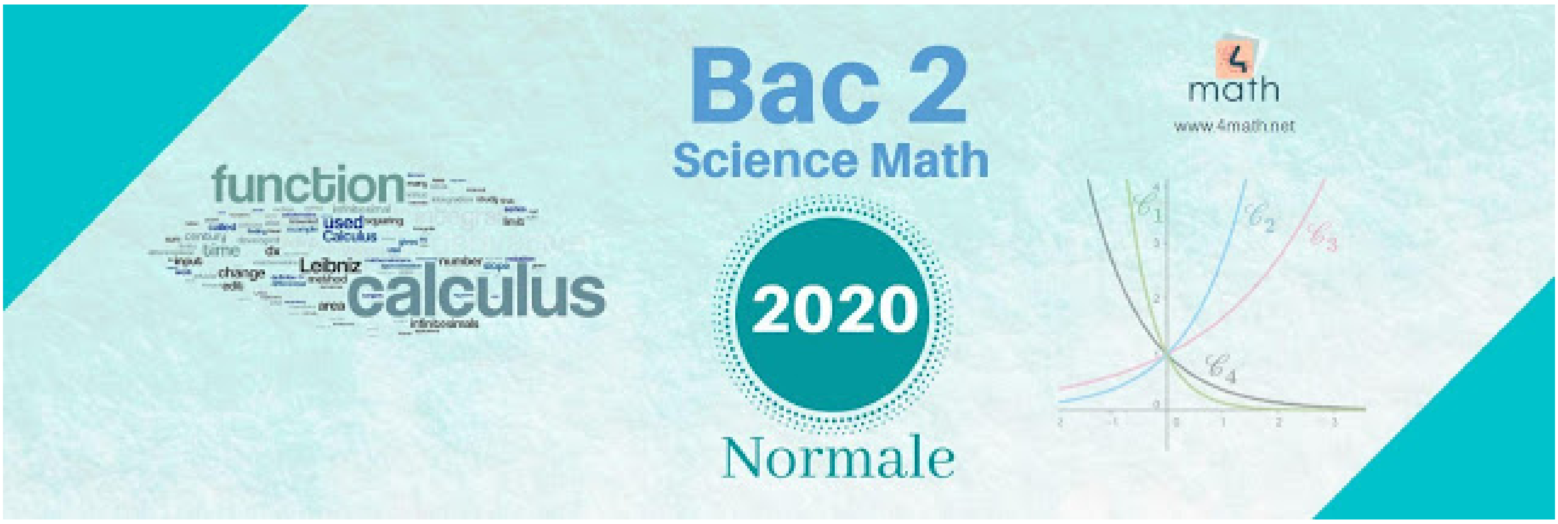


proposition

du corrigé d'épreuve mathématique,

branche SM A&B, pour l'examen Bac,

session de rattrapage 2020.

Pzr Prof. Aziz EL Boukili

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
- L'épreuve comporte (4) pages numérotées de 1/4 à 4/4
- L'épreuve est composée de quatre exercices indépendants entre eux.
- **Le candidat doit traiter EXERCICE3 et EXERCICE4 et choisir de traiter EXERCICE1 ou bien EXERCICE2.**
- **Le candidat doit traiter au total trois (3) exercices** :

- **EXERCICE1** qui concerne l'arithmétique **(au choix)**.............................**3.5 points**
  ou bien
  EXERCICE2 qui concerne les structures algébriques **(au choix)...3.5 points**

- **EXERCICE3** qui concerne les nombres complexes **(obligatoire)**....**3.5 points**

- **EXERCICE4** qui concerne l'analyse **(obligatoire)**..................................**13 points**

L'usage de la calculatrice est strictement interdit

Tu choisis de traiter EXERCICE1 ou bien EXERCICE2

Tu traites obligatoirement EXERCICE3 et EXERCICE4

<u>EXRECICE1</u> :(3.5points/au choix)

Si tu choisis de traiter EXERCICE1 il ne faut pas traiter EXERCICE2

Soient p et q deux nombres premiers vérifiant : $p<q$ et $9^{p+q-1} \equiv 1 \quad [pq]$

0.5 1-a) Montrer que p et 9 sont premiers entre eux.

1 b) En déduire que : $9^{p-1} \equiv 1 \quad [p]$ et que $9^{q} \equiv 1 \quad [p]$

0.5 2-a) Montrer que $p-1$ et q sont premiers entre eux.

0.5 b) En utilisant le théorème de BEZOUT, montrer que : $p=2$

0.5 3-a) En utilisant le théorème de FERMAT, montrer que : $9^{q-1} \equiv 1 \quad [q]$

0.5 b) En déduire que : $\varphi = 5$

EXERCICE2 : (3.5 points/au choix)

Si tu choisis de traiter EXERCICE2 il ne faut pas traiter EXERCICE1

On note $M_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices d'ordre 3 à coefficients réels.

On rappelle que $(M_3(\mathbb{R}),+,\cdot)$ est un espace vectoriel réel de dimension 9 et que $(M_3(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau non commutatif unitaire de zéro $O=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ et d'unité $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

On considère le sous-ensemble : $E=\left\{M(x,y,z)=\begin{pmatrix}x&-y&-y\\0&z&0\\y&x-z&x\end{pmatrix} / (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\right\}$

Première partie :

0.25 1- a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $(M_3(\mathbb{R}),+,\cdot)$

0.5 b) Déterminer une base de $(E,+,\cdot)$

0.25 2- a) Vérifier que :

$\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, \forall(x',y',z')\in\mathbb{R}^3 ; M(x,y,z)\times M(x',y',z')=M(xx'-yy',xy'+yx',zz')$

0.5 b) Montrer que $(E,+,\times)$ est un anneau commutatif

Deuxième partie :

On considère le sous-ensemble F de E des matrices de la forme $M(x,y,0)$ où $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

0.25 1- Montrer que F est un sous-groupe du groupe $(E,+)$

2- On note φ l'application de $\mathbb{C}^*$ vers E définie par :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad ; \quad \varphi(x+iy)=M(x,y,0)$$

0.25 a) Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ vers $(E,\times)$

0.5 b) En déduire que $(F^*,\times)$ est un groupe commutatif. (F^* désigne $F-\{O\}$)

0.5 c) Montrer que $(F,+,\times)$ est un corps commutatif dont on précisera l'unité.

0.25 3- a) Vérifier que : $(\forall M(x,y,0)\in F) \quad : \quad \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\times M(x,y,0)=O$

0.25 b) En déduire qu'aucun des éléments du sous-ensemble F n'admet un inverse pour la multiplication dans $M_3(\mathbb{R})$

EXERCICE3 :(3.5 points/obligatoire)

I- Soit m un nombre réel non nul.

On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, les deux équations :

$(E): z^2+2z+1+m^2=0$ et $(F): z^3+2(1-i)z^2+(1+m^2-4i)z-2i(1+m^2)=0$

0.5 1- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)

0.25 2- a) Montrer que l'équation (F) admet une solution imaginaire pure que l'on déterminera.

0.5 b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (F)

II- Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$

On considère les deux points : $A(-1+im)$ et $B(-1-im)$

Soient Ω le milieu du segment $[AB]$, A' le milieu du segment $[OB]$ et B' le milieu du segment $[OA]$

La rotation de centre Ω et d'angle $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ transforme A en $P(p)$, La rotation de centre A' et d'angle $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ transforme B en $Q(q)$ et La rotation de centre B' et d'angle $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ transforme O en $R(r)$

1.5 1- Montrer que : $p=-1+m$, $q=\frac{1-i}{2}(-1-im)$ et $r=\overline{q}$

0.25 2- a) Vérifier que : $q-r=-ip$

0.5 b) En déduire que : $OP=QR$ et que les deux droites (OP) et (QR) sont orthogonales.

EXERCICE4 : (13 points/obligatoire)

Première partie :

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I=[0,1]$ par $f(x)=x\ln(2-x)$

et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

0.75 1-a) Montrer que f est dérivable sur I et que : $\forall x\in I$; $f'(x)=\ln(2-x)-\frac{x}{2-x}$

0.5 b) Montrer que la fonction dérivée f' est strictement décroissante sur I

0.75 c) Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha\in]0;1[$ tel que : $f'(\alpha)=0$ et que $f(\alpha)=\frac{\alpha^2}{2-\alpha}$

0.75 2-a) Etudier les variations de f , puis donner son tableau de variations.

0.5 b) Montrer que la courbe (C) est concave.

0.5 c) Montrer que : $(\forall t\in I)$, $(\forall x\in I)$; $f(x)\le f'(t)(x-t)+f(t)$

0.5 d) En déduire que : $(\forall x \in I)$: $f(x) \leq x\ln 2$ et $f(x) \leq -x+1$

0.5 3- Représenter la courbe (C) (On prendra : $\|\vec{i}\| = 2cm$)

0.75 4- Calculer, en cm^2 , l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) et les droites d'équations respectives : $x=0$, $x=1$ et $y=0$

Deuxième partie :

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On considère la fonction f_n définie sur $I=[0,1]$ par : $f_n(x) = x^n \ln(2-x)$

0.5 1-a) Vérifier que f_n est positive sur I et que $f_n(0) = f_n(1)$

0.5 b) Montrer qu'il existe au moins $\alpha_n \in]0,1[$ tel que : $f_n'(\alpha_n) = 0$

0.75 2- a) Montrer que f_n est dérivable sur I et que : $\forall x \in I$; $f_n'(x) = x^{n-1} g_n(x)$ où :

$$g_n(x) = n\ln(2-x) - \frac{x}{2-x}$$

0.5 b) Montrer que la fonction g_n est strictement décroissante sur I

0.5 c) En déduire que α_n est unique.

3- On considère la suite $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ ainsi définie.

1 a) Montrer que : $\forall n \geq 2$; $f_n(\alpha_n) = \frac{1}{n} \cdot \frac{\alpha_n^{n+1}}{2-\alpha_n}$, en déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(\alpha_n) = 0$

1 b) Montrer que : $\forall n \geq 2$ $g_n(\alpha_{n+1}) = -\ln(2-\alpha_{n+1})$, en déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ est strictement croissante.

0.25 c) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ est convergente.

0.5 d) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 1$

Troisième partie :

Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on pose : $I_n = \int_0^1 f_n(x)dx$

0.75 1- Montrer que la suite $(I_n)_{n\geq 2}$ est décroissante en déduire qu'elle est convergente.

0.5 2- En utilisant une intégration par parties , montrer que : $I_n = \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{2-x}dx$

0.75 3- Montrer que : $(\forall n \geq 2)$; $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$, en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$

Bac - S.M - SR (2020)

corrigé épreuve Maths

Exercice 1 : (au choix)

Soient p et q deux nombres premiers tels que : $p<q$ et $q^{p+q-1} \equiv 1\,[pq]$

1) a) Montrons que p et q sont premiers entre eux.

Posons $d = p \wedge q$, donc $d \mid q$ et $d \mid p$ et alors

$d \mid q^{p+q-1}$ (1) $(p+q-1>0)$ et $d \mid pq$, et comme $pq \mid q^{p+q-1}-1$

alors $d \mid q^{p+q-1}-1$ (2)

de (1) et (2) on déduit que $d \mid 1$, donc $d=1$ et alors

$p \wedge q = 1$ c.à.d p et q sont premiers entre eux.

b) En déduire que $q^{p-1} \equiv 1\,[p]$ et que $q^{q} \equiv 1\,[p]$

comme p est premier et $q \wedge p = 1$ alors d'après le petit théorème de Fermat on a : $\boxed{q^{p-1} \equiv 1\,[p]}$

et d'après les données on a $pq \mid q^{p+q-1}-1$ donc $p \mid q^{p+q-1}-1$ d'où

$q^{p+q-1} \equiv 1\,[p]$ et puisque $q^{p-1} \equiv 1\,[p]$ alors

$q^{p+q-1} \equiv q^{q}\,[p]$ d'où $\boxed{q^{q} \equiv 1\,[p]}$

2) a) Montrons que $p-1$ et q sont premiers entre eux.

Posons $d = (p-1) \wedge q$, donc $d \mid q$ et $d \mid p-1$

et comme q est premier alors $d=1$ ou $d=q$.

Si $d=q$ on aura donc $q \mid p-1$ ce qui est absurde

puisque $p-1<q$, donc $d=1$ et alors $(p-1)\wedge q = 1$

d'où $(p-1)$ et q sont premiers entre eux.

(b) Montrons que $p = 2$.

on a $(p-1) \wedge q = 1$, donc d'après le théorème de Bezout il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $u(p-1) + vq = 1$, et comme $p-1$ et q sont des entiers naturels avec $p < q$ alors forcément $u < 0$ et $v > 0$ et on a donc :

$$vq = -u(p-1) + 1 > 0$$

De la question 1) b) on déduit que :

$$g^{-(p-1)+1} \equiv g [p] \quad \text{et} \quad g^{vq} \equiv 1 [p]$$

et par suite $g \equiv 1 [p]$ càd $8 | P | 8$ et comme p est premier alors $\boxed{p = 2}$

3) (a) Montrons que $g^{q-1} \equiv 1 [q]$

comme dans la question 1) a) on peut montrer que :

$$g \wedge q = 1$$

et comme q est premier alors d'après le théorème de Fermat on déduit que $\boxed{g^{q-1} \equiv 1 [q]}$

(b) Déduisons que $q = 5$

En remplaçant $p = 2$ dans les données, on obtient :

$g^{q+1} \equiv 1 [2q]$ càd $2q | g^{q+1} - 1$ on il existe $k \in \mathbb{N}$ / $g^{q+1} - 1 = 2qk$ (1)

et d'après la question 3) a) on déduit que $q | g^{q-1} - 1$ on a donc $q | g^{q+1} - g^2$ càd il existe $k' \in \mathbb{N}$ tel que

$g^{q+1} - g^2 = k'q$ (2)

(b) Déterminons une base de $(E,+,\cdot)$

Soit $M(x,y,z) \in E$ avec $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$M(x,y,z) = x\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&1&1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0&-1&-1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&-1&0\end{pmatrix}$$

donc la famille $\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&1&1\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}0&-1&-1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&-1&0\end{pmatrix}\right\}$

est une famille génératrice de E.

De plus pour $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$\alpha\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&1&1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0&-1&-1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&-1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix}\alpha&-\beta&-\beta\\0&\gamma&0\\\beta&\alpha-\gamma&\alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases}\alpha = 0\\ \beta = 0\\ \gamma = 0\\ \alpha-\gamma = 0\end{cases} \implies \alpha = \beta = \gamma = 0$$

donc $\mathcal{B}$ est une famille libre de E

c/c $\mathcal{B}$ est une famille libre et génératrice de E, donc c'est une base de E.

Remarque :

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&1&1\end{pmatrix} = M(1,0,0) \; ; \quad \begin{pmatrix}0&-1&-1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix} = M(0,1,0)$$

et $$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&-1&0\end{pmatrix} = M(0,0,1)$$

2) (a) Vérifions que $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $\forall (x',y',z') \in \mathbb{R}^3$:

$$M(x,y,z) \times M(x',y',z') = M(xx'-yy' ; xy'+yx' ; zz')$$

Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ et soit $(x',y',z') \in \mathbb{R}^3$, on a.

$$M(x,y,z) \times M(x';y';z') = \begin{pmatrix} x & -y & -y \\ 0 & z & 0 \\ y & x-z & x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x' & -y' & -y' \\ 0 & z' & 0 \\ y' & x'-z' & x' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} xx'-yy' & -xy'-\cancel{yz'}-yx'+\cancel{yz'} & -xy'-x'y \\ 0 & zz' & 0 \\ x'y+xy' & -yy'+\cancel{z'x}-zz'+xx'-\cancel{xz'} & -yy'+xx' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (xx'-yy') & -(xy'+x'y) & -(xy'+x'y) \\ 0 & zz' & 0 \\ (xy'+x'y) & (xx'-yy')-zz' & (xx'-yy') \end{pmatrix}$$

$$= M(xx'-yy' ; xy'+x'y ; zz')$$

Donc $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $\forall (x';y';z') \in \mathbb{R}^3$:

$$M(x,y,z) \times M(x';y';z') = M(xx'-yy' ; xy'+x'y ; zz')$$

(b) Montrons que $(E,+,\times)$ est un anneau commutatif

. d'après la question 1) a) on déduit que $(E,+)$ est un groupe abélien

. et d'après la question 2) a), on déduit que $(E,\times)$ est une partie stable de $(M_3(\mathbb{R}),\times)$ et comme $\times$ est associative et distributive par rapport à $+$ dans $(M_3(\mathbb{R}),+,\times)$ alors elle l'est aussi dans $(E,+,\times)$

. et pour (x,y,z) et $(x';y';z')$ dans $\mathbb{R}^3$, on a :

$$xx'-yy' = x'x-y'y \; ; \; xy'+yx' = x'y+y'x \text{ et } zz'=z'z$$

Donc $M(xx'-yy' ; xy'+yx' ; zz') = M(x'x-y'y , x'y+y'x , z'z)$

càd $M(x,y,z) \times M(x',y',z') = M(x',y',z') \times M(x,y,z)$

on en conclut : $\forall M(x,y,z) \in E$ $\forall M(x',y',z') \in E$ on a

$$M(x,y,z) \times M(x',y',z') = M(x',y',z') \times M(x,y,z)$$

Donc $\times$ est commutative dans $(E,+,\times)$

• Conclusion

D'après ce qui précède on déduit que $(E,+,\times)$ est un anneau commutatif

Partie II.

1) Montrons que F est un sous groupe de $(E,+)$.

on a :

• $F \neq \emptyset$ car $M(0,0,0) \in F$.

• Soient $M(x,y,0)$ et $M(x',y',0)$ deux éléments de F

on a : $M(x,y,0) - M(x',y',0) = \begin{pmatrix} x & -y & -y \\ 0 & 0 & 0 \\ y & x & x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x' & -y' & -y' \\ 0 & 0 & 0 \\ y' & x' & x' \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} (x-x') & -(y-y') & -(y-y') \\ 0 & 0 & 0 \\ (y-y') & (x-x') & (x-x') \end{pmatrix}$$

$$= M(x-x', y-y', 0)$$

et comme $x-x' \in \mathbb{R}$ et $y-y' \in \mathbb{R}$ alors $M(x-x', y-y', 0) \in F$

Donc F est un sous groupe de $(E,+)$.

2) (a) Montrons que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*, \times)$ vers $(E, \times)$

Soient $x+iy$ et $x'+iy'$ deux éléments de $\mathbb{C}^*$ avec $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ et $(x',y')\in\mathbb{R}^2$, on a, d'une part

$$\varphi\left((x+iy)(x'+iy')\right) = \varphi\left((xx'-yy')+i(xy'+yx')\right)$$
$$= M(xx'-yy'; xy'+yx', 0)$$

et d'autre part :

$$M(x,y,0)\times M(x',y';0) = \begin{pmatrix} x & -y & -y \\ 0 & 0 & 0 \\ y & x & x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x' & -y' & -y' \\ 0 & 0 & 0 \\ y' & x' & x' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} xx'-yy' & -xy'-yx' & -xy'-yx' \\ 0 & 0 & 0 \\ yx'+xy' & -yy'+xx' & -yy'+xx' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (xx'-yy') & -(xy'+yx') & -(xy'+yx') \\ 0 & 0 & 0 \\ (xy'+yx') & (xx'-yy') & (xx'-yy') \end{pmatrix}$$

$$= M(x,y,0)\times M \quad M(xx'-yy'; xy'+yx'; 0)$$

Donc $\forall\, (x,x',y,y')\in\mathbb{R}^4$: avec $x+iy\in\mathbb{C}^*$ et $x'+iy'\in\mathbb{C}^*$

$$\varphi\left((x+iy)(x'+iy')\right) = M(x,y,0)\times M(x',y',0)$$

d'où φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ vers $(E,\times)$

(b) <u>Déduisons que</u> <u>$(F^*,\times)$ est un groupe commutatif</u>

D'après la définition de φ on déduit que $\varphi(\mathbb{C}^*)\subset F^*$.

Soit maintenant $M(x,y,0)\in F^*$ avec $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ et $(x,y)\neq(0,0)$

cherchons $a+ib\in\mathbb{C}^*$ tel que $\varphi(a+ib) = M(x,y,0)$

ma : $\varphi(a+ib) = M(x,y,0) \Leftrightarrow M(a,b,0) = M(x,y,0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = x \\ b = y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a+ib = x+iy$$

Donc pour tout $M(x,y,0) \in F^*$ ou $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $(x,y) \neq (0,0)$ il existe un nombre complexe non nul $x+iy$ (même unique) tel que $\varphi(x+iy) = M(x,y,0)$ donc $F^* \subset \varphi(\mathbb{C}^*)$ et par suite $\varphi(\mathbb{C}^*) = F^*$

et Comme $(\mathbb{C}^*, \times)$ est un groupe commutatif car $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps commutatif, et φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*, \times)$ vers $(F^*, \times)$ alors $(F^*, \times)$ est un groupe commutatif.

© Montrons que $(F, +, \times)$ est un corps commutatif, en précisant ~~son~~ unité

on a d'après la question 1) - Partie II, F est un sous groupe du groupe commutatif $(E, +)$, donc $(F, +)$ est un groupe commutatif et d'après la question 2) b) de la partie II, on a : $(F^*, \times)$ est un groupe commutatif et puisque "$\times$" est distributive par rapport à "+" dans $(M_3(\mathbb{R}), +, \times)$ et que $F \subset M_3(\mathbb{R})$ alors "$\times$" est aussi distributive par rapport à "+" dans $(F, +, \times)$

De plus "$\times$" est commutatif car elle l'est dans $(E, +, \times)$ qui est un anneau commutatif.

Donc d'après ce qui précédent on conclut que $(F,+,\times)$ est un corps commutatif. et son unité est

$$M(1,0,0) = \varphi(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3) ⓐ Vérifions que $\forall M(x,y,0) \in F : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times M(x,y,0) = 0$

Soit $M(x,y,0) \in F$ on a :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x & -y & -y \\ 0 & 0 & 0 \\ y & x & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

3) (b) Déduisons qu'aucun des éléments du sous ensemble F n'admet un inverse dans $M_3(\mathbb{R})$

Supposons que une matrice $M(x,y,0) \in F^*$ admet un inverse M' dans $M_3(\mathbb{R})$, on aura donc

$$M(x,y,0) \times M' = I \quad (I \text{ identité de } M_3(\mathbb{R}))$$

et en multipliant à gauche par $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on obtient d'après la question 3)a) : $0 = I$

ce qui est absurde et par suite aucun des éléments du sous ensemble F n'admet un inverse pour la multiplication dans $M_3(\mathbb{R})$

Autre méthode

d'après la question 3)a) on déduit que toute matrice non nulle dans F est un diviseur de zéro et comme tout diviseur de zéro est non inversible dans l'ensemble des Matrices $M_3(\mathbb{R})$, alors tout élément de F n'est inversible dans $M_3(\mathbb{R})$

Exercice 3 (obligatoire)

(I) Soit $m \in \mathbb{R}^*$

1) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : z^2 + 2z + 1 + m^2 = 0$

calculons le discriminant de (E) :

$$\Delta = (2)^2 - 4(1)(1+m^2) = 4 - 4(1+m^2) = -4m^2 = (2mi)^2$$

donc l'équation (E) admet deux solutions conjuguées

$$z_1 = \frac{-2-2mi}{2} = -1-mi \quad ; \quad z_2 = \frac{-2+mi}{2} = -1+mi$$

Donc l'ensemble de solution de (E) est : $S = \{-1-mi ; -1+mi\}$

2) a) Montrons que $(F) : z^3 + 2(1-i)z^2 + (1+m^2-4i)z - 2i(1+m^2) = 0$ admet une solution imaginaire pure à déterminer

Soit αi, $\alpha \in \mathbb{R}^*$ une solution imaginaire pure de (F)

donc : $(\alpha i)^3 + 2(1-i)(\alpha i)^2 + (1+m^2-4i)(\alpha i) - 2i(1+m^2) = 0$

$\Leftrightarrow -i\alpha^3 - 2\alpha^2 + 2\alpha^2 i + (1+m^2)\alpha i + 4\alpha - 2i(1+m^2) = 0$

$\Leftrightarrow -2\alpha^2 + 4\alpha + i(-\alpha^3 + 2\alpha^2 + (1+m^2)(\alpha-2)) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2\alpha^2 + 4\alpha = 0 & (1) \\ -\alpha^3 + 2\alpha^2 + (1+m^2)(\alpha-2) = 0 & (2) \end{cases}$$

on a $(1) \Leftrightarrow 2\alpha(2-\alpha) = 0$

$\Leftrightarrow \alpha = 2 \qquad (\alpha \in \mathbb{R}^*)$

et on remarque $\alpha = 2$ est une solution de l'équation (2)

Donc $2i$ est une solution imaginaire pure de (F).

(b) Résolvons l'équation (F)

Remarquons que :

$$(z-2i)(z^2+2z+1+m^2) = z^3+2(1-i)z^2+(1+m^2-4i)z-2i(1+m^2)$$

donc $(F) \Leftrightarrow (z-2i)(z^2+2z+1+m^2)=0$

$\Leftrightarrow z=2i$ ou $z^2+2z+1+m^2=0$

$\Leftrightarrow z=2i$ ou $z=-1-mi$ ou $z=-1+mi$

donc l'ensemble de solution de l'équation (F) est :

$$S=\{2i, -1-mi, -1+mi\}.$$

(II)

1) Montrons que : $p=-1+m$; $q=\frac{1-i}{2}(-1-mi)$ et $r=\overline{q}$

on a : • Ω est le milieu du segment $[AB]$ donc

$$\omega = z_\Omega = \frac{(-1-im)+(-1+im)}{2} = -1$$

• A' le milieu du segment $[OB]$ donc :

$$z_{A'} = a' = \frac{-1-im}{2}$$

• B' le milieu du segment $[OA]$ donc :

$$z_{B'} = b' = \frac{-1+im}{2}$$

et on a : $R_{(\Omega,-\frac{\pi}{2})}(A)=P$ et $R_{(A',-\frac{\pi}{2})}(B)=Q$

et $R_{(B',-\frac{\pi}{2})}(O)=R$

donc $R_{(\Omega,-\frac{\pi}{2})}(A)=P \Leftrightarrow p-\omega = e^{-i\frac{\pi}{2}}(a-\omega)$

$\Leftrightarrow p=-1-i(-1-im+1)$

$\Leftrightarrow p=-1+i+m-i$

$\Leftrightarrow \boxed{p=-1+m}$

et

$$R_{(A',-\frac{\pi}{2})}(B) = Q \iff q - a' = e^{-i\pi/2}(b - a')$$

$$\iff q = a' - i(b - a')$$

$$\iff q = \frac{-1-im}{2} - i\left(-1-im - \frac{-1-im}{2}\right)$$

$$\iff q = \frac{-1-im}{2} - i\left(\frac{-2-2im+1+im}{2}\right)$$

$$\iff q = \frac{-1-im}{2} - i\left(\frac{-1-im}{2}\right)$$

$$\iff q = \frac{-1-im}{2}(1-i)$$

$$\iff \boxed{q = \frac{1-i}{2}(-1-im)}$$

et on a :

$$R_{(B',-\frac{\pi}{2})}(0) = r \iff r - b' = e^{-i\frac{\pi}{2}}(0 - b')$$

$$\iff r = b' - i(-b')$$

$$\iff r = b'(1+i)$$

$$\iff r = (1+i)\left(\frac{-1+im}{2}\right)$$

$$\iff r = \left(\frac{1+i}{2}\right)(-1+im)$$

$$\iff \boxed{r = \bar{q}}$$

2) a) Vérifions que $q - r = -ip$

on a : $q - r = \frac{1-i}{2} = q - \bar{q} = +2i\,\mathrm{Im}(q)$

or $q = \frac{1-i}{2}(-1-im) = \frac{-1+i-im-m}{2} = \frac{-1-m}{2} + i\,\frac{1-m}{2}$

donc $\mathrm{Im}(q) = \frac{1-m}{2}$ et par suite. $q - r = +2i\left(\frac{1-m}{2}\right)$

$= -i(-1+m)$

càd $\boxed{q-r=-ip}$

(b) Déduisons que $OP = QR$ et que $(OP) \perp (QR)$

on a $q-r=-ip$ donc $|q-r| = |-ip| = |p|$

càd $|q-r| = |p-0|$ d'où $\boxed{QR = OP}$

et puisque $\frac{q-r}{p} = -i$ càd $\frac{q-r}{p-0} = -i \in i\mathbb{R}^*$

alors $(QR) \perp (OP)$

Exercice 4 (obligatoire)

Partie I

1) (a) Montrons que f est dérivable sur I et que :

$\forall x \in I : f'(x) = \ln(2-x) - \frac{x}{2-x}$

on a : $x \mapsto 2-x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (fct polynôme) et en particulier sur $I = [0,1]$, de plus elle est strictement positive sur I, donc la fct $x \mapsto \ln(2-x)$ est dérivable sur I par composée de fcts dérivables et alors $f : x \mapsto x\ln(2-x)$ est dérivable sur I comme produit de deux fcts dérivables sur I et pour tout $x \in [0,1]$:

$f'(x) = \ln(2-x) + \frac{-1}{2-x}x$

Donc $\forall x \in I : f'(x) = \ln(2-x) - \frac{x}{2-x}$

(b) Montrons que f' est strictement décroissante sur I

on a $x \longmapsto \ln(2-x)$ est dérivable sur I (voir plus haut)

et $x \longmapsto \frac{x}{2+x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}-\{-2\}$ (fct rationnelle)

donc en particulier sur $I=[0,1]$ et alors

$f' : x \longmapsto \ln(2-x) - \frac{x}{2+x}$ est dérivable sur I comme

différence de deux fcts dérivable sur I et

$\forall x \in I$: $f''(x) = \frac{-1}{2-x} - \frac{2}{(2-x)^2} = \frac{-(2-x)-2}{(2-x)^2}$

$$= \frac{x-4}{(2-x)^2}$$

or sur $I=[0,1]$: $f''(x) < 0$ donc

f' est strictement décroissante sur I

(c) Montrons qu'il existe un unique $\alpha \in]0,1[$ tel que

$f'(\alpha)=0$ et que $f(\alpha) = \frac{\alpha^2}{2-\alpha}$

on a f' est continue sur $[0,1]$ (f' est le rapport de

de deux fcts continues sur $[0,1]$) et elle est

strictement décroissante sur $[0,1]$, de plus

$f'(0) = \ln(2) > 0$ et $f'(1) = -1 < 0$

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires

il existe un unique $\alpha \in]0,1[$ tel que $f'(\alpha)=0$

on a : $f'(\alpha)=0 \iff \ln(2-\alpha) - \frac{\alpha}{2-\alpha} = 0$

$\iff \ln(2-\alpha) = \frac{\alpha}{2-\alpha}$

et par suite $f(\alpha) = \alpha\ln(2-\alpha) = \frac{\alpha^2}{2-\alpha}$.

2) ⓐ Étudions les variations de f, puis donnons son tableau de variations

On a d'après les questions 1) b)-c) que f' est strictement décroissante et s'annule en $\alpha \in]0,1[$ donc :

$f'(x) > 0$ sur $[0,\alpha[$ et $f'(x) < 0$ sur $]\alpha,1]$

ou $f'(\alpha) = 0$, d'où f est strictement croissante sur $[0,\alpha]$ et strictement décroissante sur $[\alpha,1]$

Tableau de variations de f sur I

x	0		α		1
f'		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$f(\alpha) = \dfrac{\alpha^2}{2-\alpha}$	$\searrow$	0

ⓑ Montrons que $(\mathcal{C})$ est concave

On a d'après la question 1-b) $f''(x) < 0$ sur I, donc $(\mathcal{C})$ est concave sur I.

ⓒ Montrons que $\forall t \in I$: $f(x) \leq f'(t)(x-t) + f(t)$, $\forall x \in I$.

Puisque $(\mathcal{C})$ est concave sur I alors, elle est au dessous de toutes ses tangentes., soit donc $t \in I$ la tangente à $(\mathcal{C})$ au pt d'abscisse t est : $(T) : y = f'(t)(x-t) + f(t)$

et alors pour tout $t \in I$ et $x \in I$ on a :

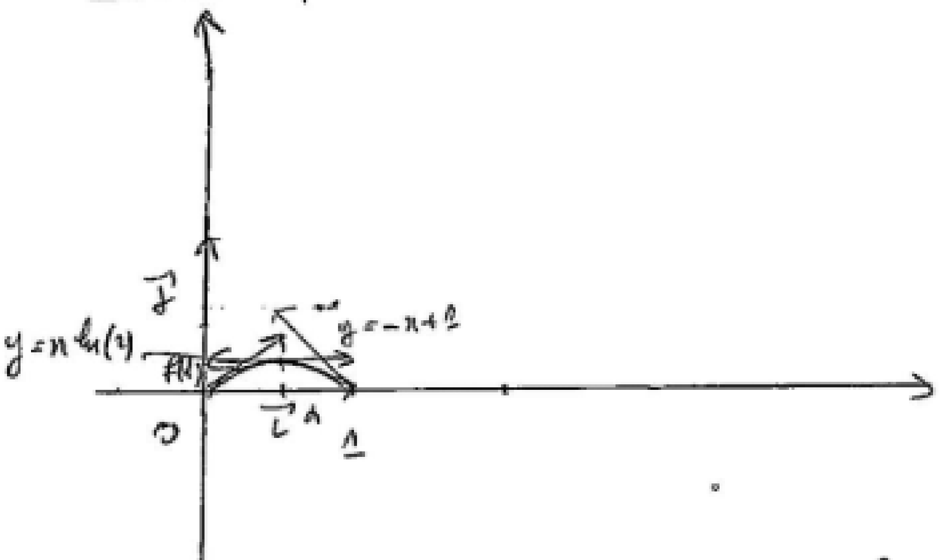
$$f(x) \leq f'(t)(x-t) + f(t).$$

② Déduisons que $\forall x \in I$: $f(x) \leq x \ln(2)$ et $f(x) \leq -x+1$

Soit $x \in I$, dans l'inégalité précédente en prenant successivement $t=0$ et $t=1$ on obtient :

$$f(x) \leq x \ln(2) \quad \text{et} \quad f(x) \leq -x+1$$

③ Courbe représentative de f



④ Calculons l'aire du domaine plan limité par $(\mathcal{C}_f)$ et les droites d'équation $x=0$; $x=1$ et $y=0$

comme $f \geq 0$ sur $[0,1]$ alors : $\mathcal{A} = \int_0^1 f(x)\,dx$ (u.a)

or $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 x \ln(2-x)\,dx$

posons $\begin{cases} u(x) = \ln(2-x) \\ v'(x) = x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'(x) = \dfrac{-1}{2-x} \\ v(x) = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$

donc $\int_0^1 x \ln(2-x)\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln(2-x)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{-x^2}{2(2-x)}$

on a : $\dfrac{-x^2}{2-x} = \dfrac{4-x^2-4}{2-x} = 2+x - \dfrac{4}{2-x}$

donc $\int_0^1 \frac{-x^2}{2-x}\,dx = \int_0^1 \left(2+x-\frac{4}{2-x}\right)dx = \left[2x+\frac{x^2}{2}+4\ln|2-x|\right]_0^1$
$= \frac{5}{2} - 4\ln(2)$

et donc $\int_0^1 x\ln(2-x)\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{-x^2}{2-x}\,dx = -\frac{5}{4} + 2\ln(2)$

et puisque $u.a = 4\ cm^2$ alors $A = -5 + 8\ln(2)\ cm^2$

$(A \simeq 0,55\ cm^2)$

Partie II.

soit $n \in \mathbb{N}$ / $n \geq 2$

1) a) vérifions que f_n est positive sur $I = [0,1]$ et que $f_n(0) = f_n(1)$

on a : si $0 \leq x \leq 1$ alors $x^n \geq 0$ et $1 \leq 2-x \leq 2$

donc $x^n\ln(2-x) \geq 0$ car $\ln(2-x) \geq 0$.

d'où $\forall x \in I$: $f_n(x) \geq 0$

de plus $f_n(0) = f_n(1) = 0$

b) Montrons qu'il existe au moins $\alpha_n \in]0,1[$ tel que $f_n'(\alpha_n) = 0$

on a $f_n : x \mapsto x^n\ln(2-x)$ est continue sur $[0,1]$ par composée et produit des fcts continues sur $[0,1]$

et $f_n : x \mapsto x^n\ln(2-x)$ est dérivable sur $]0,1[$ par produit et composée de fcts dérivables sur $]0,1[$, de plus $f_n(0) = f_n(1)$, donc d'après le théorème de Rolle, il existe au moins $\alpha_n \in]0,1[$ tel que $f_n'(\alpha_n) = 0$

2) a) Montrons que f_n est dérivable sur I et que $\forall x \in I$: $f_n'(x) = x^{n-1} g_n(x)$

f_n est dérivable sur I (vu ci-dessus). et

$\forall x \in I$: $f_n'(x) = n x^{n-1} \ln(2-x) - \dfrac{x^n}{2-x}$

$= x^{n-1}\left[n \ln(2-x) - \dfrac{x}{2-x}\right]$

$= x^{n-1} g(x)$ où $g(x) = n \ln(2-x) - \dfrac{x}{2-x}$

(b) Montrons que g_n est strictement décroissante sur I

on a g_n est dérivable sur I et :

$\forall x \in I$: $g_n'(x) = \dfrac{-n}{2-x} - \dfrac{2}{(2-x)^2} = \dfrac{-n(2-x)-2}{(2-x)^2}$

$g_n'(x) = \dfrac{nx - 2(n+1)}{(2-x)^2}$

on a $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq nx \leq n$ $(n \geq 2)$

$\Rightarrow -2(n+1) \leq nx - 2(n+1) \leq n - 2(n+1)$

$\Rightarrow -2(n+1) \leq nx - 2(n+1) \leq -n - 2 < 0$

Donc $\forall x \in I$: $g_n'(x) < 0$ car $(2-x)^2 > 0$.

d'où $g_n(x)$ est strictement décroissante sur I.

(c) Déduisons que α_n est unique

Comme $f_n'(\alpha_n) = 0$ et $\alpha_n \in]0,1[$ alors $g_n(\alpha_n) = 0$

et puisque $g_n(0) = n \ln(2) > 0$ et $g_n(1) = -1 < 0$

g_n est continue et strictement décroissante sur I alors

d'après le théorème des valeurs intermédiaires

α_n est unique.

3) ⓐ Montrons que $\forall n \geq 2$: $f_n(\alpha_n) = \frac{1}{n} \frac{\alpha_n^{n+1}}{2-\alpha_n}$ et que $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(\alpha_n) = 0$

on a $f_n(\alpha_n) = \alpha_n^n \ln(2-\alpha_n)$ et comme $g_n(\alpha_n) = 0$ alors

$n \ln(2-\alpha_n) = \frac{\alpha_n}{2-\alpha_n}$, donc $\ln(2-\alpha_n) = \frac{1}{n} \frac{\alpha_n}{2-\alpha_n}$

et par suite $f_n(\alpha_n) = \frac{1}{n} \frac{\alpha_n^{n+1}}{2-\alpha_n}$

et on a : $0 < \alpha_n < 1 \Rightarrow \begin{cases} 0 < \alpha_n^{n+1} < 1 \\ 1 < 2-\alpha_n < 2 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 0 < \alpha_n^{n+1} < 1 \\ \frac{1}{2} < \frac{1}{2-\alpha_n} < 1 \end{cases}$

$\Rightarrow 0 < \frac{\alpha_n^{n+1}}{2-\alpha_n} < 1$

donc $\forall n \geq 2$: $|f_n(\alpha_n)| = \frac{1}{n} \left| \frac{\alpha_n^{n+1}}{2-\alpha_n} \right|$

$\leq \frac{1}{n}$

et puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$, alors d'après les propriétés des limites, et ordres on déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(\alpha_n) = 0$

ⓑ Montrons que $\forall n \geq 2$: $g_n(\alpha_{n+1}) = -2 \ln(2-\alpha_{n+1})$ et déduisons que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ est strictement croissante

Soit $n \geq 2$, on a : $g_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0 \Leftrightarrow (n+2) \ln(2-\alpha_{n+1}) = \frac{\alpha_{n+1}}{2-\alpha_{n+1}}$

et donc $g_n(\alpha_{n+1}) = n \ln(2-\alpha_{n+1}) - \frac{\alpha_{n+1}}{2-\alpha_{n+1}}$

$= n \ln(2-\alpha_{n+1}) - (n+2) \ln(2-\alpha_{n+1})$

donc $\boxed{\forall n \geq 2 : \quad g_n(\alpha_{n+1}) = -\ln(2-\alpha_{n+1}).}$

et puisque $-\ln(2-\alpha_{n+1}) < 0$ car $2-\alpha_{n+1} > 1$

et $g_n(\alpha_n) = 0$ alors pour tout $n \geq 2$:

$$g_n(\alpha_{n+1}) < g_n(\alpha_n)$$

et comme g_n est continue et strictement décroissante sur I alors elle admet une fct réciproque g_n^{-1} (est) qui est aussi strictement décroissante

et donc $\forall n \geq 2$: $g_n^{-1}(g_n(\alpha_n)) < g_n^{-1}(g_n(\alpha_{n+1}))$.

càd $\forall n \geq 2 \quad \alpha_n < \alpha_{n+1}$

Donc la suite $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ est strictement croissante

(c) Montrons que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ est convergente.

on a d'après ce qui précède $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ est strictement croissante et est majorée par 1, donc elle est convergente.

(d) Montrons que $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n = 1$

Puisque $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ est convergente alors posons $\lim \alpha_n = l \in \mathbb{R}$.

on a $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ est strictement croissante alors

$\forall n \geq 2 \quad \alpha_n \geq \alpha_2$ et puisque $\forall n \geq 2 \quad 0 < \alpha_n < 1$

alors $0 < \alpha_2 \leq l \leq 1$.

et on a $f_n(\alpha_n) = \alpha_n^n \ln(2-\alpha_n)$

et puisque f_n est continue sur $[0,1]$ alors

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(\alpha_n) = f_n(l) = l^n \ln(2-l)$$

et d'après la question 1) b) de la partie II on a

$\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(\alpha_n) = 0$, donc on a : $l^n \ln(2-l) = 0$

et comme $l > 0$ alors $\ln(2-l) = 0$ càd

$2 - l = 1$ donc $l = 1$

d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n = 1$

Partie III :

1) Montrons que la suite $(I_n)_{n \geq 2}$ est décroissante et déduisons qu'elle est convergente.

Soit $n \geq 2$, on a :

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 (f_{n+1}(x) - f_n(x))\, dx$$

$$= \int_0^1 [x^{n+1} \ln(2-x) - x^n \ln(2-x)]\, dx$$

$$= \int_0^1 (x-1)\, x^n \ln(2-x)\, dx$$

on a : $x \mapsto (x-1)\, x^n \ln(2-x)$ est continue sur $[0,1]$ et est positive sur $[0,1]$ donc $\int_0^1 (x-1)\, x^n \ln(2-x)\, dx \geq 0$

d'où $\forall n \geq 2$: $I_{n+1} - I_n \geq 0$, donc la suite $(I_n)_{n\geq 2}$

est croissante.

on a pour $n \geq 2$ et $0 \leq x \leq 1$:

$0 \leq x^n \leq 1$ et $0 \leq \ln(2-x) \leq \ln(2)$.

donc sur $[0,1]$ $f_n(x) \leq \ln(2)$.

et par suite $I_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx \leq \ln(2)$. $\forall n \geq 2$

Donc $(I_n)_{n\geq 2}$ est majorée par $\ln(2)$ et comme $(I_n)_{n\geq 2}$

est croissante, alors elle est convergente.

2) <u>Montrons que</u> $I = \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{2-x}\,dx$

posons :

$$\begin{cases} u(x) = \ln(2-x) \\ v'(x) = x^n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = \frac{-1}{2-x} \\ v(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \end{cases}$$

$$\text{donc } I_n = \int_0^1 x^n \ln(2-x)\,dx = \underbrace{\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln(2-x)\right]_0^1}_{=0} - \int_0^1 \frac{-x^{n+1}}{(n+1)(2-x)}\,dx$$

$$= \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{2-x}\,dx$$

donc $\forall n \geq 2$: $I_n = \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{2-x}\,dx$

③ Montrons que $\forall n \geq 2$: $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ et déduisons

que $\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$

Soit $n \geq 2$, on a :

$$0 \leq x \leq 1 \implies \begin{cases} 0 \leq x^{n+1} \leq 1 \\ \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2-x} \leq 1 \end{cases}$$

$$\implies 0 \leq \frac{x^{n+1}}{2-x} \leq 1$$

et comme $x \longmapsto \frac{x^{n+1}}{2-x}$ est continue sur $[0,1]$, alors

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{2-x}\, dx \leq \int_0^1 1 . dx = 1.$$

et alors $\forall n \geq 2$: $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$

et comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ alors d'après les propriétés des limites et ordre on déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$