

EXERCICE ① partie I:

$$f(x) = \ln(1-x)$$

$$I = D_f =]-\infty, 1[$$

1) a) $\forall q$ f est continue sur I
 $x \mapsto 1-x$ est continue et
strict-positif sur I
donc $x \mapsto \ln(1-x)$ est
continue sur I

b) $\forall q$ f est strict $\forall$ sur I
 f est dérivable sur I [car
 $x \mapsto 1-x$ est dérivable et strict
positive sur I et $x \mapsto \ln x$ est
dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$]

$$f'(x) = \frac{(1-x)'}{1-x} = \frac{-1}{1-x} = \frac{1}{x-1} < 0$$

car $x < 1$

donc f est strict $\forall$ sur I

$$c/. \lim_{u \rightarrow 1^-} \ln(1-u) = -\infty$$

$$\text{car } \lim_{u \rightarrow 1^-} (1-u) = 0^+$$

$$\bullet \lim_{u \rightarrow -\infty} f(u) = \lim_{u \rightarrow -\infty} \ln(1-u) = +\infty$$

$$\text{car } \lim_{u \rightarrow -\infty} 1-u = +\infty$$

$$\bullet \lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{f(u)}{u} = \lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1-u)}{1-u} \times \frac{1-u}{u}$$

$$= 0$$

$$\text{car } \lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1-u)}{1-u} = 0 \text{ et } \lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{1-u}{u} = -1$$

$$d/. \text{ puisque } \lim_{u \rightarrow 1^-} f(u) = -\infty$$

donc $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale

$$\text{puisque } \lim_{u \rightarrow -\infty} f(u) = +\infty \text{ et } \lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{f(u)}{u} = 0$$

donc $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabol.

de direction l'axe (Ou) ou $V(-\infty)$

e) Tableau

(7)

⑦

de dérivée

e) tableau de variation:

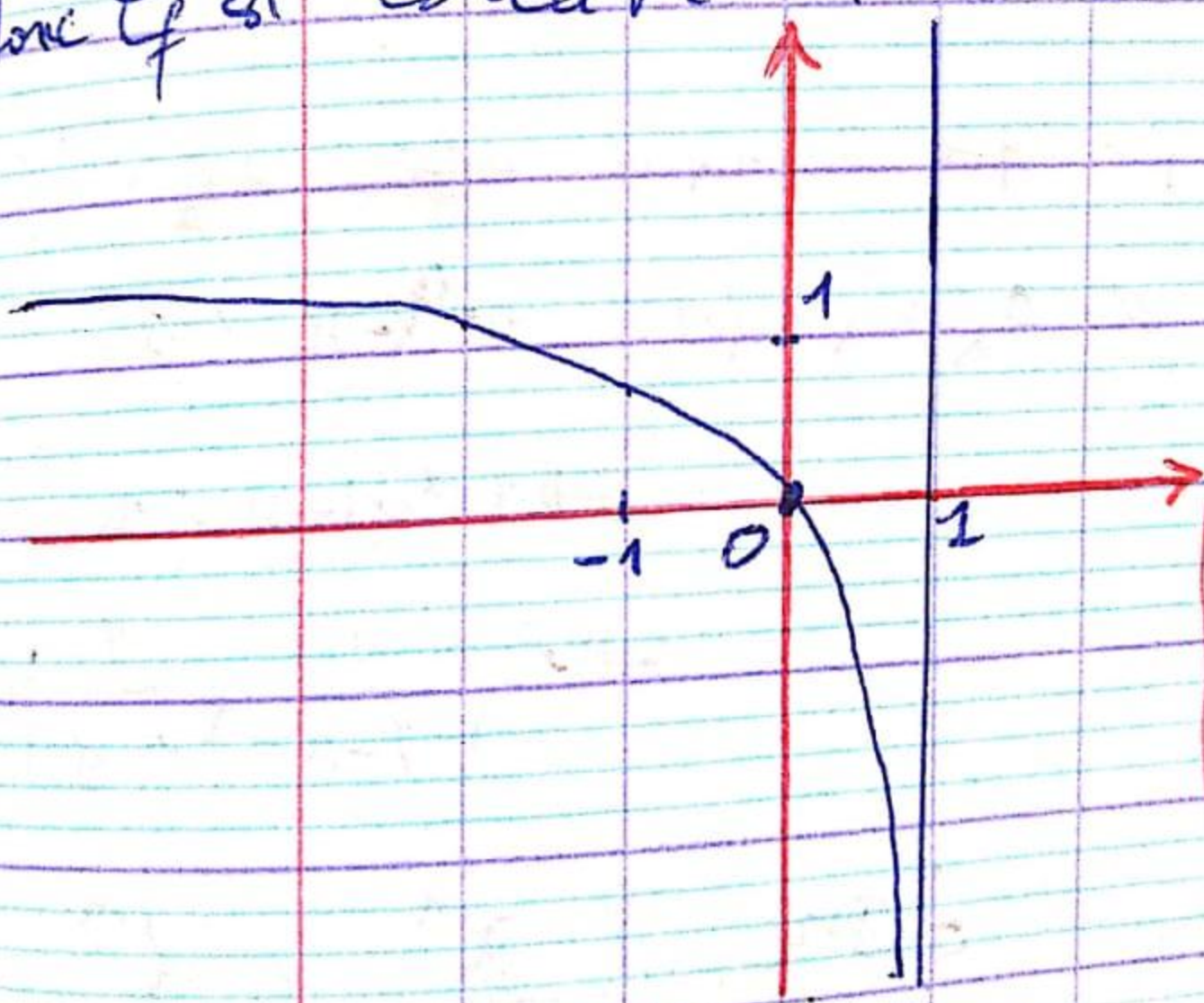
x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$		$-\infty$

2) a) f' est dérivable sur I

$$\text{et } f''(x) = \left(\frac{1}{x-1}\right)' = -\frac{1}{(x-1)^2} < 0$$

donc f est concave

b) f



Examen 2021 R
257

⑧

3) Mg f est bij de I vers $\mathbb{R}$
 f est continue sur I et strict $\nearrow$ sur I
 donc f est $\searrow$ bij de I vers $J = f(I)$
 $J = f(J - \infty, 1[) =] \lim_{u \rightarrow 1^-} f(u), \lim_{u \rightarrow -\infty} f(u) [$
 $=] -\infty, +\infty [= \mathbb{R}$

b) Expression de $f^{-1}(x)$:

$$\begin{cases} f^{-1}(x) = y \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(y) = x \\ y < 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \ln(1-y) = x$$

$$\Leftrightarrow 1-y = e^x$$

$$\Leftrightarrow y = 1 - e^x$$

$$\text{donc } f^{-1}(x) = 1 - e^x ; x \in \mathbb{R}$$

$$\text{c) on a: } f^{-1}(x) = 1 - e^x ; x \in \mathbb{R}$$

$$\text{donc } f^{-1}(-1) = 1 - e^{-1} \quad \textcircled{9}$$

(9)

partie II: $x \in \mathbb{R}$ $m \in \mathbb{N}$ et $m \geq 2$

$$P_m(x) = x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^m}{m}$$

1) $\forall m \geq 2 \quad \exists x_m \in]0; 1[\quad P_m(x_m) = 1$

P_m est une fct continue sur $[0, 1]$

car P_m est un poly

P_m est une fct dérivable sur $[0, 1]$

et $P'_m(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{m-1} > 0$

donc P_m est strict $\nearrow$ sur $[0, 1]$ si $x \in [0, 1]$

$P_m(0) = 0$ et $P_m(1) = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m}$

1 est compris strict entre $P_m(0)$ et $P_m(1)$

donc $\exists ! x_m$ tq $P_m(x_m) = 1$

d'après th des valeurs Interm
(T.V.I)

Examen 2021 R
25/11

(10)

2) Determinons $\alpha = x_2$

$$P_2(x_2) = 1 \Leftrightarrow x_2^2 + \frac{x_2^2}{2} = 1$$

$$\Leftrightarrow x_2^2 + 2x_2 - 2 = 0$$

$$\Delta = 4 + 8 = 12$$

$$x_2 = \frac{-2 - \sqrt{12}}{2}$$

$$= -\sqrt{3} - 1$$

$$x_2 = \frac{-2 + \sqrt{12}}{2}$$

$$= \sqrt{3} - 1$$

et $x_2 \in]0, 1[$

donc $\alpha = x_2 = \sqrt{3} - 1$

d'où $0 < \alpha < 1$

3/a) $\forall m \geq 2$ on a: $P_{m+1}(x_m) > 1$

$$P_{m+1}(x_m) = 1 + x_m + \frac{x_m^2}{2} + \dots + \frac{x_m^{m+1}}{m+1}$$

puisque $x_m > 0$ car $x_m \in]0, 1[$

donc $x_m + \frac{x_m^2}{2} + \dots + \frac{x_m^{m+1}}{m+1} > 0$

d'où $P_m(x_m) > 1$

(11)

b) $P_q(x_n)$ strict (11)

on a: $P_{m+1}(x_n) > 1$ et $P_{m+1}(x_{m+1}) \neq 1$

donc $P_{m+1}(x_n) > P_{m+1}(x_{m+1})$

et P_{m+1} est strict $\uparrow$ sur $[0, 1]$

donc $x_n > x_{m+1}$

d'où (x_n) est strict. $\downarrow$

c) (x_n) est $\downarrow$ strict donc $\forall n \geq 2$

$$x_n < x_2$$

et on sait que $\forall n \geq 2 \quad x_n > 0$

donc $\forall n \geq 2 \quad 0 < x_n < x_2$

d'où $\forall n \geq 2 \quad 0 < x_n < \alpha$

(12)

d) $f_q(x)$ CV
 (x) et Δ et minorée par 0
 donc (x) est CV

4) $\forall x \in I \quad \forall n \geq 2$

on pose $f_n(x) = f(x) + P_n(x)$

a) $\forall x \in I \quad \forall n \geq 2$

$$f'_n(x) = \frac{-x^n}{1-x}$$

f_n est dérivable sur I (comme somme)

$$f'_n(x) = f'(x) + P'_n(x)$$

$$= \frac{1}{x-1} + \underbrace{1 + x + \dots + x^{n-1}}_{\text{suite géom}} = \frac{1}{x-1} + 1 \times \frac{x^n - 1}{x-1}$$

$$= \frac{1 + x^n - 1}{x-1} = \frac{x^n}{x-1} = \frac{-x^n}{1-x}$$

$$b) \forall x \in]0, d[\quad \forall n \geq 2$$

$$|f'_n(x)| < \frac{\alpha^n}{1-d}$$

$$|f'_n(x)| = \left| \frac{-x^n}{1-x} \right| = \frac{x^n}{1-x}$$

car $0 < x < d < 1$

puisque $0 < x < d$ alors $0 < x^n < d^n$ ⊗

et $0 < x < d < 1 \Rightarrow 1-d < 1-x < 1$

$$\Rightarrow 1-d < 1-x < 1$$

$$\Rightarrow 1 < \frac{1}{1-x} < \frac{1}{1-d} \quad \text{⊗⊗}$$

donc $\frac{x^n}{1-x} < \frac{d^n}{1-d}$

d'où $|f'_n(x)| < \frac{\alpha^n}{1-d}$

c) Req $\forall x \in [0, d] \ (\forall n \geq 2)$

$$|b_n(x)| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}$$

soit $x \in [0, d]$

b_n est continue sur $[0, x]$

b_n est dérivable sur $]0, x[$

donc et $|b'_n(t)| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \quad \forall t \in]0, x[$

donc d'après l'inégalité

T.A.A :

$$|b_n(x) - b_n(0)| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} x |x-0|$$

et puisque $0 < x \leq d < 1$

$$\text{donc } |b_n(x)| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}$$

d) $\forall n \geq 2 \quad |f(x_n) + 1| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}$

d'après c): $|b_n(x)| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}, n \in [0, p]$

et puisque $x_n \in]0, \alpha[$

$$|b_n(x_n)| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}$$

$$|b_1(x_n) + \underbrace{p_n(x_n)}_1| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}$$

$$|f(x_n) + 1| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}$$

e) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$

d'après d) $\forall n \geq 2$

$$|f(x_n) + 1| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}$$

et $0 < \alpha < 1$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha^n}{1-\alpha} = 0$$

par suite $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = -1$

Examen 2021 R-ESP

(16)

et f est $\rightarrow$ bij de I ds $\mathbb{R}$

et f^{-1} est continue sur $\mathbb{R}$
en particulier en -1

$$\text{donc } \lim f^{-1}(f(x_n)) = f^{-1}(-1)$$

$$\text{d'où } \lim x_n = 1 - e^{-1}.$$

Examen 2021 Rattrapage

Arithmétique

EX(4)

$$a \in \mathbb{N} \quad a \geq 2$$

$$A = 1 + a + \dots + a^6$$

$$p \in \mathbb{P} \quad p \geq 3 \quad \text{et} \quad p \nmid A$$

$$A = 1 \times \frac{a^7 - 1}{a - 1}$$

1) a) Π_4 $a^7 \equiv 1 [p]$

on a: $A(p-1) = a^7 - 1$

et $p \nmid A$ ~~et~~ $A / a^7 - 1 \Rightarrow p \nmid a^7 - 1$

d'où $a^7 \equiv 1 [p]$

$\odot \Pi_4$ $a^{7n} \equiv 1 [p]$

on a: $a^7 \equiv 1 [p] \Rightarrow (a^7)^n \equiv 1^n [p]$

donc $a^{7n} \equiv 1 [p]$

(1)

b) $\forall q \quad a \wedge p = 1$

on a: $a^7 \equiv 1 [p]$

$\Rightarrow a \times a^{6-kp} = 1$

d'où d'après Bezout $a \wedge p = 1$

$\forall m \in \mathbb{N} \quad (a^{p-1})^m \equiv 1 [p]$

puisque $a \wedge p = 1$ et $p \in \mathbb{P}$

donc d'après Fermat: $a^{p-1} \equiv 1 [p]$

d'où $\forall m \in \mathbb{N} \quad (a^{p-1})^m \equiv 1 [p]$

Ca.) $\forall m \in \mathbb{N} \quad a^{(p-1)m} \equiv 1 [p]$

2) supposons qe $\nexists x_{p-1}$

a) $\forall q \quad a \equiv 1 [p]$

on a: 7 est premier et $\nexists x_{p-1}$

donc $7 \wedge (p-1) = 1$

(2)

donc d'après berzout
 $\exists (n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \text{ tq:}$

$$7m + (p-1)m = 1$$

si n et $m \in \mathbb{N}$ impossible

car $7 \geq 2$ et $(p-1) \geq 2$

si n et $m \in \mathbb{Z}^-$ impossible

$$\text{car } 7m + (p-1)m < 0$$

si $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{Z}^-$

$$7m = 1 - (p-1)m$$

ou

$$a^{7m} \equiv 1 [p] \text{ et } a^{(p-1)(-m)} \equiv 1 [p]$$
$$a^{(p-1)(-m) + 1} \equiv a [p]$$
$$a^{7m} \equiv a [p]$$

donc $a \equiv 1 [p]$

de même pour $n \in \mathbb{Z}^-$ et $m \in \mathbb{N}$

③

b) $\Pi q : p = 7$?

puisque $a \equiv 1 [p]$

alors $\oplus a^6 \equiv 1 [p]$
 $a^5 \equiv 1 [p]$

$\oplus \vdots$
 $a \equiv 1 [p]$

$\oplus 1 \equiv 1 [p]$

$A \equiv 7 [p]$

et on sait $p/A \Rightarrow A \equiv 0 [p]$

donc $7 \equiv 0 [p] \Rightarrow p/7$

et $p \geq 3$ donc $p = 7$

4

3) 19: si p premier > 3 tq p/A

alors $p = 7$ ou $p \equiv 1 [7]$

• si $7/p - 1 :$

alors $p - 1 \equiv 0 [7]$

donc $p \equiv 1 [7]$

• si $7 \nmid p - 1$

alors d'après 2 $p = 7$

d'où le résultat

END

(5)