EXERCICE1 : (10 points)

Partie I

Pour tout entier naturel **non nul** n , on considère la fonction f_n définie sur $I=[0,+\infty[$

par : $f_n(0)=0$ et $(\forall x\in]0,+\infty[)$; $f_n(x)=\sqrt{x}(\ln x)^n$

et soit (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

0.5 1-a) Vérifier que : $(\forall x\in]0,+\infty[)$; $\sqrt{x}(\ln x)^n=(2n)^n\left(x^{\frac{1}{2n}}\ln\left(x^{\frac{1}{2n}}\right)\right)^n$, en déduire que f_n est continue à droite en 0

0.25 b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$

0.75 c) Vérifier que : $(\forall x\in]0,+\infty[)$; $\dfrac{f_n(x)}{x}=(2n)^n\left(\dfrac{\ln\left(x^{\frac{1}{2n}}\right)}{x^{\frac{1}{2n}}}\right)^n$, en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f_n(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0.5 d) Calculer, suivant la parité de n, $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f_n(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0.75 2-a) Montrer que f_n est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que :

$$(\forall x\in]0,+\infty[)\ ;\ f_n'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}(\ln x)^{n-1}(2n+\ln x)$$

0.25 b) Vérifier que : $\forall n\geq 2$, $f_n'(x)=0$ si et seulement si $(x=1$ ou $x=e^{-2n})$

1 c) Étudier, suivant la parité de n, le sens de variation de f_n et donner son tableau de variations.

0.25 d) Montrer que si n est impair et $n\geq 3$ alors le point d'abscisse 1 est un point d'inflexion de (C_n)

Partie II :

1- Soit $\beta\in]1,e[$ un réel fixé. On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ u_n=f_n(\beta)$$

0.25 a) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; $0<u_n<\sqrt{e}$

0.25 b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.

0.25 c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

0.5 2-a) Montrer que pour tout entier n non nul, il existe un unique réel $x_n\in]1;e[$ tel que : $f_n(x_n)=1$

0.75 b) Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ainsi définie est croissante, en déduire qu'elle est convergente.

3- On pose : $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$

0.5 a) Montrer que : $1 < \ell \leq e$

0.25 b) Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} (\ln x_n)^n = \dfrac{1}{\sqrt{\ell}}$

0.25 c) Montrer que si $\ell < e$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln(\ln x_n) = -\infty$

0.25 d) En déduire la valeur de ℓ

Partie III :

On pose pour tout $x \in I$, $F(x) = \int_x^1 (f_1(t))^2\, dt$

0.25 1-a) Montrer que la fonction F est continue sur I

1 b) En utilisant une double intégration par parties, montrer que :

$$(\forall x \in]0,+\infty[) \; ; F(x) = -\frac{x^2}{2}\ln^2(x) + \frac{x^2}{2}\ln(x) + \frac{1}{4}(1-x^2)$$

0.5 2-a) Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} F(x)$

0.25 b) En déduire la valeur de $F(0)$

0.5 c) Calculer, en cm^3, le volume du solide engendré par la rotation d'un tour complet autour de l'axe des abscisses de la portion de la courbe (C_1) relative à l'intervalle $[0,1]$. (On prendra $\|\vec{i}\| = 1\text{cm}$)

EXERCICE2 :(3.5 points)

Les parties I et II peuvent être traitées indépendamment.

PARTIE I :

On considère dans $\mathbb{R}_+^2$ le système suivant : $(S) : \begin{cases} \sqrt{x}\left(1 + \dfrac{1}{x+y}\right) = \dfrac{12}{5} \\ \sqrt{y}\left(1 - \dfrac{1}{x+y}\right) = \dfrac{4}{5} \end{cases}$

1- Soit $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2$ une solution du système (S). On pose : $z = \sqrt{x} + i\sqrt{y}$

0.25 a) Montrer que : $z + \dfrac{1}{z} = \dfrac{12}{5} + \dfrac{4}{5}i$

0.75 b) Montrer que : $z^2 - \left(\dfrac{12}{5} + \dfrac{4}{5}i\right)z + 1 = 0$, en déduire les valeurs possibles de z

(On remarque que : $\dfrac{28}{25} + \dfrac{96}{25}i = \left(\dfrac{2}{5}(4+3i)\right)^2$)

0.25 c) En déduire les valeurs du couple (x,y)

0.5 2- Résoudre dans $\mathbb{R}_+^2$ le système (S)

PARTIE II :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$

Soit (U) le cercle de centre O et de rayon1 et $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ trois points du cercle (U) deux à deux distincts.

0.25 1- Montrer que : $(\forall z\in\mathbb{C})$; $|z|=1 \Leftrightarrow \bar{z}=\dfrac{1}{z}$

0.5 2-a) La droite passant par A et parallèle à (BC) coupe le cercle (U) au point $P(p)$

Montrer que : $p=\dfrac{bc}{a}$

0.5 b) La droite passant par A et perpendiculaire à (BC) coupe le cercle (U) au point $Q(q)$. Montrer que : $q=-p$

0.5 c) La droite passant par C et parallèle à (AB) coupe le cercle (U) au point $R(r)$ Montrer que les deux droites (PR) et (OB) sont perpendiculaires.

<u>EXERCICE3</u> :(3.5 points)

On rappelle que $(M_3(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire et non commutatif d'unité

$I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. Soit $E=\left\{M(a,b,c)=\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&-c\\0&c&b\end{pmatrix}/(a,b,c)\in\mathbb{R}^3\right\}$

0.25 1- Montrer que E est un sous-groupe de $(M_3(\mathbb{R}),+)$

2- On munit l'ensemble $\mathbb{R}\times\mathbb{C}$ de la loi de composition interne $*$ définie par :
$\forall((x,z),(x',z'))\in(\mathbb{R}\times\mathbb{C})^2$; $(x,z)*(x',z')=(x+x',z+z')$ et on considère l'application φ définie de E vers $\mathbb{R}\times\mathbb{C}$ par :

$$\forall(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ \varphi(M(a,b,c))=(a,b+ci)$$

0.5 a) Montrer que φ est un homomorphisme de $(E,+)$ vers $(\mathbb{R}\times\mathbb{C},*)$ et que $\varphi(E)=\mathbb{R}\times\mathbb{C}$

0.25 b) En déduire que $(\mathbb{R}\times\mathbb{C},*)$ est un groupe commutatif.

3- On munit $\mathbb{R}\times\mathbb{C}$ de la loi de composition interne T définie par :

$$\forall((x,z),(x',z'))\in(\mathbb{R}\times\mathbb{C})^2\ ;\ (x,z)T(x',z')=(x\operatorname{Re}(z')+x'\operatorname{Re}(z),\ zz')$$

($\operatorname{Re}(z)$ désigne la partie réelle du nombre complexe z)

0.25 a) Montrer que T est commutative.

0.25 b) Vérifier que $(0,1)$ est l'élément neutre de T dans $\mathbb{R}\times\mathbb{C}$

0.5 c)Vérifier que $\forall x\in\mathbb{R},\ (1,i)T(x,-i)=(0,1)$; en déduire que T est non associative dans $\mathbb{R}\times\mathbb{C}$

4- Soit $G=\{(\operatorname{Im}(z),z)/z\in\mathbb{C}\}$

($\operatorname{Im}(z)$ désigne la partie imaginaire du nombre complexe z)

0.25 a) Montrer que G est un sous-groupe de $(\mathbb{R}\times\mathbb{C},*)$

(On remarque que $(-\mathrm{Im}(z),-z)$ est le symétrique de $(\mathrm{Im}(z),z)$ pour la loi $*$)

0.25 b) Soit ψ l'application définie de $\mathbb{C}^*$ vers $\mathbb{R}\times\mathbb{C}$ par : $\forall z\in\mathbb{C}^*;\ \psi(z)=(\mathrm{Im}(z),z)$

Montrer que ψ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ vers $(\mathbb{R}\times\mathbb{C},T)$

0.5 c) En déduire que $(G-\{(0,0)\},T)$ est un groupe commutatif.

0.5 5- Montrer que $(G,*,T)$ est un corps commutatif.

EXERCICE4 : (3 points)

Soit p un nombre premier impair. On pose : $S=1+p+p^2+p^3+\ldots+p^{p-1}$

Soit q un nombre premier qui divise S.

0.5 1- a) Montrer que p et q sont premiers entre eux.

0.25 b) En déduire que : $p^{q-1}\equiv 1\ [q]$

0.5 c) Vérifier que : $p^p-1=(p-1)S$, en déduire que : $p^p\equiv 1\ [q]$

2- On suppose que p et $q-1$ sont premiers entre eux.

0.75 a) En utilisant le théorème de Bézout, montrer que : $p\equiv 1\ [q]$

0.25 b) En déduire que $S\equiv 1\ [q]$

0.75 3- Montrer que : $q\equiv 1\ [p]$

FIN

2sm 2023 rattrapage
essalhy ***ouazzane

Correction Maths
2SM - session Rattrapage
ESSALHY — 2023R —

Exercice N°(01) (10pts)

partie I : $\begin{cases} f_n(0) = 0 \\ f_n(x) = \sqrt{x}(\ln x)^n \; ; \; x > 0 \end{cases}$ $n \in \mathbb{N}^*$

1) a) $\sqrt{x}(\ln x)^n = x^{\frac{1}{2}}\left(\ln\left(x^{\frac{2n}{2n}}\right)\right)^n \; ; \; x > 0$

$= \left(x^{\frac{1}{2n}}\right)^n \left(2n \times \ln\left(x^{\frac{1}{2n}}\right)\right)^n$

$= (2n)^n \left(x^{\frac{1}{2n}} \ln\left(x^{\frac{1}{2n}}\right)\right)^n$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f_n(x) = \lim (2n)^n \left(x^{\frac{1}{2n}} \times \ln\left(x^{\frac{1}{2n}}\right)\right)^n = 0$

car $\lim\limits_{X \to 0^+} X \ln X = 0$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{+\infty} \sqrt{x} = +\infty \\ \lim\limits_{+\infty} (\ln x)^n = +\infty \end{cases}$

c) soit $x > 0$ $\dfrac{f_n(x)}{x} = \dfrac{(2n)^n \left(x^{\frac{1}{2n}} \ln\left(x^{\frac{1}{2n}}\right)\right)^n}{x}$

$= \dfrac{(2n)^n x^{\frac{1}{2}} \left(\ln\left(x^{\frac{1}{2n}}\right)\right)^n}{x}$

$$\frac{f_n(x)}{x} = \frac{(2n)^n\left(\ln(x^{1/2n})\right)^n}{x^{1/2}}$$

$$= \frac{(2n)^n\left(\ln(x^{\frac{1}{2n}})\right)^n}{\left(x^{\frac{1}{2n}}\right)^n}$$

$$= (2n)^n\left(\frac{\ln(x^{\frac{1}{2n}})}{x^{\frac{1}{2n}}}\right)^n$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f_n(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}(2n)^n\left(\frac{\ln(x^{\frac{1}{2n}})}{x^{\frac{1}{2n}}}\right)^n$$

ESSALHI

on pose $X = x^{\frac{1}{2n}}$

$$= \lim_{X\to+\infty}(2n)^n\left(\frac{\ln X}{X}\right)^n = 0$$

car $\lim_{X\to+\infty}\frac{\ln X}{X} = 0$

puisque $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{f_n(x)}{x} = 0$ alors $\mathscr{C}_f$ admet une branche parabolique de direction l'axe (Ox) au voisinage de $+\infty$

d) $\lim_{x\to0^+}\frac{f_n(x)}{x} = \lim_{x\to0^+}\frac{(\ln x)^n}{\sqrt{x}}$ 2

on sait que $\lim_{x\to0^+}\ln x = -\infty$ et $\lim_{0^+}\sqrt{x} = 0^+$

donc si n est pair alors $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f_n(x)}{x} = +\infty$

si n est impair alors $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f_n(x)}{x} = -\infty$

Interpretation graphique :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f_n(x) - f_n(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f_n(x)}{x} = \pm\infty$$

donc f_n n'est pas derivable en 0^+
et $\mathcal{C}_{f_n}$ admet une demi tangente verticale
en 0^+ (vers le haut si n pair
vers le bas si n est impair)

---

2) a - on a : $x \mapsto \sqrt{x}$ est derivable sur $]0,+\infty[$
et $x \mapsto (\ln x)^n$ est derivable sur $]0,+\infty[$
donc f_n est derivable sur $]0,+\infty[$ comme
produit de deux fcts derivables sur $]0,+\infty[$

soit $x>0$:

$$f_n'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} (\ln x)^n + \sqrt{x} \times n \times \frac{1}{x} \times (\ln x)^{n-1}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} (\ln x)^n + n \times \frac{1}{\sqrt{x}} (\ln x)^{n-1}$$

3

$$f_n'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} (\ln x)^{n-1} \left(\ln(x) + 2n \right)$$

b) $f_n'(x) = 0 \iff \frac{1}{2\sqrt{x}} (\ln x)^{n-1} (2n + \ln x) = 0 \Big/ \begin{cases} n \geq 2 \\ x > 0 \end{cases}$

$\iff (\ln x)^{n-1} = 0$ ou $2n + \ln x = 0$

$\iff \ln x = 0$ ou $\ln x = -2n$

$\iff x = 1$ ou $x = e^{-2n}$

c) - si $n \geq 2$ et n est pair alors $n-1$ est impair

donc le signe de $f_n'(x)$ et le signe de

$(\ln x)^{n-1} \times (2n + \ln x)$

x	0		e^{-2n}		1		$+\infty$
$\ln x$	‖	$-$		$-$	0	$+$	
$2n + \ln x$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

donc f est croissante sur $]0, e^{-2n}]$ et sur $[1, +\infty[$

et f est décroissante sur $[e^{-2n}, 1]$

donc si $n \geq 2$ et n est pair :

x	0		e^{-2n}		1		
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	$\nearrow$	$f(e^{-2n})$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$$f(e^{-2n}) = \sqrt{e^{-2n}}\left(-\ln(e^{-2n})\right)^n$$
$$= e^{-n} \times (-2n)^n = \left(-\frac{2n}{e}\right)^n$$

• Si $n \geq 2$ et n impair alors $n-1$ est pair

donc le signe de $f_n'(x)$ est le signe de $2n + \ln x$ car $\forall x > 0 \ \frac{1}{2\sqrt{x}}(\ln x)^{n-1} \geq 0$

x	0		e^{-2n}		$+\infty$
$2n + \ln x$	$\|$	$-$	0	$+$	

donc $f \nearrow$ sur $[e^{-2n}, +\infty[$ et $f \searrow$ sur $]0, e^{-2n}]$

donc si $n \geq 2$ et n est impair

x	0		e^{-2n}		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$f(e^{-2n})$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

• Si $n = 1$: $f_1'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(2 + \ln x)$

le signe de $f'(x)$ est le signe de $2 + \ln x$

donc $f_1 \nearrow$ sur $[e^{-2}, +\infty[$ et $f_1 \searrow$ sur $[0, e^{-2}]$

donc

x	0		e^{-2}		
f_1'	$\|$	$-$	0	$+$	
$f_1(x)$		$\searrow$	$f(e^{-2})$	$\nearrow$	$+\infty$

d) d'après c/ si n est impair et $n \geq 3$

$f'(1) = 0$ et $\forall x \in [e^{-2}, +\infty[$ $f'(x) \geq 0$

alors C_{f_n} admet un pt
d'inflexion d'abscisse 1.

partie IV $\beta \in]1, e[$

$U_n = f_n(\beta)$; $n \in \mathbb{N}^*$

a) Mq $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $0 < U_n < \sqrt{e}$

d'après c/ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ f_n est strict croissante sur $[1, e]$

et $1 < \beta < e$

$f_n(1) < f_n(\beta) < f_n(e)$

$0 < U_n < \sqrt{e}$

b) $U_{n+1} - U_n = f_{n+1}(\beta) - f_n(\beta)$

$= \sqrt{\beta}(\ln\beta)^{n+1} - \sqrt{\beta}(\ln\beta)^n$

$= \sqrt{\beta}(\ln\beta)^n(\ln\beta - 1)$

6

ESSALHY

puisque $1 < \beta < e$ alors $0 < \ln\beta < 1$

et par suite $0 < (\ln\beta)^n$ et $\ln\beta - 1 < 0$ car $\ln$ est $\nearrow$ strict

donc $u_{n+1} - u_n < 0$

d'où (u_n) est décroissante.

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{\beta}\,(\ln\beta)^n = 0$

car $0 < \ln\beta < 1$

2) a- f_n est continue et strict. croissante

sur $[1, e]$

et $f_n(1) = 0 < 1$ et $f_n(e) = \sqrt{e} > 1$

et puisque 1 est strict. compris entre

$f_n(1)$ et $f_n(e)$ alors d'après TVI

$\exists!\, x_n \in]1, e[$ tq $f_n(x_n) = 1$.

b) Mq (x_n) est croissante.

$f_{n+1}(x_n) = \sqrt{x_n}\,(\ln x_n)^{n+1}$

$= \sqrt{x_n}\,(\ln x_n)^n \times (\ln x_n)$

$= f_n(x_n) \times \ln(x_n)$

7

ESSALHY

$f_{n+1}(x_n) = \ln x_n$ car $f_n(x_n) = 1$

et puisque $1 < x_n < e$

alors $0 < \ln x_n < 1$ car $\ln \nearrow$

donc $f_{n+1}(x_n) < 1$

par suite: $f_{n+1}(x_n) < f_{n+1}(x_{n+1})$

et f_{n+1} est croissante sur $[1, e]$

donc $x_n < x_{n+1}$

d'où (x_n) est croissante

. puisque (x_n) est croissante et majorée par e alors (x_n) est convergente

3) on pose $l = \lim x_n$

a) on a: (x_n) est croissante et $1 < x_n < e$

donc $x_1 \leq x_n < e$

par suite $x_1 \leq \lim x_n \leq e$ et on a $1 < x_1$

donc $1 < l \leq e$

b) Mq $\lim\limits_{n \to +\infty} (\ln x_n)^n = \frac{1}{\sqrt{e}}$

on a: $f_n(x_n) = 1$

ESSALHY

8

par suite $\sqrt{x_n}\,(\ln x_n)^n = 1$

$$(\ln x_n)^n = \frac{1}{\sqrt{x_n}}$$

et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x_n}} = \frac{1}{\sqrt{\ell}}$ car $\lim x_n = \ell > 1$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (\ln(x_n))^n = \frac{1}{\sqrt{e}}$

c) supposons $\ell < e$

$\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \ell$ et $\ln$ est continue en ℓ

alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln(x_n) = \ln(\ell) < \underbrace{\ln e}_{1}$

et $\ln$ est continue en $\ln(\ell)$

donc $\lim \ln(\ln(x_n)) = \ln(\ln(\ell)) < 0$ (*)

car $\ln \ell < 1$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} n \ln(\ln(x_n)) = -\infty$

car $\lim n = +\infty$ et (*)

d) La valeur de ℓ:

supp $\ell < e$ donc $\lim n \ln(\ln x_n) = -\infty$ (**)

d'après c/

et on a: $\lim\limits_{n \to +\infty} (\ln x_n)^n = \frac{1}{\sqrt{e}}$

9

et ln est continue en $\frac{1}{\sqrt{e}}$

donc $\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\ln(x_n)\right)^n = \ln \frac{1}{\sqrt{e}}$

$\lim_{n\to+\infty} n \ln(\ln x_n) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$

cela est contradictoire avec (**)

d'où $l = e$ car $e \in]1, e]$

---

partie III $x \in [0;+\infty[$

$$F(x) = \int_x^1 (f_1(t))^2 \, dt$$

1) a) $F(x) = -\int_1^x (f_1(t))^2 \, dt$

f_1^2 est continue sur $I = [0,+\infty[$ et $x \in I$

donc F est derivable sur I et par suite

F est continue sur I.

b) $F(x) = \int_x^1 t (\ln t)^2 \, dt$ $x > 0$

$u(x) = (\ln t)^2$ $u'(x) = 2 \frac{\ln t}{t}$

$v'(x) = t$ $v(x) = \frac{1}{2} t^2$

$F(x) = \left[\frac{1}{2} t^2 (\ln t)^2\right]_x^1 - \int_x^1 t \ln t \, dt$

$u(x) = \ln t$ $u'(x) = \frac{1}{t}$

$v'(x) = t$ $v(x) = \frac{1}{2} t^2$

$$F(x) = \left[\frac{1}{2}t^2(\ln t)^2\right]_x^1 - \left(\left[\frac{1}{2}t^2\ln t\right]_x^1 - \frac{1}{2}\int_x^1 t\,dt\right)$$

$$= -\frac{1}{2}x^2(\ln x)^2 + \frac{1}{2}x^2\ln x + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}t^2\right]_x^1$$

$$F(x) = -\frac{1}{2}x^2(\ln x)^2 + \frac{1}{2}x^2\ln x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}x^2$$

---

2) a) $\lim\limits_{x \to 0^+} F(x)$

$$= \lim -\frac{1}{2}(x\ln x)^2 + \frac{1}{2}x^2\ln x + \frac{1}{4}(1-x^2)$$

$$= \frac{1}{4}$$

car $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2\ln x = 0$

---

b/ puisque F est continue sur $[0,+\infty[$

donc $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x) = F(0)$

donc d'après a) $F(0) = 0$

3) $V = \pi\int_0^1 (f_1(t))^2\,dt \times 1\ cm^3$

$= \pi F(0)\ cm^3$

$V = \frac{\pi}{4}\ cm^3$

11

ESSALHI

EXERCICE : 2 (3,5 pts)

partie I :

$$(S) : \begin{cases} \sqrt{x}\left(1+\frac{1}{x+y}\right) = \frac{12}{5} \\ \sqrt{y}\left(1-\frac{1}{x+y}\right) = \frac{4}{5} \end{cases}$$

1) soit (x,y) e solution de (S) on pose $z=\sqrt{x}+i\sqrt{y}$

donc $z \neq 0$ car $(0,0)$ n'est pas sol de (S).

a) $$z+\frac{1}{z} = \sqrt{x}+i\sqrt{y} + \frac{1}{\sqrt{x}+i\sqrt{y}}$$

$$= \sqrt{x}+i\sqrt{y} + \frac{\sqrt{x}-i\sqrt{y}}{x+y}$$

$$= \sqrt{x}+\frac{\sqrt{x}}{x+y} + i\left(\sqrt{y}-\frac{\sqrt{y}}{x+y}\right)$$

$$= \sqrt{x}\left(1+\frac{1}{x+y}\right)+i\sqrt{y}\left(1-\frac{1}{x+y}\right)$$

$$= \frac{12}{5} + i\frac{4}{5}$$

b) $$z+\frac{1}{z} = \frac{12}{5}+\frac{4}{5}i \qquad z\neq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{z^2+1}{z} = \frac{12}{5}+\frac{4}{5}i$$

$$\Leftrightarrow z^2+1 = \left(\frac{12}{5}+\frac{4}{5}i\right)z$$

$$\Leftrightarrow z^2-\left(\frac{12}{5}+\frac{4}{5}i\right)z+1=0$$

ESSALHI

12

$$\Delta = \left(\frac{12}{5} + \frac{4}{5} i\right)^2 - 4$$
$$= \frac{144}{25} - \frac{16}{25} + 2i \times \frac{48}{25} - 4$$
$$= \frac{144 - 16 - 100}{25} + i \frac{96}{25}$$
$$= \frac{28}{25} + \frac{96}{25} i = \left(\frac{2}{5}(4+3i)\right)^2 \ (*)$$

on vérifie facilement $(*)$

donc $z_1 = \dfrac{\frac{12}{5} + \frac{4}{5} i + \frac{8}{5} + \frac{6}{5} i}{2} = \frac{10}{5} + i = 2 + i$

$z_2 = \dfrac{\frac{12}{5} + \frac{4}{5} i - \frac{8}{5} - \frac{6}{5} i}{2} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5} i$

c) Les valeurs possibles de (x, y)

si $z_1 = \frac{10}{5} + i \Rightarrow \sqrt{x} + i\sqrt{y} = \frac{10}{5} + i$
$\Rightarrow x = 4$ et $y = 1$

si $z_2 = \frac{2}{5} - \frac{1}{5} i \Rightarrow \sqrt{x} + i\sqrt{y} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5} i$
impossible

donc $(x, y) = (4, 1)$

2) d'après 1) si (x, y) solution de (S)
alors $(x, y) = (4, 1)$

Inversement : si $(x, y) = (4, 1)$ alors

$\sqrt{4}\left(1 + \frac{1}{4+1}\right) = 2 \times \left(1 + \frac{1}{5}\right) = 2 \times \frac{6}{5} = \frac{12}{5}$

$\sqrt{1}\left(1 - \frac{1}{4+1}\right) = 1 \times \left(1 - \frac{1}{5}\right) = \frac{4}{5}$

donc $(4, 1)$ solution de (S)

d'où $S = \{(4, 1)\}$.

2+i

ESSALHY

.i

5)

(S)

partie II

$(U) = \mathcal{C}(O; 1)$

1) si $z = 0$ la proposition est vraie

car les deux propositions sont fausses

si $z \neq 0$:

$|z| = 1 \iff |z|^2 = 1$

$\iff z\bar{z} = 1$

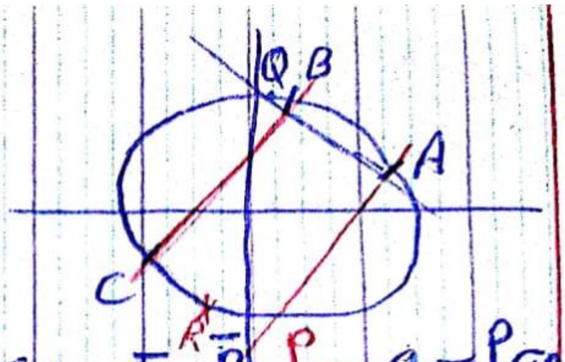
$\iff \bar{z} = \frac{1}{z}$

d'où le résultat

13

14

2) a) $(BC) \parallel (AP)$



$$\Leftrightarrow \left(\frac{a-p}{b-c}\right) \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \overline{\left(\frac{a-p}{b-c}\right)} = \frac{a-p}{b-c} \Leftrightarrow \frac{\bar{a}-\bar{p}}{\bar{b}-\bar{c}} = \frac{a-p}{b-c} \quad (*)$$

et puisque A, B et C et $P \in (U)$

alors $|a|=1$, $|b|=1$, $|c|=1$ et $|p|=1$

donc $\bar{a}=\frac{1}{a}$ et $\bar{b}=\frac{1}{b}$ et $\bar{c}=\frac{1}{c}$ et $\bar{p}=\frac{1}{p}$

$$(*) \Rightarrow \frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{p}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{c}} = \frac{a-p}{b-c}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{p-a}{ap}}{\frac{c-b}{bc}} = \frac{a-p}{b-c}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{ap}}{\frac{1}{bc}} = 1$$

$$\Rightarrow bc = ap$$

$$\Rightarrow \boxed{p = \frac{bc}{a}}$$

b) $(AQ) \perp (BC)$

$\Leftrightarrow \dfrac{q-a}{b-c} \in i\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \overline{\left(\dfrac{q-a}{b-c}\right)} = -\left(\dfrac{q-a}{b-c}\right)$

$\Leftrightarrow \dfrac{\overline{q}-\overline{a}}{\overline{b}-\overline{c}} = -\dfrac{q-a}{b-c}$

et puisque A, Q, B et C des pts de (U)

$\overline{a} = \dfrac{1}{a}$, $\overline{q} = \dfrac{1}{q}$, $\overline{b} = \dfrac{1}{b}$ et $\overline{c} = \dfrac{1}{c}$

$\Rightarrow \dfrac{\frac{1}{q} - \frac{1}{a}}{\frac{1}{b} - \frac{1}{c}} = -\dfrac{q-a}{b-c}$

$\Rightarrow \dfrac{a-q}{c-b} \times \dfrac{bc}{aq} = -\dfrac{q-a}{b-c}$

$\Rightarrow \dfrac{bc}{aq} = -1$

$\Rightarrow q = -\dfrac{bc}{a}$ et d'après 2) a

$\Rightarrow q = -p$

c) $(AB) \parallel (RC)$

$\Leftrightarrow \dfrac{r-c}{b-a} \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \frac{\bar{r}-\bar{c}}{\bar{b}-\bar{a}} = \frac{r-c}{b-a}$$

et $\bar{r}=\frac{1}{r}$ et $\bar{c}=\frac{1}{c}$ et $\bar{b}=\frac{1}{b}$ et $\bar{a}=\frac{1}{a}$

donc $$\frac{\frac{1}{r}-\frac{1}{c}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}} = \frac{r-c}{b-a}$$

$$\Rightarrow \frac{c-r}{a-b} \times \frac{ba}{rc} = \frac{r-c}{b-a}$$

$$\Rightarrow \frac{b \times a}{cr} = 1$$

$$\Rightarrow r = \frac{ab}{c}$$

Montrons que $(PR) \perp (OB)$

$$\frac{\overline{p-r}}{\bar{b}} = \frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}}{\frac{1}{b}}$$ car $\bar{p}=\frac{1}{p}$ ..... et $\frac{1}{r}=\bar{r}$

$$= \frac{\frac{a}{bc}-\frac{c}{ab}}{\frac{1}{b}} = \frac{b^2\left(\frac{a}{bc}-\frac{c}{ab}\right)}{b^2 \times \frac{1}{b}}$$

$$= \frac{\frac{ab}{c}-\frac{bc}{a}}{b}$$

$$= -\frac{\frac{bc}{a}-\frac{ab}{c}}{b}$$

$$= -\frac{p-r}{b}$$

17

ESSALHY

$\Rightarrow \dfrac{p-r}{b-o} \in i\mathbb{R}$

$\Rightarrow (PR) \perp (OB)$.

EXERCICE (3) (3,5pts).

$$E = \left\{ M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & -c \\ 0 & c & b \end{pmatrix} \,/\, (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

1) Mq E est un s.groupe de $(M_3(\mathbb{R}), +)$

- $E \neq \emptyset$ car $0 = M(0,0,0) \in E$

- soit $M(a,b,c)$ et $M(a',b',c')$ de E

$$M(a,b,c) - M(a',b',c') = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & -c \\ 0 & c & b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a' & 0 & 0 \\ 0 & b' & -c' \\ 0 & c' & b' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a-a' & 0 & 0 \\ 0 & b-b' & c-c' \\ 0 & c-c' & b-b' \end{pmatrix}$$

$$= M(a-a', b-b', c-c') \in E$$

avec $(a-a', b-b', c-c') \in \mathbb{R}^3$.

2) $\forall ((x,z),(x',z')) \in (\mathbb{R}\times\mathbb{C})^2$

$(x,z) * (x',z') = (x+x', z+z')$

$\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}\times\mathbb{C}$

$\quad M(a,b,c) \longmapsto \varphi M(a,b,c) = (a, b+ci)$

a) $\varphi\left(M(a,b,c) + M(a',b',c')\right)$

$= \varphi\left(M(a+a', b+b', c+c')\right)$

$= \left(a+a', b+b'+i(c+c')\right)$

$= \left(a+a', (b+ic)+(b'+ic')\right)$

$= \underbrace{(a, b+ic) + (a', b'+ic')}_{=(a,b+ic) * (a',b'+ic')}$

$= \varphi\left(M(a,b,c)\right) * \varphi\left(M(a',b',c')\right)$

d'où φ est un homomorphisme de $(E,+)$ vers $(\mathbb{R}\times\mathbb{C}, *)$

$\varphi(E) = \{ \varphi(M(a,b,c)) \,/\, M(a,b,c) \in E \}$

$= \{ (a, b+ic) \,/\, (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \}$

$= \mathbb{R}\times\mathbb{C}$

b) puisque φ est un morphisme de $(E,+)$ vers $(\mathbb{R}\times\mathbb{C}, *)$ et $(E,+)$ est un s.groupe du groupe commutatif $(M_3(\mathbb{R}),+)$ et par suite $(E,+)$ est un groupe commutatif

donc $(\mathbb{R}\times\mathbb{C}, *)$ est un groupe commutatif.

3) $\forall((x,z),(x',z'))\in(\mathbb{R}\times\mathbb{C})^2$

$$(x,z)\,T\,(x',z') = (x\,Re(z') + x'Re(z),\, zz')$$

a) $(x,z)\,T\,(x',z') = (x\,Re(z') + x'Re(z),\, zz')$

$$= (x'Re(z) + x\,Re(z'),\, z'z)$$

$$= (x',z')\,T\,(x,z)$$

---

b) Soit $(x,z)\in\mathbb{R}\times\mathbb{C}$

$$(x,z)\,T\,(0,1) = (x\,Re(1) + 0\times Re(z),\, z\times 1)$$

$$= (x\,,\,z)$$

et puisque T est commutative

alors $(0,1)$ est l'elt neutre de T dans $\mathbb{R}\times\mathbb{C}$

c/ soit $x \in \mathbb{R}$

$(1, i) \top (x, -i) = (1 \times Re(-i) + x \times Re(i), -i^2)$

$= (1 \times 0 + x \times 0, 1)$

$= (0, 1)$.

puisque $\forall x \in \mathbb{R}$

$(1, i) \top (x, -i) = (0, 1)$ alors:

pour $x = 2$ et $x = 3$

$(2, -i) \top ((1, i) \top (3, -i))$

$= (2 - i) \top (0, 1)$

$= (2, -i)$ car $(0,1)$ él^t neutre

$((2, -i) \top (1, i)) \top (3, -i)$

$= ((1, i) \top (2, -i)) \top (3, -i)$ car $\top$ commutatif

$= (0, 1) \top (3, -i)$

$= (3, -i)$

donc

$((2, -i) \top (1, i)) \top (3, -i) \neq (2, -i) \top ((1, i) \top (3, -i))$

4) $G = \{(Im(z), z) \,/\, z \in \mathbb{C}\}$

$G \neq \emptyset$ car $(0,0) = (Im(0), 0) \in G$

soit z et $z' \in \mathbb{C}$

on verifie : $(-Im(z), -z)$ est le symetri de $(Im(z), z)$ ds $(\mathbb{R} \times \mathbb{C}, *)$

$(-Im(z), -z) * (Im(z), z) =$

$= (-Im(z) + Im(z), -z + z)$

$= (0, 0)$

et $*$ est commutative

d'où le resultat

. $(Im(z), z) * (-Im(z'), -z')$

$= (Im(z) - Im(z'), z - z')$

$= (Im(z - z'), z - z') \in G$

et $z - z' \in \mathbb{C}$

d'où G est un s.groupe de $(\mathbb{R} \times \mathbb{C}, *)$

b) $\varphi \quad \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{C}$

$z \longmapsto \varphi(z) = (Im(z), z)$

$\varphi(z \times z') = (Im(z \times z'), z \times z')$

$= (Im(z) \times Re(z') + Im(z') \times Re(z), zz')$ (*)

car $z \times z' = (x+iy) \times (x'+iy')$

$= (xx' - yy') + i(xy' + yx')$

$= (xx' - yy') + i(Re(z) Im(z') + Im(z) \times Re(z'))$

$= (xx' - yy') + i(\underbrace{Im(z) \times Re(z') + Im(z') \times Re(z)}_{Im(zz')})$

et $\varphi(z) \top \varphi(z') = (Im(z), z) \top (Im(z'), z')$

$= Im(z) Re(z') + Im(z') \times Re(z)$ (**)

d'apres (*) et (**)

$\varphi(z \times z') = \varphi(z) \top \varphi(z')$

d'où φ morphisme de $(\mathbb{C}^*, \times)$

vers $(\mathbb{R} \times \mathbb{C}, \top)$.

salhi

c/ Mq $(G - \{(0,0)\}, T)$ groupe commutatif

$$\psi(\mathbb{C}^*) = \{(Im(z), z) \,/\, z \in \mathbb{C}^*\}$$
$$= \{(Im(z) * z) \,/\, z \in \mathbb{C} \text{ et } z \neq 0\}$$
$$= G \setminus \{(0,0)\}$$

car si $z \neq 0$ alors $(Im(z), z) \neq (0,0)$

et puisque ψ est un morphisme de $(\mathbb{C}^*, \times)$ vers $(\mathbb{R} \times \mathbb{C}, T)$

et $(\mathbb{C}^*, \times)$ est un groupe commutatif

salhi

donc $(\psi(\mathbb{C}^*), T)$ est un groupe commut
d'ou $(G \setminus \{(0,0)\}, T)$ est un groupe comm

5) $(G, *, T)$ est un corps commutatif

on a: $(G, *)$ est un groupe commutatif car G est un ss-groupe du groupe commutatif $(\mathbb{R} \times \mathbb{C}, *)$

et $(G \setminus \{(0,0)\}, T)$ est un groupe commut

reste à Mq T est distributive par rapport à $*$

soit z, z', z'' de $\mathbb{C}$

$$(Im(z), z)\,T\left((Im(z'), z') * (Im(z''), z'')\right)$$

$$= (Im(z), z)\,T\,(Im(z') + Im(z''), z' + z'')$$

$$= (Im(z), z)\,T\,(Im(z' + z''), z' + z'')$$

$$= (Im(z) \times Re(z' + z'') + Im(z' + z'') \times Re(z), z(z' + z''))$$

$$= (Im(z) \times Re(z') + Im(z) \times Re(z'') + Im(z') \times Re(z) + Im\, z'' \times Re(z), zz' + zz'') \quad (*)$$

$$(Im(z), z)\,T\,(Im(z'), z') * ((Im(z), z)\,T\,(Im(z''), z''))$$

$$= (Im(z) \times Re(z') + Im(z') \times Re(z), zz') * (Im(z) \times Re(z'') + Im(z'') \times Re(z), zz'')$$

$$= (Im(z)\,Re(z') + Im(z')\,Re(z) + Im(z) \times Re(z'') + Im(z'') \times Re(z), zz' + zz'') \quad (**)$$

25

d'après $\circledast''$ et $\circledast\!\circledast''$

$$(Im(z), z)\,T\big((Im(z'), z') * (Im(z''), z'')\big)$$
$$= (Im(z), z)\,T\,(Im(z'), z') * (Im(z), z)\,T\,(Im(z''), z'')$$

et puisque T est commutatif sur (G, T)
alors T est distributive par rapport à *

Conclusion (G, *, T) est un corps
commutatif

SALHI

EXERCICE N: 4 (3pts)

p premier impair

$S = 1 + p + p^2 + \dots + p^{p-1}$

q diviseur de S et q premier

1) a) $q \mid S \Rightarrow S = kq \quad k \in \mathbb{Z}$

$S = 1 + p + \dots + p^{p-1}$

$kq = 1 + p + \dots + p^{p-1}$

$kq - p(1 + p + \dots p^{p-2}) = 1 \quad ; p-2 \geq 1$

car $p \geq 3$

Doù d'apres th de Bezout $q \wedge p = 1$

b) puisque q est premier et $p \wedge q = 1$
alors d'apres Th de Fermat

$p^{q-1} \equiv 1 \; [q]$

c) $(p-1) S = pS - S$

$= p + p^2 + \dots + p^p - (1 + p + \dots + p^{p-1})$

$= p^{p} - 1$

(27)

• on a : $p^p - 1 = (p-1)S$
$= p-1\, kq$ car q/S

donc $q / p^p - 1$

d'où $p^p \equiv 1[q]$

2) a) on supp : $p \wedge q-1 = 1$

d'apres bezout $\exists (u,v) \in \mathbb{Z}^2$ tq

$up + v(q-1) = 1$

• si $u \geq 0$ et $v \geq 0$

et on a : $p^{q-1} \equiv 1[q]$ alors $p^{v(q-1)} \equiv 1[q]$

et on a : $p^p \equiv 1[q]$ alors $p^{up} \equiv 1[q]$

$$p^{v(q-1)} \times p^{up} \equiv 1[q]$$

$$p^{v(q-1)+up} \equiv 1[q]$$

$$p^1 \equiv 1[q]$$

• si $u < 0$ et $v < 0$ impossible

car $up + v(q-1) < 0$ et $1 > 0$

28

• Si $u \geq 0$ et $v < 0$

$$p^{q-1} \equiv 1 [q] \Rightarrow p^{-v(q-1)} \equiv 1 [q]$$

$$\Rightarrow p^1 \times p^{-v(q-1)} \equiv p [q]$$

$$\Rightarrow p^{1-v(q-1)} \equiv p [q]$$

$$\Rightarrow p^{up} \equiv p [q] \quad (*)$$

car $up = 1 - v(q-1)$

et puisque $p^p \equiv 1 [q]$ alors $p^{pu} \equiv 1 [q]$ $(**)$

de $(*)$ et $(**)$ $p \equiv 1 [q]$

de même pour $u < 0$ et $v \geq 0$

b) on a : $p \equiv 1 [q] \Rightarrow \begin{cases} p^{p-1} \equiv 1 [q] \\ p^{p-2} \equiv 1 [q] \\ \vdots \\ p^2 \equiv 1 [q] \\ p \equiv 1 [q] \\ 1 \equiv 1 [q] \end{cases}$

$$\overline{1 + p + \dots + p^{p-1} \equiv 1 \times p [q]}$$

SALHI

$S \equiv p[q]$ et on a : $p \equiv 1[q]$

donc $S \equiv 1[q]$

3) d'après 2) si on suppose $p \wedge (q-1) = 1$

alors $S \equiv 1[q]$

et on a : $q/S \Rightarrow S \equiv 0[q]$

donc $1 \equiv 0[q]$

$\Rightarrow q/1$ absurde car q premier

donc p et $q-1$ ne sont pas premier entre eux

et puisque p est premier

alors $p / q-1$

d'où $q \equiv 1[p]$

FIN

2SM 2023 Ratt

ESSALHI

SALHI