

Conexión Paths ESP - 2022/2023

Exercice N° 01

partie I

1) a) Pq $\forall t \geq 0$

$$\frac{4}{(2+t)^2} \leq \frac{1}{1+t} \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{(1+t)^2}\right)$$

$$\frac{1}{1+t} - \frac{4}{(2+t)^2} = \frac{(2+t)^2 - 4(1+t)}{(1+t)(2+t)^2}$$

$$= \frac{t^2 + 4t + 4 - 4 - 4t}{(1+t)(2+t)^2} = \frac{t^2}{(1+t)(2+t)^2} \geq 0 \quad \text{car } t \geq 0$$

donc $\frac{4}{(2+t)^2} \leq \frac{1}{1+t}$

$$\bullet \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{(1+t)^2}\right) - \frac{1}{1+t} = \frac{1}{2} \frac{(1+t)^2 + 1 - 2(1+t)}{(1+t)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1 + 2t + t^2 + 1 - 2 - 2t}{(1+t)^2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{t^2}{(1+t)^2} \right) \geq 0$$

d'où le résultat.

①

b) ora: $\forall t \geq 0 \quad \frac{4}{(2+t)^2} \leq \frac{1}{1+t} \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{(1+t)^2}\right)$

soit $n \geq 0$ par suite:

$$\int_0^n \frac{4}{(2+t)^2} dt \leq \int_0^n \frac{1}{1+t} dt \leq \frac{1}{2} \int_0^n \left(1 + \frac{1}{(1+t)^2}\right) dt$$

$$\left[-\frac{4}{2+t} \right]_0^n \leq [\ln(1+t)]_0^n \leq \frac{1}{2} \left[t - \frac{1}{1+t} \right]_0^n$$

$$-\frac{4}{2+n} + 2 \leq \ln(1+n) \leq \frac{1}{2} \left(n - \frac{1}{1+n} + 1 \right)$$

$$\frac{2n}{2+n} \leq \ln(1+n) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{n^2 + 2n}{n+1} \right)$$

2) $g(n) = \frac{\ln(1+n)}{n} ; n > 0$

$\lim_{n \rightarrow 0^+} g(n) - 1 = ?$

soit $n > 0$: $g(n) - 1 = \frac{\ln(1+n)}{n} - 1$

d'après 1) b-

ora: $\frac{2}{2+n} \leq \frac{\ln(1+n)}{n} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{n+2}{1+n} \right)$

$$\frac{2}{2+n} - 1 \leq \frac{\ln(1+n)}{n} - 1 \leq \frac{1}{2} \left(\frac{n+2}{1+n} \right) - 1$$

$$\frac{-n}{2+n} \leq \frac{\ln(1+n)}{n} - 1 \leq \frac{1}{2} \left(\frac{-n}{n+1} \right) \quad \text{②}$$

10/10

$$B \quad \frac{1}{2+n} \approx \frac{\frac{\ln(1+n)}{n} - 1}{n} < \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{n+1} \right)$$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2+n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{n+1} \right) = -\frac{1}{2}$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{g(n) - 1}{n} = -\frac{1}{2}$$

partie II: $f(0) = 1$

$$f(n) = e^{-n} g(n) = \frac{\ln(1+n)}{e^n}$$

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{n e^x} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+n)}{1+n} \times \left(\frac{1+n}{n} \right) \times \frac{1}{e^n} = 0 \times 1 \times 0 = 0$$

donc $y=0$ asymptote horizontale de f au $V(+\infty)$

e) a- $\mathbb{R}_0^+$ f est continue en 0^+

$$\lim_{n \rightarrow 0^+} f(n) = \lim_{n \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+n)}{n} \times \frac{1}{e^n} = 1 = f(0)$$

donc f est continue en 0^+

$$b) \lim_{n \rightarrow 0^+} \frac{f(n) - 1}{n} = \left(\frac{e^{-n} - 1}{n} \right) g(n) + \left(\frac{g(n) - 1}{n} \right)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{e^{-n} - 1}{n} \right) g(n) + \frac{g(n) - 1}{n} &= \frac{e^{-n} g(n) - g(n) + g(n) - 1}{n} \\ &= \frac{e^{-n} g(n) - 1}{n} \\ &= \frac{f(n) - 1}{n} \end{aligned}$$

(3)

$$c- \lim_{n \rightarrow 0^+} \frac{f(n) - f(0)}{n - 0} = \lim_{n \rightarrow 0^+} \frac{f(n) - 1}{n}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^{-n} - 1}{n} \right) g(n) + \left(\frac{g(n) - 1}{n} \right) \\ &= -1 \times 1 + \left(-\frac{1}{2} \right) = -\frac{3}{2} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\text{car } \lim_{n \rightarrow 0^+} \frac{e^{-n} - 1}{n} = \lim_{n \rightarrow 0^+} \frac{e^{-n} - 1}{-n} = -1$$

$$\lim_{n \rightarrow 0^+} g(n) = \lim_{n \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+n)}{n} = 1$$

الساكن

donc f est dérivable en 0^+ et $f'(0) = -\frac{3}{2}$.

3) puisque g est dérivable sur $]0, +\infty[$

comme le quotient de deux fct. dérivables et $n \mapsto e^{-n}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$

alors f est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme le produit de deux fct. dérivables sur $]0, +\infty[$

$$\begin{aligned} f'(n) &= g'(n) \times e^{-n} - g(n) e^{-n} \\ &= \frac{\frac{n}{n+1} - \ln(1+n)}{n^2} \times e^{-n} - g(n) e^{-n} \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{n - (n+1)\ln(1+n)}{(n+1)n^2} - \frac{\ln(1+n)}{n} \right) e^{-n}$$

$$= e^{-n} \left(\frac{n - (n+1)\ln(1+n) - n(n+1)\ln(1+n)}{n^2(n+1)} \right)$$

(4)

$$f'(x) = \left(\frac{x - (1+x)^2 \ln(1+x)}{x^2(1+x)} \right) e^{-x}$$

4) a) Ilq $\forall x > 0$

$$-\frac{3}{2} < \frac{x - (1+x)^2 \ln(1+x)}{x^2(1+x)} < 0$$

$$\alpha \alpha = \frac{x - (1+x)^2 \ln(1+x)}{x^2(1+x)} = \frac{1}{x(1+x)} - \frac{(1+x) \ln(1+x)}{x^2}$$

$$\text{et } \frac{2x}{2+x} < \ln(1+x) < \frac{1}{2} \left(\frac{x^2+2x}{1+x} \right)$$

$$\frac{2x}{2+x} \times \frac{x+1}{x^2} < \frac{1+x}{x^2} \ln(1+x) < \frac{1}{2} \left(\frac{x^2+2x}{1+x} \right) \frac{x+1}{x^2}$$

car si $x > 0$ $\frac{1+x}{x^2} > 0$

$$-\frac{1}{2} \left(\frac{x+2}{x} \right) < -\frac{1+x}{x^2} \ln(1+x) < \frac{-2(x+1)}{x(2+x)}$$

$$\frac{1}{x(1+x)} - \frac{1}{2} \left(\frac{x+2}{x} \right) < \frac{1}{x(1+x)} - \frac{1+x}{x^2} \ln(1+x) < \frac{1}{x(1+x)} - \frac{2(x+1)}{x(2+x)}$$

$$\frac{2 - (x+2)(x+1)}{2x(1+x)} < \dots < \frac{x+2 - 2(x+1)^2}{x(2+x)(x+1)}$$

$$\frac{-x-3}{2(2+x)} < \dots < \frac{-2x^2-3x}{x(x+1)(2+x)} \quad (5)$$

et puisque $x > 0$ alors $-2x^2-3x < 0$

et $x(x+1)(x+2) > 0$

$$\text{donc } \frac{-2x^2-3x}{x(x+1)(x+2)} < 0$$

$$\frac{-x-3}{2(x+1)} - \left(-\frac{3}{2} \right) = \frac{-x-3+3x+3}{2(x+1)} = \frac{2x}{2(x+1)} > 0 \quad (\text{car } x > 0)$$

$$\text{donc } \forall x > 0 \quad -\frac{3}{2} < \frac{x - (1+x)^2 \ln(1+x)}{x^2(1+x)} < 0$$

b) Ilq $\forall x > 0 \quad -\frac{3}{2} < f'(x) < 0$

$$\text{on a: } \forall x > 0 \quad -\frac{3}{2} < \frac{x - (1+x)^2 \ln(1+x)}{x^2(1+x)} < 0$$

$$-\frac{3}{2} e^{-x} < e^{-x} \left(\frac{x - (1+x)^2 \ln(1+x)}{x^2(1+x)} \right) < 0$$

$$-\frac{3}{2} e^{-x} < f'(x) < 0$$

et puisque $-x < 0$ car $x > 0$

alors

$$e^{-x} < e^0$$

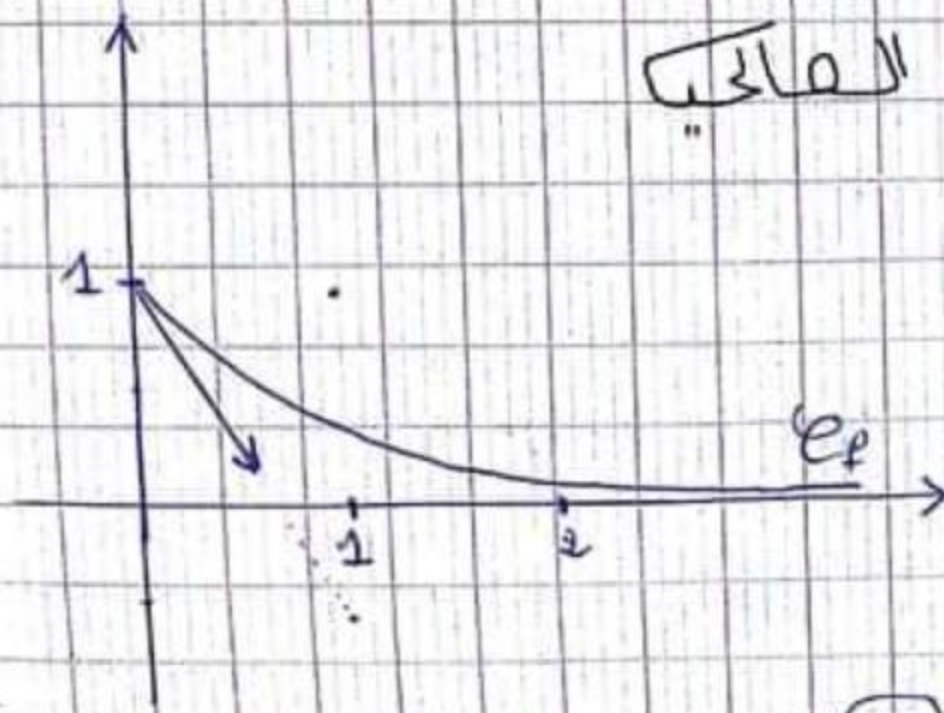
$$-\frac{3}{2} \times 1 < -\frac{3}{2} e^{-x}$$

donc : $\forall x > 0 \quad -\frac{3}{2} < f'(x) < 0$



5) a)

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-\frac{3}{2}$	-
$f(x)$	1	$\rightarrow 0$



المعالي

partie III

1) Rq $f(x) = 3x$ admet une unique sol α ds $]0, +\infty[$

on pose $g_1(x) = f(x) - 3x$

g_1 est continue sur $]0, +\infty[$ comme la somme de deux fcts continue sur $]0, +\infty[$

g_1 est dérivable sur $]0, +\infty[$

et $g_1'(x) = f'(x) - 3 < 0$ car $\forall x > 0 \quad f'(x) < 0$

donc g_1 est bijective de $]0, +\infty[$ vers $g_1(]0, +\infty[)$

et $g_1(]0, +\infty[) =]\lim_{x \rightarrow 0} g_1(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} g_1(x)[$
 $=]-\infty, 1[$

car $\lim_{x \rightarrow 0} g_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) - 3x = -\infty$

car $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

et puisque $0 \in]-\infty, 1[$ alors $\exists ! \alpha \in]0, +\infty[$

tg $g_1(\alpha) = 0$

donc l'équation $f(x) = 3x$ admet une unique solution α dans $]0, +\infty[$.

2) $\beta \in \mathbb{R}^+$ et $u_0 = \beta$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3} f(u_n)$; mêm

(7)

(8)

a) $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq 0$ (par récurrence)

• pour $n=0 \quad u_0 = \beta \geq 0$

• supposons $u_n \geq 0$ et montrons que $u_{n+1} \geq 0$

• puisque f est continue et strictement décroissante sur $[0, +\infty[$ alors $f([0, +\infty[) =]0, 1]$

donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad f(u_n) > 0$

et puisque $u_n \geq 0$ alors $f(u_n) \geq 0$

donc $u_{n+1} \geq 0$

d'où d'après le principe de récurrence

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq 0$

b) $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$

on pose $h(n) = \frac{1}{3} f(n)$

• h est continue sur $[0, +\infty[$

• h est dérivable sur $]0, +\infty[$

et $h'(n) = \frac{1}{3} f'(n)$

et on a $f'(n) = -\frac{3}{2} f'(n) < 0$

$-\frac{1}{2} < \frac{1}{3} f'(n) < 0 < \frac{1}{2}$

donc $\forall n > 0 \quad |h'(n)| < \frac{1}{2}$ (9)

donc d'après th des Accrassent finis (I.A.F) pour α et u_n de $]0, +\infty[$

$$|h(u_n) - h(\alpha)| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$$

$$|u_{n+1} - \frac{1}{3} f(\alpha)| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$$

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$$

$$\left(\text{car } \frac{1}{3} f(\alpha) = \frac{1}{3} \times 3\alpha = \alpha \right)$$

c) $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n - \alpha| < \frac{1}{2^n} |\beta - \alpha|$

pour $n=0$

$$|u_0 - \alpha| = |\beta - \alpha|$$

$$\frac{1}{2^0} |\beta - \alpha| = |\beta - \alpha|$$

$$\text{donc } |u_0 - \alpha| \leq \frac{1}{2^0} |\beta - \alpha|$$

$$\text{supposons } |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} |\beta - \alpha|$$

$$\text{montrons que } |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+1}} |\beta - \alpha|$$

$$\text{on a } |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha| \quad (*)$$

$$\text{et } |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} |\beta - \alpha|$$

$$\text{et par suite } \frac{1}{2} |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+1}} |\beta - \alpha| \quad (**)$$

(10)

d'après * et **: $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+1}} |\beta - \alpha|$

d) puisque $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} |\beta - \alpha|$

et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ car $0 < \frac{1}{2} < 1$

et par suite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} |\beta - \alpha| = 0$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$

d'où (u_n) converge vers α

Exercice 2

$$M_k \left(\frac{k}{n}, e^{\frac{k}{n}} \right) \in (\Gamma)$$

on pose $h(x) = e^x$; $x \in \mathbb{R}$

soit $k \in \{0, 1, \dots, n\}$

h est continue sur $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right]$

et h est dérivable sur $\left] \frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right[$

donc d'après T.A.F. $\exists c_k \in \left] \frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right[$

$$h\left(\frac{k+1}{n}\right) - h\left(\frac{k}{n}\right) = \left(\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n}\right) h'(c_k)$$

$$e^{\frac{k+1}{n}} - e^{\frac{k}{n}} = \frac{1}{n} e^{c_k}$$

(11)

$$b) \prod_{k=0}^n \pi_k = \frac{1}{n} \sqrt{1 + e^{2c_k}}$$

$$\prod_k \pi_{k+1} = \sqrt{\left(\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n}\right)^2 + \left(e^{\frac{k+1}{n}} - e^{\frac{k}{n}}\right)^2}$$

$$\text{car } AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} : \text{Rappel}$$

$$\prod_k \pi_{k+1} = \sqrt{\frac{1}{n^2} + \left(\frac{1}{n} e^{c_k}\right)^2} \quad \text{d'après a)}$$

$$= \frac{1}{n} \sqrt{1 + e^{2c_k}}$$

$$c) \text{ on a: } \prod_k \pi_{k+1} = \frac{1}{n} \sqrt{1 + e^{2c_k}}$$

$$\text{puisque } \frac{k}{n} < c_k < \frac{k+1}{n}$$

$$e^{\frac{k}{n}} < e^{c_k} < e^{\frac{k+1}{n}}$$

$$1 + e^{\frac{k}{n}} < 1 + e^{c_k} < 1 + e^{\frac{k+1}{n}}$$

car exp est $\nearrow$ sur $\mathbb{R}$

$$\sqrt{1 + e^{\frac{k}{n}}} < \sqrt{1 + e^{c_k}} < \sqrt{1 + e^{\frac{k+1}{n}}}$$

car $x \mapsto \sqrt{x}$ est $\nearrow$ sur $[0, +\infty[$

$$\frac{1}{n} \sqrt{1 + e^{\frac{k}{n}}} < \prod_k \pi_{k+1} < \frac{1}{n} \sqrt{1 + e^{\frac{k+1}{n}}}$$

$$2) n \in \mathbb{N}^* ; S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \prod_k \pi_{k+1}$$

(12)

2) a) on a: $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{1}{n} \sqrt{1+e^{\frac{2k}{n}}} \leq \prod_{k=1}^n \sqrt{1+e^{\frac{2k}{n}}} \leq \frac{1}{n} \sqrt{1+e^{\frac{2(n+1)}{n}}}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \sqrt{1+e^{\frac{2k}{n}}} \leq \sum_{k=0}^{n-1} \prod_{k=1}^n \sqrt{1+e^{\frac{2k}{n}}} \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \sqrt{1+e^{\frac{2(k+1)}{n}}}$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1+e^{\frac{2k}{n}}} \leq S_n \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1+e^{\frac{2(k+1)}{n}}}$$

on pose $k+1 = k'$

si $k=0$ alors $k'=1$

si $k=n-1$ alors $k'=n$

$$\text{donc } \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1+e^{\frac{2(k+1)}{n}}} = \sum_{k'=1}^n \sqrt{1+e^{\frac{2k'}{n}}}$$

$$= \sum_{k=1}^n \sqrt{1+e^{\frac{2k}{n}}}$$

$$\text{donc } \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1+e^{\frac{2k}{n}}} \leq S_n \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{1+e^{\frac{2k}{n}}}$$

□

(13)

$$\text{on pose } U_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1+e^{\frac{2k}{n}}}$$

$$\text{et } V_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{1+e^{\frac{2k}{n}}}$$

$$\text{et } F(x) = \sqrt{1+e^{2x}}$$

$$\text{donc } U_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} F\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$\text{et } V_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n F\left(\frac{k}{n}\right)$$

et F continue sur $\mathbb{R}$ et par suite
 F est continue sur $[0, 1]$

donc d'après le théorème de Riemann

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \int_0^1 F(x) dx$$

donc d'après 2) a) et th des gendarmes

$$\lim S_n = \int_0^1 F(x) dx$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1+e^{2x}} dx \quad (14)$$

EXERCICE 03 (Complexes) 25/11 2022/2023N

$$u = 1 + (2 - \sqrt{3})i$$

$$1) a) 1 - i = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = \sqrt{2} e^{-i\pi/4}$$

$$1 + \sqrt{3} = 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 2 e^{i\pi/3}$$

$$b) \frac{(1-i)(1+\sqrt{3}i)}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} e^{-i\pi/4} \times 2 e^{i\pi/3}}{2\sqrt{2}} = e^{i(\pi/3 - \pi/4)} = e^{i\pi/12}$$

c) On a:

$$\frac{(1-i)(1+\sqrt{3}i)}{2\sqrt{2}} = e^{i\pi/12}$$

$$\frac{(1+\sqrt{3})}{2\sqrt{2}} + i \frac{(\sqrt{3}-1)}{2\sqrt{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sin(\frac{\pi}{12})}{\cos(\frac{\pi}{12})} = \frac{\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}} = \frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3})^2 - 1^2}$$

(15)

$$\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{3+1-2\sqrt{3}}{3-1} = 2-\sqrt{3} \quad (*)$$

$$d) u = 1 + (2 - \sqrt{3})i = 1 + i \tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1 + i \frac{\sin \frac{\pi}{12}}{\cos \frac{\pi}{12}}$$

$$= \frac{\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}}{\cos \frac{\pi}{12}}$$

$$= \frac{1}{\cos \frac{\pi}{12}} e^{i\pi/12}$$

et d'après c) $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

$$\text{donc } u = \frac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}} e^{i\pi/12} = \frac{2\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{3-1} e^{i\pi/12}$$

$$u = \sqrt{2}(\sqrt{3}-1) e^{i\pi/12} = (\sqrt{6}-\sqrt{2}) e^{i\pi/12}$$

المسألة

(16)

2) Suites (Complexes) — 2023 N

$$x_0 = 1 \quad y_0 = 0$$

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - (2 - \sqrt{3})y_n \\ y_{n+1} = (2 - \sqrt{3})x_n + y_n \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N})$$

a) Π_q (par récurrence) $x_n + iy_n = u^n$

• pour $n=0$ $x_0 + iy_0 = 1 + 0i = 1$
et $u^0 = 1$

donc $x_0 + iy_0 = u^0$

• Supposons $x_n + iy_n = u^n$
et Π_q $x_{n+1} + iy_{n+1} = u^{n+1}$

$$\begin{aligned} x_{n+1} + iy_{n+1} &= x_n - (2 - \sqrt{3})y_n + i((2 - \sqrt{3})x_n + y_n) \\ &= (x_n + iy_n) + (2 - \sqrt{3})i(x_n + iy_n) \\ &= (x_n + iy_n)(1 + (2 - \sqrt{3})i) \\ &= u^n \times u \end{aligned}$$

$$x_{n+1} + iy_{n+1} = u^{n+1}$$

donc d'après le principe de récurrence ce

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n + iy_n = u^n$$

(17)

b) on a: $x_n + iy_n = u^n$
 $x_n + iy_n = \left(\frac{e^{i\frac{\pi}{12}}}{\cos\frac{\pi}{12}} \right)^n$ d'après 1/d)

$$\begin{aligned} x_n + iy_n &= \frac{e^{i n \frac{\pi}{12}}}{\left(\cos\frac{\pi}{12} \right)^n} \\ &= \frac{\cos\left(n\frac{\pi}{12}\right)}{\left(\cos\frac{\pi}{12} \right)^n} + i \frac{\sin\left(n\frac{\pi}{12}\right)}{\left(\cos\frac{\pi}{12} \right)^n} \end{aligned}$$

donc $x_n = \frac{\cos\left(n\frac{\pi}{12}\right)}{\left(\cos\frac{\pi}{12} \right)^n}$

et $y_n = \frac{\sin\left(n\frac{\pi}{12}\right)}{\left(\cos\frac{\pi}{12} \right)^n}$

3) $A_n(u)$ $A_0(u^0)$ c'est $A_0(1)$

$$\frac{\partial A_n - \partial_0}{\partial A_0 - \partial_0} = \frac{u^n - 0}{1 - 0} = u^n = (\sqrt{6} - \sqrt{2}) e^{i n \frac{\pi}{12}}$$

الساكني

(18)

O et A_0 et A_m sont alignésssi

$$\Leftrightarrow \frac{z_{A_m} - O}{z_{A_0} - O} = (\sqrt{2} - \sqrt{3})^m e^{i \frac{m\pi}{12}} \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{m\pi}{12} = k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \text{ et } m \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow m = 12k \geq 0 \quad k \in \mathbb{N}$$

b) soit $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad \frac{z_{A_{m+1}} - z_{A_m}}{z_{A_1} - z_{A_0}} &= \frac{u^m - u^{m+1}}{u^m} \\ &= 1 - u \\ &= 1 - (1 + (2 - \sqrt{3})i) \\ &= -(2 - \sqrt{3})i \\ &= (2 - \sqrt{3}) e^{-i \frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{(A_m O, A_m A_{m+1})} &\equiv \arg\left(\frac{z_{A_{m+1}} - z_{A_m}}{z_{A_1} - z_{A_0}}\right) [2\pi] \\ &\equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi] \end{aligned}$$

donc $O A_m A_{m+1}$ est un triangle rectangle en A_m pour tout m

(19)

EXERCICE Arithmétique

$N \leq 23N$

soit p premier impair (positif)

$$(E): x^2 \equiv 2 [p]$$

1) a) puisque p est premier et p impair donc $p \neq 2$
donc $2 \wedge p = 1$

d'où d'après Th de Fermat

$$2^{p-1} \equiv 1 [p] \quad \text{« 1 »}$$

b) puisque p est impair alors $\frac{p-1}{2}$ est un entier naturel

$$\begin{aligned} \text{et } (2^{\frac{p-1}{2}} - 1)(2^{\frac{p-1}{2}} + 1) &= (2^{\frac{p-1}{2}})^2 - 1^2 \\ &= (2^{p-1} - 1) \end{aligned}$$

$$\text{on a: } 2^{p-1} \equiv 1 [p] \Rightarrow p \mid 2^{p-1} - 1$$

$$\Rightarrow p \mid (2^{\frac{p-1}{2}} - 1)(2^{\frac{p-1}{2}} + 1) \text{ et } p \text{ premier}$$

$$\Rightarrow p \mid 2^{\frac{p-1}{2}} - 1 \text{ ou } p \mid 2^{\frac{p-1}{2}} + 1 \quad (20)$$

$$\Rightarrow 2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 [p] \text{ ou } 2^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 [p]$$

2) soit x solution de (E).

car on a: $x^2 \equiv 2 [p] \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \quad x^2 - 2 = pk$

on pose: $x \wedge p = d$

$$\Rightarrow d/x \text{ et } d/p$$

$$\Rightarrow d/x^2 \text{ et } d/pk$$

$$\Rightarrow d/x^2 - pk \quad \text{et } (x^2 - pk = 2)$$

$$\Rightarrow d/2 \quad \text{et on a: } d/p$$

$$\Rightarrow d/2 \wedge p$$

$$\Rightarrow d/1 \quad \text{car } 2 \wedge p = 1$$

$$d=1 \quad \text{car } d \in \mathbb{N}$$

$$\text{d'où } x \wedge p = 1$$

b) p premier et impair alors $\exists k \in \mathbb{N}$
 $p = 2k+1$
 $p-1 = 2k$

(21)

puisque p est premier et $p \nmid x = 1$

alors $\textcircled{*} x^{p-1} \equiv 1 [p]$ d'après Fermat

et $x^2 \equiv 2 [p]$ donc $x^{2k} \equiv 2^k [p]$
 $x^{p-1} \equiv 2^k [p] \textcircled{**}$

de $\textcircled{*}$ et $\textcircled{**}$:

$$2^k \equiv 1 [p]$$

$$2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 [p]$$

3) $\forall k \in \{1, 2, \dots, p-1\} \quad p \nmid C_p^k$

on a: $\forall m \in \mathbb{N} \quad C_m^m \in \mathbb{N}$

puisque $k C_p^k = p C_{p-1}^{k-1}$

alors $p/k \in C_p^k$

et puisque $1 \leq k < p$ et p premier
 alors $p \nmid k$

(22)

donc $p \nmid k = 1$
 d'où d'après Gauss: $p \nmid C_p^k$

4) a) 1^{re} $(1+i)^p = e^{p/2} \left(\cos\left(\frac{p\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{p\pi}{4}\right) \right)$

$$(1+i)^p = \left(\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right)^p$$

$$= (\sqrt{2})^p \left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4} \right)^p$$

d'après Moivre :

$$(1+i)^p = 2^{p/2} \left(\cos\left(\frac{p\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{p\pi}{4}\right) \right)$$

$$= 2^{p/2} \cos\left(\frac{p\pi}{4}\right) + i 2^{p/2} \sin\left(\frac{p\pi}{4}\right).$$

b) on a d'après que $i^{2k} = (-1)^k$

$$(1+i)^p = \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k C_p^{2k} + i \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k C_p^{2k+1}$$

et $(1+i)^p = 2^{p/2} \cos\left(\frac{p\pi}{4}\right) + i 2^{p/2} \sin\left(\frac{p\pi}{4}\right)$

donc $2^{p/2} \cos\left(\frac{p\pi}{4}\right) = \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k C_p^{2k}$ (23)

et puisque $\forall k \in \{0, \dots, \frac{p-1}{2}\}$
 $C_p^{2k} \in \mathbb{N}$ et $(-1)^k \in \mathbb{Z}$

donc $2^{p/2} \cos\left(\frac{p\pi}{4}\right) \in \mathbb{Z}$

et $2^{p/2} \cos\left(\frac{p\pi}{4}\right) = (-1)^0 C_p^0 + \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} (-1)^k C_p^{2k}$

pour $1 \leq k \leq \frac{p-1}{2}$

puisque $2 \leq 2k \leq p-1$ donc $p \nmid C_p^{2k}$

d'après 3)

$$2^{p/2} \cos\left(\frac{p\pi}{4}\right) = 1 + p \times N \text{ avec } N \in \mathbb{N}$$

d'où $2^{p/2} \cos\left(\frac{p\pi}{4}\right) \equiv 1 \pmod{p}$

5) d'après 4) b)

on a :

$$2^{p/2} \cos\left(\frac{p\pi}{4}\right) \equiv 1 \pmod{p}$$

si $p \equiv 5 \pmod{8}$ alors $\exists k \in \mathbb{N}$ $p = 5 + 8k$

$$\cos\left(\frac{p\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right)$$

$$= \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} = -2^{-1/2}$$
 (24)

donc si $p \equiv 5[8]$ alors

$$2^{p/2} \times (-2)^{-1/2} \equiv 1[p]$$

$$-2^{p-1} \equiv 1[p]$$

$$(*) \quad 2^{p-1} \equiv -1[p]$$

et si n solution de (E) alors

$$(**) \quad 2^{p-1} \equiv 1[p]$$

(d'après Question 2) b)

d'après (*) et (**): $1 \equiv -1[p]$

$$\Rightarrow 2 \equiv 0[p]$$

$\Rightarrow p/2$ absurde

car p premier impair

d'où (E) n'admet pas de sol
dans $\mathbb{Z}$

Exercice 5 (structures)

25/11

2023/24

$$E = \left\{ \Pi(x, y) = \begin{pmatrix} x+y & y \\ 2y & x-y \end{pmatrix} \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

partie I :

1) $\Pi_2(\mathbb{R}, +)$ sous gr de $(\Pi_2(\mathbb{R}), +)$

$E \subset \Pi_2(\mathbb{R})$ et $(\Pi_2(\mathbb{R}), +)$ groupe

car $(\Pi_2(\mathbb{R}), +)$ est un anneau

• si $x=0$ et $y=0$ alors $\Pi(0,0) \in E$

donc $E \neq \emptyset$

• soit $\Pi(x, y)$ et $\Pi(x', y')$ de E

$$\Pi(x, y) - \Pi(x', y') = \begin{pmatrix} x+y & y \\ 2y & x-y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x'+y' & y' \\ 2y' & x'-y' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (x-x')+(y-y') & y-y' \\ 2(y-y') & (x-x')-(y-y') \end{pmatrix}$$

$$= \Pi(x-x', y-y') \in E$$

car $x-x' \in \mathbb{R}$ et $y-y' \in \mathbb{R}$

d'où E est un s-gr du groupe $(\Pi_2(\mathbb{R}), +)$

(25)

(26)

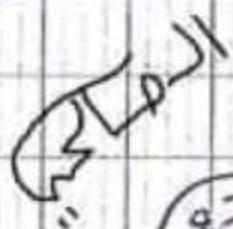
- 2) $\Pi_2 \mathbb{R}$ est un s. esp. vect de $(\Pi_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$
- $E \neq \emptyset$ car $\Pi(0,0) \in E$
 - soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $\Pi(x,y)$ et $\Pi(x',y')$ deux matrices de E

$$\begin{aligned} & \alpha \Pi(x,y) + \beta \Pi(x',y') \\ &= \alpha \begin{pmatrix} x+y & y \\ 2y & x-y \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} x'+y' & y' \\ 2y' & x'-y' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha x + \beta x' + (\alpha y + \beta y') & \alpha y + \beta y' \\ 2(\alpha y + \beta y') & (\alpha x + \beta x') - (\alpha y + \beta y') \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \Pi(\underbrace{\alpha x + \beta x'}_{\in \mathbb{R}}, \underbrace{\alpha y + \beta y'}_{\in \mathbb{R}}) \in E$$

d'où E est un s. esp. vect de l'espace vect réel $(\Pi_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$

3) a) soit $(x, x', y, y') \in \mathbb{R}^4$



(27)

$$\begin{aligned} \Pi(x,y) \times \Pi(x',y') &= \begin{pmatrix} x+y & y \\ 2y & x-y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x'+y' & y' \\ 2y' & x'-y' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (x+y)(x'+y') + 2yy' & (x+y)y' + y(x'-y') \\ 2y(x'+y') + 2y'(x-y) & 2yy' + (x-y)(x'-y') \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} (xx' + 3yy' + xy' + yx') & xy' + yx' \\ 2(yx' + y'x) & xx' + 3yy' - (xy' + yx') \end{pmatrix}$$

$$= \Pi(xx' + 3yy', xy' + yx')$$

b) $\Pi_2(\mathbb{R}, +, \times)$ est un anneau commutatif et unitaire.

⊙ on a: $(E, +)$ est un groupe commutatif car $(E, +)$ est un sous groupe du groupe commutatif $(\Pi_2(\mathbb{R}), +)$

⊙ d'après 3) a) E est stable ds $(\Pi_2(\mathbb{R}), \times)$

et on a: $\times$ est associative et distributive par rapport + ds $(\Pi_2(\mathbb{R}), +, \times)$ car $(\Pi_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau

(28)

donc x est associative et distributive
par rapport à $+$ et $\cdot$ de E

d'où $(E, +, \cdot)$ est un anneau

• Montrons que x est commutative de E

$$\begin{aligned}\text{On a: } \Pi(x, y) \times \Pi(x', y') &= \Pi(x'x + y'y, xy + y'x) \\ &= \Pi(x'x + 3yy', xy + y'x) \\ &= \Pi(x', y') \times \Pi(x, y)\end{aligned}$$

d'où x est commutative de E

• Il y a x admet un él^t neutre de E

$$\text{on a: } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \Pi(1, 0) \in E$$

avec $x=1$ et $y=0$

et I est l'élément neutre de
l'anneau $(\Pi_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$

donc I est l'él^t neutre de E
pour x .

$$4) a) \Pi(\sqrt{3}, 1) \times \Pi(-\sqrt{3}, 1)$$

$$= \Pi(-(\sqrt{3})^2 + 3 \times 1^2, \sqrt{3} \times 1 - \sqrt{3} \times 1)$$

$$= \Pi(0, 0)$$

$$= 0$$

b) supposons que $(E, +, \cdot)$ est un corps
par suite tout élément non nul de E
est inversible pour $\cdot$.

$$\Pi(\sqrt{3}, 1) \in E \setminus \{0\}$$

supposons $M(a, b)$ est l'inverse
de $\Pi(\sqrt{3}, 1)$.

$$\Pi(a, b) \times M(\sqrt{3}, 1) \times \Pi(-\sqrt{3}, 1) = \Pi(a, b) \times 0$$

$$I \times \Pi(-\sqrt{3}, 1) = 0$$

$$\Pi(-\sqrt{3}, 1) = 0 \text{ absurde}$$

donc $(E, +, \cdot)$ n'est pas un corps

اللي
لي
لي

partie II

$$F = \{x+y\sqrt{3} / (x,y) \in \mathbb{Q}^2\}$$

$$G = \{ \Pi(x,y) = \begin{pmatrix} x+y & y \\ 2y & x-y \end{pmatrix} / (x,y) \in \mathbb{Q}^2 \}$$

$$1) \forall (x,y) \in \mathbb{Q}^2: x+y\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow (x=0 \text{ et } y=0)$$

$$\Leftrightarrow \text{si } x=0 \text{ et } y=0 \text{ alors } x+y\sqrt{3}=0+0\sqrt{3}=0$$

$$\Rightarrow \text{soit } (x,y) \in \mathbb{Q}^2 \text{ tq } x+y\sqrt{3}=0$$

$$\text{sup } x \neq 0 \text{ ou } y \neq 0$$

$$\cdot \text{ si } y \neq 0 \text{ alors } \frac{-x}{y} = \sqrt{3} \in \mathbb{Q} \text{ absurde}$$

$$\text{donc } y=0 \text{ et par suite } x=0$$

$$\text{donc } \forall (x,y) \in \mathbb{Q}^2$$

$$x+y\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow (x=0 \text{ et } y=0)$$

$$2) \text{ on a: } F \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^*$$

$$\text{car } \forall (x,y) \in \mathbb{Q}^2 \text{ et } x+y\sqrt{3} \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \text{ ou } y \neq 0$$

$$\text{donc } x+y\sqrt{3} \in \mathbb{R}^*$$

(31)

$$\cdot F \neq \emptyset \text{ car si } x=1 \text{ et } y=0$$

$$1+0\sqrt{3}=1 \in F$$

$$\cdot \text{ soit } x+\sqrt{3}y \in F \setminus \{0\} \text{ et } x'+\sqrt{3}y' \in F \setminus \{0\}$$

$$\text{et l'inverse de } x'+\sqrt{3}y'$$

$$\text{donc le groupe } (\mathbb{R}^*, \times)$$

$$(x+\sqrt{3}y) \times \frac{1}{x'+\sqrt{3}y'} = \frac{(x+\sqrt{3}y)(x'-\sqrt{3}y')}{x'^2-3y'^2}$$

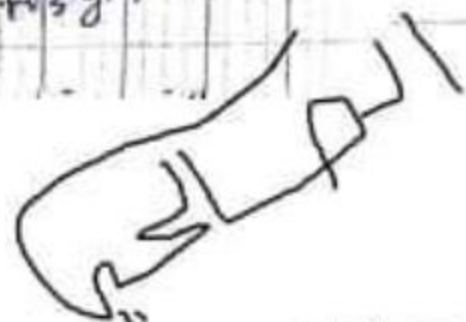
$$= \frac{xx'-3yy'+\sqrt{3}(x'y-xy')}{x'^2-3y'^2}$$

$$\text{on a: } \frac{xx'-3yy'}{x'^2-3y'^2} \in \mathbb{Q} \text{ et } \frac{x'y-xy'}{x'^2-3y'^2} \in \mathbb{Q}$$

$$\text{et puisque } x+\sqrt{3}y \neq 0 \text{ et } \frac{1}{x'+\sqrt{3}y'} \neq 0$$

$$\text{alors } (x+\sqrt{3}y) \left(\frac{1}{x'+\sqrt{3}y'} \right) \neq 0$$

$$\text{et par suite}$$



2023 N

25M (32)

$$\frac{xx' - 3yy'}{x'^2 - 3y'^2} + \sqrt{3} \frac{x'y - y'x}{x'^2 - 3y'^2} \neq 0$$

$$\text{donc } \frac{xx' - 3yy'}{x'^2 - 3y'^2} \neq 0 \text{ ou } \frac{x'y - y'x}{x'^2 - 3y'^2} \neq 0$$

$$(x + \sqrt{3}y) \times \frac{1}{x' + \sqrt{3}y'} \in F \setminus \{0\}$$

d'où $F \setminus \{0\}$ un sous groupe de $(\mathbb{R}^*, \times)$

$$3) \varphi: F \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{F}$$

$$x + \sqrt{3}y \mapsto \varphi(x + \sqrt{3}y) = \Pi(x, y)$$

Méthode ①
 φ surjective de $F \setminus \{0\}$
 vers $G \setminus \{0\}$

soit $\Pi(x, y) \in G \setminus \{0\}$

cad $(x, y) \in \mathbb{Q}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

$\Pi q \exists a + \sqrt{3}b \in F \setminus \{0\}$ tq

$$\varphi(a + \sqrt{3}b) = \Pi(x, y)$$

$$\Rightarrow \Pi(a, b) = \Pi(x, y)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = x \in \mathbb{Q} \\ b = y \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

(33)

et puisque $(x, y) \neq (0, 0)$

donc $(a, b) \neq (0, 0)$ cad $(a, b) \in \mathbb{Q}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

et par suite $a + \sqrt{3}b \neq 0$

et $a + \sqrt{3}b \in F \setminus \{0\}$

d'où φ est surjective de $F \setminus \{0\}$ vers

$G \setminus \{0\}$

$$\text{donc } \varphi(F \setminus \{0\}) = G \setminus \{0\}$$

Méthode ②

$$\varphi(F \setminus \{0\}) = \{ \varphi(x + \sqrt{3}y) / x + y\sqrt{3} \neq 0 \text{ et } (x, y) \in \mathbb{Q}^2 \}$$

$$\varphi(F \setminus \{0\}) = \{ \Pi(x, y) / (x, y) \neq (0, 0) \text{ et } (x, y) \in \mathbb{Q}^2 \}$$

$$= \{ \Pi(x, y) / (x, y) \in \mathbb{Q}^2 \setminus \{(0, 0)\} \}$$

$$= G \setminus \{0\}$$

السلامة

(34)

b) φ est un morphisme de $(F, +, \cdot, x)$ vers (E, x)

$$\varphi((x + \sqrt{3}y) \times (x' + \sqrt{3}y')) =$$

$$= \varphi(xx' + 3yy' + \sqrt{3}(xy' + yx'))$$

$$= \varphi(xx' + 3yy' + \sqrt{3}(xy' + yx'))$$

$$= \varphi(x + \sqrt{3}y) \times \varphi(x' + \sqrt{3}y')$$

$$= \varphi(x + \sqrt{3}y) \times \varphi(x' + \sqrt{3}y')$$

d'où φ est un morphisme de $(F, +, \cdot, x)$ vers (E, x)

c) En de plus que $(G, +, 0, x)$ un groupe

on a: $F \setminus \{0\}$ est un sous groupe du groupe commutatif $(\mathbb{R}^*, x)$

d'où $(F \setminus \{0\}, x)$ est un groupe commutatif et φ est un morphisme de $(F \setminus \{0\}, x)$ vers (E, x)

alors $(\varphi(F \setminus \{0\}), x)$ est un groupe commutatif

et puisque $\varphi(F \setminus \{0\}) = G \setminus \{0\}$

(35)

alors $(G \setminus \{0\}, x)$ est un groupe commutatif

4) φ $(G, +, x)$ un corps commutatif

• $G \subset E$ et $G \neq \emptyset$ car $\varphi(0, 0) \in G$

• soient $\varphi(x, y)$ et $\varphi(x', y')$ de G avec $(x, x', y, y') \in \mathbb{Q}^4$

$$\varphi(x, y) - \varphi(x', y')$$

$$= \begin{pmatrix} x+y & y \\ 2y & x-y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x'+y' & y' \\ 2y' & x'-y' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x-x'+y-y' & y-y' \\ 2(y-y') & x-x'-(y-y') \end{pmatrix}$$

$$= \varphi(x-x', y-y') \in G$$

car $x-x' \in \mathbb{Q}$ et $y-y' \in \mathbb{Q}$

d'où G est un sous groupe du groupe commutatif $(E, +)$

et par suite $(G, +)$ est un gr. commutatif

et $(G \setminus \{0\}, x)$ est un groupe commutatif

• et puisque $(E, +, x)$ est un anneau

alors x est distributive par rapport à $+$ et au plus G est stable

(36)

ds (E, x) car $(G \setminus \{0\}, x)$ est un groupe
donc x est distributive par rapport à
+ dans G ,
donc $(G, +, x)$ est un corps commutatif

FIN CORRECTION

MATHS 2023, NORMAL 2SM

essalhy khammar

