x + 6 = 2x + x^2 - 2$, d'où on a obtenu $3x + 6 = 2x - 2$. Que s'est-il passé entre la 1° et la 2° ligne ? Est-ce juste ? Justifie ; un élève répond : « C'est faux, on aurait pu enlever les x^2 s'ils avaient été de signes contraires ».
- Autres exemples :

équation proposée	$\sqrt{2}$ (x-3)= 2 $\sqrt{2}$	4xf+3=2x-5
rédaction d'élève	$\sqrt{2}$ (x-3)= 2 $\sqrt{2}$ j'additionne les racines ensemble : (x-3)= 3 $\sqrt{2}$	4x+3=2x -5 6x=-2 x=-12

Voir aussi : traitement d'une fonction : obstacle didactique possible. Repère 5 p. 13