تصحيح الامتحان الوطني الدورة الاستدراكية 2018 الرياضيات
مسلك علوم رياضية أ.و.ب

(1)

التمرين 1 :

1) لدينا $E \subset M_2(\mathbb{R})$ و $E \neq \emptyset$ لأن $M(0,0) \in E$

ليكن M_1 و M_2 من E حيث $M_1(x_1, y_1)$ و $M_2(x_2, y_2)$

$$M_1 - M_2 = M_1(x_1, y_1) - M(x_2, y_2)$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ 0 & x_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 \\ 0 & x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

$$= M(x_1 - x_2, y_1 - y_2)$$

وبما أن $x_1 - x_2 \in \mathbb{R}$ و $y_1 - y_2 \in \mathbb{R}$ فإن $M(x_1 - x_2, y_1 - y_2) \in E$

إذن E زمرة جزئية للزمرة $(M_2(\mathbb{R}), +)$

2) أ) لدينا $E \subset M_2(\mathbb{R})$ و $E \neq \emptyset$

ليكن α و β من $\mathbb{R}$ و $M(x_1, y_1)$ و $M(x_2, y_2)$ من E

لدينا $\alpha M(x_1, y_1) + \beta M(x_2, y_2) = \alpha \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ 0 & x_1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta x_2 & \alpha y_1 + \beta y_2 \\ 0 & \alpha x_1 + \beta x_2 \end{pmatrix}$$

$$= M(\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2)$$

بما أن $\alpha x_1 + \beta x_2 \in \mathbb{R}$ و $\alpha y_2 + \beta y_2 \in \mathbb{R}$ فإن $M(\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_2 + \beta y_2) \in E$

إذن E فضاء متجهي جزئي للفضاء المتجهي $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$

ب) بما أن E فضاء متجهي جزئي للفضاء المتجهي $(M_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ وبعد الفضاء المتجهي $(M_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ هو 2 و $(E,+,\cdot)$ هو 2

(2)

3) أ) لدينا $E \neq \emptyset$

ليكن $M(x_1,y_1)$ و $M(x_2,y_2)$ من E

$$M(x_1,y_2)\times M(x_2,y_2) = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ 0 & x_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1x_2 & x_1y_2+y_1x_2 \\ 0 & x_1x_2 \end{pmatrix}$$

$$= M(x_1x_2,\ x_1y_2+y_1x_2)$$

بما أن $x_1x_2 \in \mathbb{R}$ و $x_1y_2+y_1x_2 \in \mathbb{R}$ فإن $M(x_1x_2,\ x_1y_2+y_1x_2) \in \mathbb{R}$

إذن E مستقر بالنسبة للقانون $\times$

ب) لدينا:

- $(E,+)$ زمرة تبادلية لأن E زمرة جزئية للزمرة $(M_2(\mathbb{R}),+)$ و نعلم أن $(M_2(\mathbb{R}),+)$ زمرة تبادلية
- $\times$ تجميعي في E لأن: ليكن $M(x_1,y_1)$ و $M(x_2,y_2)$ و $M(x_3,y_3)$ من E، لدينا:

$$M(x_1,y_1)\times\left(M(x_2,y_2)\times M(x_3,y_3)\right)$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ 0 & x_1 \end{pmatrix}\times\left[\begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} x_3 & y_3 \\ 0 & x_3 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \left[\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ 0 & y_1 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ 0 & y_2 \end{pmatrix}\right]\times\begin{pmatrix} x_3 & y_3 \\ 0 & x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \left(M(x_1,y_1)\times M(x_2,y_2)\right)\times M(x_3,y_3)$$

- $\times$ توزيعي على $+$

إذن $(E,+,\times)$ حلقة تبادلية

(4) أ) نعلم أن $E \neq \emptyset$

ليكن $M(x,y)$ و $M(x',y')$ من E

لدينا: $M(x,y) \top M(x',y') = M(x,y) \times M(x',y') - M(y,0) \times M(y',0)$

(3)

$$= \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x' & y' \\ 0 & x' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y' & 0 \\ 0 & y' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} xx' & xy' + yx' \\ 0 & xx' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} yy' & 0 \\ 0 & yy' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} xx' + yy' & xy' + yx' \\ 0 & xx' - yy' \end{pmatrix}$$

$$= M(xx' - yy', xy' + yx')$$

بما أن $xx' - yy' \in \mathbb{R}$ ، $xy' + yx' \in \mathbb{R}$ فإن $M(xx' - yy', xy' + yx') \in E$

إذن E مستقر بالنسبة للقانون "T"

ب) ليكن z و z' عنصران من $\mathbb{C}^*$ حيث $z = x + iy$ و $z' = x' + iy'$

$$\varepsilon(zz') = \varepsilon(xx' - yy' + i(xy' + x'y))$$

$$= M(xx' - yy', xy' + x'y)$$

و

$$\varepsilon(z) \top \varepsilon(z') = M(x,y) \top M(x',y')$$

$$= \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x' & y' \\ 0 & x' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y' & 0 \\ 0 & y' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} xx' & xy' + yx' \\ 0 & xx' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} yy' & 0 \\ 0 & yy' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xx' - yy' & xy' + yx' \\ 0 & xx' - yy' \end{pmatrix}$$

$$= M(xx' - yy', xy' + yx')$$

إذن

$$\varepsilon(zz') = \varepsilon(z) \top \varepsilon(z')$$

إذن ε تشاكل من $(\mathbb{C}^*, \times)$ نحو $(E, \top)$

ج) بما أن $(\mathbb{C}^*, \times)$ زمرة تبادلية وهي جزء من $(\mathbb{C}^*, \times)$ فإن (E, T)

وبما أن $(\mathbb{C}^*, T)$ زمرة تبادلية فإن $\varphi(\mathbb{C}^*) = E^*$

فإن (E^*, T) زمرة تبادلية

5) أ) ليكن $M(x_1, y_1)$ ، $M(x_2, y_2)$ و $M(x_3, y_3)$ من E

لدينا $M(x_1, y_1) \top \left(M(x_2, y_2) + M(x_3, y_3) \right)$

4

$$= M(x_1, y_1) \times \left(M(x_2, y_2) + M(x_3, y_3) \right) - M(y_1, 0) \times M(y_2 + y_3, 0)$$

$$= M(x_1, y_1) \times M(x_2, y_2) - M(y_1, 0) \times M(y_2, 0) + M(x_1, y_1) \times M(x_3, y_3) - M(y_1, 0) \times M(y_3, 0)$$

$$= M(x_1, y_1) \top M(x_2, y_2) + M(x_1, y_1) \top M(x_3, y_3)$$

إذن "$\top$" توزيعي على "$+$" في E

ب) لدينا $(E, +)$ زمرة تبادلية لأن $(E, +, \times)$ حلقة تبادلية

و $(E^*, \top)$ زمرة تبادلية

و $\top$ توزيعي على $+$ في E

إذن $(E, +, \top)$ جسم تبادلي

التمرين 2 :

أ) $h(z) = z \iff i\left(\frac{z-2}{z-1}\right) = z$

$\iff iz - 2i^2 = z(z-1)$

$\iff iz + 2 = z^2 - z$

$\iff z^2 - 2iz - 2 = 0$

(5)

(أ)

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= (-2i)^2 - 4(-2)$

$= 4$

$z_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2i-2}{2} = i-1$

$z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = i+1$

$S = \{i+1, i-1\}$

(ب) (1)

$\frac{h(z)-a}{h(z)-b} = \frac{i\left(\frac{z-2i}{z-i}\right) - i - 1}{i\left(\frac{z-2i}{z-i}\right) - i + 1}$

$= \frac{i(z-2i) - (i+1)(z-i)}{i(z-2i) - (i-1)(z-i)}$

$= \frac{2 - 1 - z + i}{2 - 1 + z - i}$

$= -\frac{z-(i+1)}{z-(i-1)}$

$= -\frac{z-a}{z-b}$

(ب)

$(\overrightarrow{M'B}, \overrightarrow{M'A}) \equiv \arg\left(\frac{z_A - z_{M'}}{z_B - z_{M'}}\right) [2\pi]$

$\equiv \arg\left(\frac{a-h(z)}{b-h(z)}\right) [2\pi]$

$\equiv \arg\left(\frac{h(z)-a}{h(z)-b}\right) [2\pi]$

$= \arg\left(-\frac{z-a}{z-b}\right) [2\pi]$

$= \arg(-1) + \arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right) [2\pi]$

$= \pi + (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) [2\pi]$

(6)

3) أ) إذا كانت النقط M و A و B مستقيمية فإن

$\frac{z-a}{z-b} \in \mathbb{R}$ ← $\arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right) \equiv k\pi\ [2\pi]$ أو $\arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right) \equiv \pi + k\pi$ / $k \in \mathbb{Z}$

إذن $\left(\overrightarrow{M'B}, \overrightarrow{M'A}\right) \equiv k\pi\ [2\pi]$ أو $\left(\overrightarrow{M'B}, \overrightarrow{M'A}\right) \equiv \pi(k+1)\ [2\pi]$

وبما أن A, B, M' على استقامة واحدة، وبما أن A, B, M مستقيمية

حسب ما برهنا أن النقط M', B, A, M مستقيمية

ب) بما أن M و A و B غير مستقيمية ومختلفة يمكن بكتابة أن:

$$\frac{h(z)-a}{h(z)-b} \times \frac{z-b}{z-a} = -1 \in \mathbb{R}$$ و

$$\frac{a-h(z)}{b-h(z)} \times \frac{b-z}{a-z} = -1 \in \mathbb{R}$$

إذن النقط M', B, M, A متداورة

التمرين الثالث:

1) أ) القيم الممكنة لـ X هي: $0, \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{4}{10}, \frac{5}{10}, \frac{6}{10}, \frac{7}{10}, \frac{8}{10}, \frac{9}{10}, \frac{10}{10}$

ب) $p(X=\frac{1}{2}) = \frac{5 \times (\frac{1}{2})}{10 \times (\frac{1}{2})} = \frac{1}{2}$

2)

$$p(X \geq \tfrac{9}{10}) = p(X=\tfrac{9}{10}) + p(X=\tfrac{10}{10})$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + \left(\frac{1}{2}\right)^{11}$$

التمرين الرابع :

(7)

1) أ) $f(0)=0$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\left(\ln(x)\right)^2$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \left(4x^{\frac{1}{4}}\ln\left(x^{\frac{1}{4}}\right)\right)^2$$

$$= 0$$

بوضع $y=x^{\frac{1}{4}}$ لدينا $x\to 0$ يعطي $y\to 0$ و $\lim_{y\to 0^+}\left(4x\ln(x)\right)^2$ إذن

و بالتالي فإن f متصلة على اليمين في 0

ب)

$$\lim_{+\infty} f(x) = \lim_{+\infty} \sqrt{x}\left(\ln(x)\right)^2$$

$$= +\infty$$

$$\lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{+\infty} \frac{\left(\ln(x)\right)^2}{\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{+\infty} \left(\frac{4\ln\left(x^{\frac{1}{4}}\right)}{x^{\frac{1}{4}}}\right)^2$$

$$= 0$$

بوضع $y=x^{\frac{1}{4}}$ تصبح $\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{4\ln(y)}{y}\right)^2$

ج) يقبل فرع شلجمي في إتجاه محور الأفاصيل بجوار $+\infty$

2) أ)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{0^+} \frac{f(x)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\left(\ln x\right)^2}{\sqrt{x}}$$

$$= +\infty$$

f غير قابلة للإشتقاق على اليمين في 0

(8)

وبما أن $\sqrt{x}$ قابلة للاشتقاق في 0 على اليمين

ب) الدالة $x \to (\ln(x))^2$ قابلة للاشتقاق في $]0,+\infty[$

والدالة $x \to \sqrt{x}$ قابلة للاشتقاق في $]0,+\infty[$

إذن الدالة f قابلة للاشتقاق في $]0,+\infty[$

$$\forall x \in]0,+\infty[\quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times (\ln(x))^2 + \sqrt{x} \ln(x) \times \frac{2}{x}$$

$$= \frac{(\ln(x))^2 + 4\ln(x)}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{\sqrt{x}(\ln x)^2 + 4\sqrt{x}\ln(x)}{2x}$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x}\ln(x)[\ln(x)+4]}{2x}$$

ج)

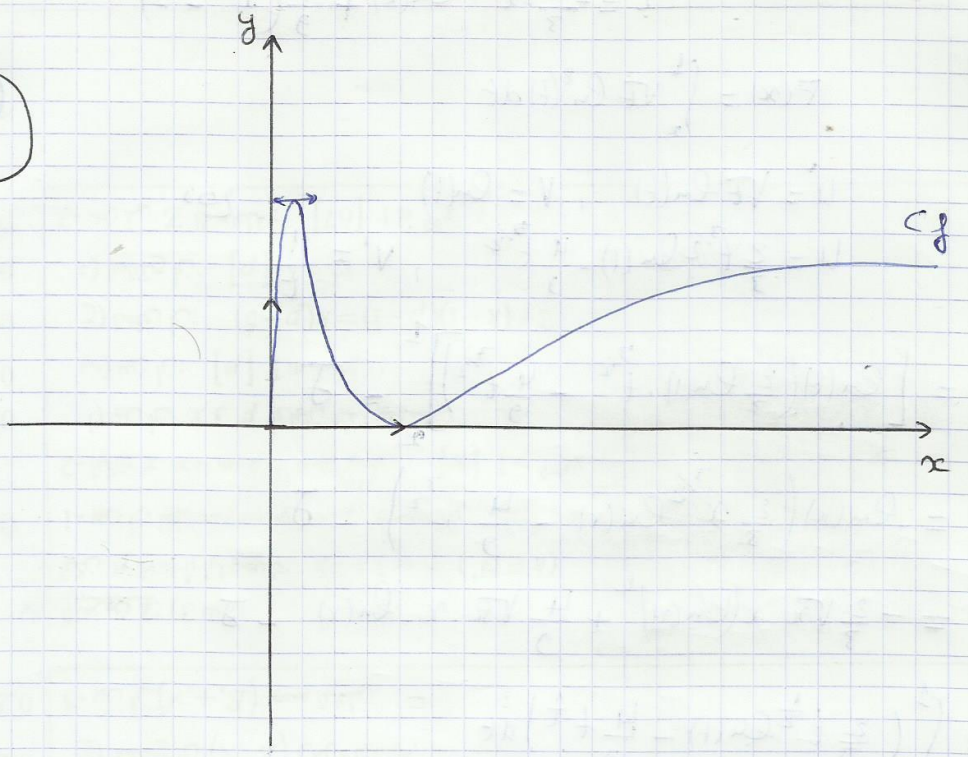
x	0		e^{-4}		1		$+\infty$
$\sqrt{x}$		+		+		+	
$\ln(x)$	‖	−		−	0	+	
$\ln(x)+4$		−	0	+		+	
$f'(x)$	‖	+	0	−	0	+	
f	0	↗	$(\frac{4}{e})^2$	↘	0	↗	$+\infty$

في المجال $I =]0,1]$ الدالة f تقبل قيمة قصوى في $x = e^{-4}$

إذن $\forall x \in]0,1] : f(0) \leq f(x) \leq f(e^{-4})$

$0 \leq \sqrt{x}(\ln(x))^2 \leq (\frac{4}{e})^2$

(9)



(3) أ) لدينا الدالة f متصلة على $[0,+\infty[$ إذن F قابلة للاشتقاق على المجال $[0,+\infty[$

ب) $\forall x \geq 0 \quad F'(x) = f(x)$

$$F'(x) = \sqrt{x}\left(\ln(x)\right)^2$$

حسب جدول التغيرات الدالة f فإن $\forall x \in [0,+\infty[\quad f(x) \geq 0$

إذن F دالة تزايدية على المجال $[0,+\infty[$

(4) أ)

$$I = \int_x^1 \sqrt{t}\ln(t)\,dt$$

نضع $u = \ln(t)$ $\quad u' = \frac{1}{t}$

$v' = \sqrt{t}$ $\quad v = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}$

$$I = [u.v]_x^1 - \int_x^1 \frac{2}{3}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{t}\,dt$$

$$= \left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\ln(t)\right]_x^1 - \frac{2}{3}\int_x^1 t^{\frac{1}{2}}\,dt$$

$$= -\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln(x) - \frac{2}{3}\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_x^1$$

(10)

$$I = -\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln(x) + \frac{4}{9}\left(x^{\frac{3}{2}} - 1\right)$$

$$F(x) = \int_x^1 \sqrt{t}\ln^2(t)\,dt$$

$u' = \sqrt{t}\ln(t)$, $v = \ln(t)$ (par)

$u = \frac{2}{3}t^{3/2}\ln(t) - \frac{4}{9}t^{3/2}$, $v' = \frac{1}{t}$

$$F(x) = \left[\ln(t)\left(\frac{2}{3}\ln(1)\cdot t^{3/2} - \frac{4}{9}t^{3/2}\right)\right]_x^1 - J$$

$$= -\ln(x)\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\ln(x) - \frac{4}{9}x^{3/2}\right) - J$$

$$= -\frac{2}{3}\sqrt{x}\,x\ln(x)^2 + \frac{4}{9}\sqrt{x}\cdot x\cdot\ln(x) - J$$

$$J = \int_x^1 \left(\frac{2}{3}t^{\frac{1}{2}}\ln(t) - \frac{4}{9}t^{\frac{1}{2}}\right)dt$$

$$= \frac{2}{3}\times I - \frac{4}{9}\int_x^1 t^{\frac{1}{2}}\,dt$$

$$= -\frac{4}{9}x^{3/2}\ln(x) + \frac{8}{27}\left(x^{3/2} - 1\right) - \frac{4}{9}\left[\frac{2}{3}t^{3/2}\right]_x^1$$

$$= -\frac{4}{9}x^{3/2}\ln(x) + \frac{8}{27}x^{3/2} - \frac{8}{27} - \frac{8}{27} + \frac{8}{27}x^{3/2}$$

$$F(x) = -\frac{2}{3}\sqrt{x}\cdot x\ln(x)^2 + \frac{4}{9}\sqrt{x}\cdot x\cdot\ln(x) + \frac{4}{9}x^{3/2}\ln(x) - \frac{16}{27}x\sqrt{x} + \frac{16}{27}$$

ou $\frac{1}{5}$

$$F(x) = -\frac{2}{3}\sqrt{x}\cdot x\ln(x)^2 + \frac{8}{9}x\sqrt{x}\ln(x) - \frac{16}{27}x\sqrt{x} + \frac{16}{27}$$

ج) مساحة الحيز المستوي المحصور بين (C) والمستقيمات المعرفة بالمعادلات

$x=0$ و $x=1$ و $y=0$ هي

$$S' = \int_0^1 f(t)dt = \lim_{x\to 0^+} F(x)$$

(11)

$$\lim_{x\to 0^+} F(x)$$

لدينا

$$= \lim_{0^+} -\frac{2}{3}x\sqrt{x}(\ln(x))^2 + \frac{8}{9}x\sqrt{x}\ln(x) - \frac{16}{27}x\sqrt{x} + \frac{16}{27}$$

$= 0$ (حسب 1.4) و $= 0$

لدينا

$$\lim_{x\to 0^+} x\sqrt{x}\ln(x) = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}(x\ln(x))$$

$$= 0 \times 0$$

لأن $\lim_{0^+} x\ln(x) = 0$

إذن $\lim_{x\to 0^+} F(x) = \frac{16}{27}$

و بالتالي فإن $S' = \frac{16}{27} \times 2 \times 2\ cm^2$

$$S' = \frac{64}{27}\ cm^2$$

ج) حسب السؤال 2.ج)

$\forall x \in]0,1[$ $\quad 0 \leqslant \sqrt{x}(\ln(x))^2 \leqslant \left(\frac{4}{e}\right)^2$

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \left(\frac{4}{e}\right)^2$$

$$0 \leqslant \int_{\frac{1}{n}}^1 f(x)dx \leqslant \int_{\frac{1}{n}}^1 \left(\frac{4}{e}\right)^2 dx$$

$$0 \leqslant u_n \leqslant \left(\frac{4}{e}\right)^2\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

إذن $(u_n)_{n\geqslant 1}$ متقاربة

لدينا $u_n = F\left(\frac{1}{n}\right)$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}$

و F تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$ إذن $(u_n)_{n\geqslant 1}$ تزايدية قطعا

ب)

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 f(x)dx$$

$$= \frac{16}{27}$$