Yassine Mghazli

التمرين الاول

الجزء الأول

$\mathbb{R}$ مزود بالقانون $*$ المعرف كما يلي : $\forall \in (x,y) \in \mathbb{R}^2; x*y = x+y-e^{xy}+1$

1) أ) لنبين أن القانون $*$ تبادلي.

$$\forall \in (x,y) \in \mathbb{R}^2; x*y = x+y-e^{xy}+1 = y+x-e^{yx}+1 = y*x$$

لدينا $\forall \in (x,y) \in \mathbb{R}^2; x*y = y*x$ إذن

القانون $*$ تبادلي

ب) لنبين أن القانون $*$ يقبل عنصرا محايدا نحدده.

ليكن y من $\mathbb{R}$

$$(\forall x \in \mathbb{R}; x*y = x) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}; x+y-e^{xy}+1 = x) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}; y+1 = e^{xy}) \Leftrightarrow (y=0)$$

و بما أن $*$ تبادلي فإن $\forall x \in \mathbb{R}; x*0 = 0*x = x$

0 هو العنصر المحايد للقانون $*$

2) لنبين أن القانون $*$ غير تجميعي

لدينا α و β حلين مختلفين للمعادلة $3+x-e^{2x}=0$ يعني $3+\alpha-e^{-2\alpha} = 3+\beta-e^{-2\beta} = 0$

يعني $\alpha*2 = \beta*2 = 0$ و منه $(\alpha*2)*\beta = 0*\beta = \beta$ و $\alpha*(2*\beta) = \alpha*0 = \alpha$

و بما أن $\alpha \neq \beta$ فإن $\alpha*(2*\beta) \neq (\alpha*2)*\beta$

نستنتج ان القانون $*$ غير تجميعي

الجزء الثاني

$F = \{M(x,y) / (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$ مع $M(x,y) = \begin{pmatrix} x & -2y \\ \frac{y}{2} & x \end{pmatrix}$

1) لنبين أن F فضاء متجهي جزئي للفضاء المتجهي الحقيقي $(M_2(\mathbb{R}),+,.)$

$F \subset M_2(\mathbb{R})$ (حسب تعريفه) و $F \neq \varnothing$ لأن $(I = M(1,0) \in F)$

$\forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ و $\forall (M(x,y), M(z,t)) \in F^2$

Yassine Mghazli

لدينا

$$\alpha M(x,y)+\beta M(z,t)=\begin{pmatrix}\alpha x & -2\alpha y\\ \frac{\alpha y}{2} & \alpha x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\beta z & -2\beta t\\ \frac{\beta t}{2} & \beta z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha x+\beta z & -2(\alpha y+\beta t)\\ \frac{\alpha y+\beta t}{2} & \alpha x+\beta z\end{pmatrix}=M(\alpha x+\beta z,\alpha y+\beta t)$$

إذن $\alpha M(x,y)+\beta M(z,t)\in F$ نستنتج أن :

$\boxed{F \text{ فضاء متجهي جزئي للفضاء المتجهي الحقيقي } (M_2(\mathbb{R}),+,.)}$

2) لنبين أن F جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}),\times)$

لدينا

$$\left(\forall (M(x,y),M(z,t))\in F^2\right);M(x,y)\times M(z,t)=\begin{pmatrix}x & -2y\\ \frac{y}{2} & x\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}z & -2t\\ \frac{t}{2} & z\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}xz-yt & -2(xt+yz)\\ \frac{yz+xt}{2} & -yt+xz\end{pmatrix}=M(xz-yt,xt+yz)\in F$$

$\boxed{\text{إذن } F \text{ جزء مستقر من } (M_2(\mathbb{R}),\times)}$

3) φ تطبيق من $\mathbb{C}^*$ نحو F بحيث :

أ) لنبين أن φ تشاكل من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو $(F,\times)$.

$$\left(\forall ((x,y),(z,t))\in\left(\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}\right)^2\right);\varphi((x+iy)\times(z+it))=\varphi(xz-yt+i(xt+yz))$$

$$=M(xz-yt,xt+yz)$$

$$=M(x,y)\times M(z,t)$$ (حسب السؤال 2))

$$=\varphi(x+iy)\times\varphi(z+it)$$

إذن $\boxed{\varphi \text{ تشاكل من } (\mathbb{C}^*,\times) \text{ نحو } (F,\times)}$

ب) نضع $F^*=F-\{M(0,0)\}$ لنبين أن $\varphi(\mathbb{C}^*)=F^*$

لدينا $\varphi(x+iy)=M(0,0)\Leftrightarrow M(x,y)=M(0,0)\Leftrightarrow (x,y)=(0,0)$

يعني $(x,y)\neq(0,0)\Leftrightarrow \varphi(x+iy)\neq M(0,0)$

يعني $z\in\mathbb{C}^*\Leftrightarrow \varphi(z)\in F^*$

و منه $\boxed{\varphi(\mathbb{C}^*)=F^*}$

ج) لنبين أن $(F^*,\times)$ زمرة تبادلية

لدينا $(\mathbb{C}^*,\times)$ زمرة تبادلية و φ تشاكل من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو $(F,\times)$. و $\varphi(\mathbb{C}^*)=F^*$

إذن $\boxed{(F^*,\times) \text{ زمرة تبادلية}}$

Yassine Mghazli

4) لنبين أن $(F,+,\times)$ جسم تبادلي

- بما أن F فضاء متجهي جزئي للفضاء المتجهي الحقيقي $(M_2(\mathbb{R}),+,.)$ فإن $(F,+)$ زمرة تبادلية.
- $(F^*,\times)$ زمرة تبادلية
- بما أن $\times$ توزيعي على $+$ في $M_2(\mathbb{R})$ و F جزء مستقر بالنسبة ل $\times$ و ل $+$ فإن $\times$ توزيعي على $+$ في F .

نستنتج أن $\boxed{(F,+,\times) \text{ جسم تبادلي}}$

التمرين الثاني

I - 1- $a\in\mathbb{Z}$. لنبين أن $a\wedge 13=1 \Rightarrow a^{2016}\equiv 1[13]$

العدد 13 أولي إذن حسب مبرهنة فرما الصغرى لدينا $a^{13}\equiv a[13]$ و بما ان $a\wedge 13=1$ فإن 13 لا يقسم a و منه $a^{12}\equiv 1[13]$

يستلزم $(a^{12})^{168}\equiv 1[13]$ و أخيرا نحصل على المطلوب $\boxed{a^{2016}\equiv 1[13]}$

2- نعتبر في $\mathbb{Z}$ المعادلة $(E): x^{2015}\equiv 2[13]$ وليكن x حلا للمعادلة (E) .

1) لنبين أن x و 13 أوليان في ما بينهما

بالخلف نفترض أن 13 يقسم x

$$\begin{cases} 13|x \\ x^{2015}\equiv 2[13] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 13|x^{2015} \\ x^{2015}\equiv 2[13] \end{cases} \Rightarrow 13|2$$

و هذا غير ممكن إذن الإفتراض خاطئ ومنه 13 لا يقسم x

نستنتج أن $\boxed{x \text{ و } 13 \text{ أوليان في ما بينهما}}$

2) لنبين أن $x\equiv 7[13]$

بما أن x و 13 أوليان في ما بينهما فإن حسب السؤال 1- لدينا $x^{2016}\equiv 1[13]$

و بما أن $x^{2015}\equiv 2[13]$ فإن $x^{2016}\equiv 2x[13]$

نستنتج أن $2x\equiv 1[13]$ ما يستلزم أن $14x\equiv 7[13]$ و حيث أن $14x\equiv x[13]$ فإن $x\equiv 7[13]$ و هذا هو المطلوب

$$\boxed{x\equiv 7[13]}$$

3) لنبين أن مجموعة حلول المعادلة (E) هي $S=\{7+13k \,/\, k\in\mathbb{Z}\}$

4) لدينا $x^{2015}\equiv 2[13]\Rightarrow x\equiv 7[13]$

لنبين أن $x\equiv 7[13]\Rightarrow x^{2015}\equiv 2[13]$

لدينا $x\equiv 7[13]\Rightarrow x^{2015}\equiv 7^{2015}[13](*)$

Yassine Mghazli

لنحدد باقي قسمة 7^n على 13

12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	n
1	2	4	8	3	6	12	11	9	5	10	باقي قسمة 7^n على 13

لدينا إذن $\begin{cases} 7^{12} \equiv 1[13] \\ 7^{11} \equiv 2[13] \end{cases} \Rightarrow 7^{12\times167+11} \equiv 2[13] \Rightarrow 7^{2015} \equiv 2[13]$

$(*)$ تصبح $x \equiv 7[13] \Rightarrow x^{2015} \equiv 2[13]$

لقد بينا أن المعادلة (E) تكافئ $x \equiv 7[13]$

و $x \equiv 7[13] \Leftrightarrow (x-7=13k; k\in\mathbb{Z}) \Leftrightarrow x \in S$

و بالتالي :

S هي مجموعة حلول المعادلة E

II - 1) ليكن n هو رقم الكرة المسحوبة

لدينا $\begin{cases} n \in S \\ n \in \{1,2,...,50\} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\exists k \in \mathbb{Z}; n = 7+13k) \\ n \in \{1,2,...,50\} \end{cases} \Leftrightarrow n \in \{7,20,33,46\}$

ومنه الاحتمال المطلوب هو $\frac{4}{50}$.

احتمال الحصول على كرة رقمها حلا للمعادلة (E) هو $\frac{2}{25}$

2) ليكن X المتغير العشوائي الحداني الذي وسيطاه $n=3$ و $p=\frac{2}{25}$

الاحتمال المطلوب هو $p(X=2)$.

$$p(X=2) = C_3^2 p^2 (1-p) = 3\times\frac{4}{625}\times\frac{23}{25} = \frac{276}{15625}$$

احتمال الحصول مرتين بالضبط على كرة رقمها حل للمعادلة (E) هو $\frac{276}{15625}$

التمرين الثالث

نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة $(E): z^2 - (1+i)z + 2 + 2i = 0$

1) أ) لنحسب Δ مميز المعادلة (E)

$$\Delta = (1+i)^2 - 4(2+2i) = 2i - 8 - 8i = 1 - 6i - 9 = (1-3i)^2$$

مميز المعادلة (E) هو $(1-3i)^2$

ب) تحديد حلي المعادلة (E)

لدينا $z_1 = \frac{1+i-1+3i}{2} = 2i$ و $z_2 = \frac{1+i+1-3i}{2} = 1-i$

Yassine Mghazli

$$\boxed{z_1 = 2i \quad \text{و} \quad z_2 = 1-i}$$

ج) لنبين أن $\frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

لدينا $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2i}{1-i} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

و منه

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}}$$

أ. لنحدد e لحق E منتصف القطعة $[AB]$

لدينا $e = \frac{z_1+z_2}{2} = \frac{1+i}{2}$ و منه

$$\boxed{e = \frac{1+i}{2}}$$

ب. r الدوران الذي مركزه A و قياس زاويته $\frac{-\pi}{2}$

$$r(E) = C \Leftrightarrow c - z_1 = e^{-i\frac{\pi}{2}}(e - z_1) \Leftrightarrow c = -i\left(\frac{1+i}{2} - 2i\right) + 2i \Leftrightarrow c = \frac{-1}{2}i + \frac{1}{2} - 2 + 2i \Leftrightarrow c = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$$

$$\boxed{c = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i}$$

ج) D النقطة ذات اللحق $d = 1 + \frac{3}{2}i$ لنبين أن العدد $\left(\frac{z_2 - d}{c - d}\right) \times \left(\frac{c - z_1}{z_2 - z_1}\right)$ حقيقي .

لدينا $\left(\frac{c - z_1}{z_2 - z_1}\right) = \frac{\frac{-3}{2} + \frac{3}{2}i - 2i}{1 - 3i} = \frac{1}{2}\frac{-3 - i}{i(-i+3)} = \frac{-1}{2}i$ و $\left(\frac{z_2 - d}{c - d}\right) = \frac{1 - i - 1 - \frac{3}{2}i}{-\frac{5}{2}} = i$

إذن $\left(\frac{z_2 - d}{c - d}\right) \times \left(\frac{c - z_1}{z_2 - z_1}\right) = i \times \frac{-i}{2} = \frac{1}{2}$

$$\boxed{\left(\frac{z_2 - d}{c - d}\right) \times \left(\frac{c - z_1}{z_2 - z_1}\right) = \frac{1}{2}}$$

التأويل الهندسي:

لدينا $\arg\left(\left(\frac{z_2 - d}{c - d}\right) \times \left(\frac{c - z_1}{z_2 - z_1}\right)\right) \equiv \arg\left(\frac{z_2 - d}{c - d}\right) + \arg\left(\frac{c - z_1}{z_2 - z_1}\right) [2\pi]$

Yassine Mghazli

و $\arg\left(\frac{z_2-d}{c-d}\right)+\arg\left(\frac{c-z_1}{z_2-z_1}\right)\equiv\overline{(DC,DB)}+\overline{(AB,AC)}[2\pi]$

و بما أن $\arg\left(\frac{1}{2}\right)\equiv 0[2\pi]$ فإن $\overline{(DC,DB)}+\overline{(AB,AC)}\equiv[2\pi]$

نستنتج أن $\overline{(DC,DB)}\equiv\overline{(AC,AB)}[2\pi]$

و حسب ما سبق $\left(\frac{z_2-d}{c-d}\right)=i$ و $\left(\frac{c-z_1}{z_2-z_1}\right)=-\frac{i}{2}$ إذن $\overline{(DC,DB)}\equiv\overline{(AC,AB)}\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

نستنتج أن

النقط A B C و D متداورة و تنتمي إلى الدائرة ذات القطر $[BC]$

التمرين الرابع

$$n\in\mathbb{N}^*;\forall x\in\mathbb{R};\ f_n(x)=\frac{1}{1+e^{-\frac{3}{2}(x-n)}}$$

1) أ) $\lim_{x\to+\infty}f_n(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+e^{-\frac{3}{2}(x-n)}}=1$ لأن $\lim_{x\to+\infty}e^{-\frac{3}{2}(x-n)}=0$ و منه ل (C_n) مقارب عند $+\infty$ معادلته $y=1$

و $\lim_{x\to-\infty}f_n(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{1+e^{-\frac{3}{2}(x-n)}}=0$ لأن $\lim_{x\to-\infty}e^{-\frac{3}{2}(x-n)}=+\infty$ و منه ل (C_n) مقارب عند $-\infty$ معادلته $y=0$

$\lim_{x\to+\infty}f_n(x)=1$ و $\lim_{x\to-\infty}f_n(x)=0$

ل (C_n) مقارب عند $+\infty$ معادلته $y=1$ و (C_n) مقارب عند $-\infty$ معادلته $y=0$

ب) لنبين أن f_n قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$

الدالة $x\to e^{-\frac{3}{2}(x-n)}$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ إذن الدالة $x\to 1+e^{-\frac{3}{2}(x-n)}$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$

و بما أن $\forall x\in\mathbb{R};1+e^{-\frac{3}{2}(x-n)}\neq 0$ فإن

الدالة f_n قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$

Yassine Mghazli

حساب $f_n'(x)$

$$\boxed{(\forall x\in\mathbb{R});\ f_n'(x)=\frac{3}{2}\frac{e^{-\frac{3}{2}(x-n)}}{\left(1+e^{-\frac{3}{2}(x-n)}\right)^2}}$$

ج) $(\forall x\in\mathbb{R});\ f_n'(x)>0$ إذن f_n تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$

2) أ) لنبين أن النقطة $I_n\left(n,\frac{1}{2}\right)$ مركز تماثل للمنحنى (C_n)

لدينا $\forall x\in\mathbb{R};2n-x\in\mathbb{R}$

و $$f_n(2n-x)=\frac{1}{1+e^{-\frac{3}{2}(2n-x-n)}}=\frac{1}{1+e^{-\frac{3}{2}(n-x)}}=\frac{e^{-\frac{3}{2}(x-n)}}{e^{-\frac{3}{2}(x-n)}+1}=1-\frac{1}{1+e^{-\frac{3}{2}(x-n)}}=1-f_n(x)$$

نستنتج أن النقطة $I_n\left(n,\frac{1}{2}\right)$ مركز تماثل للمنحنى (C_n)

ب) إنشاء (C_1)

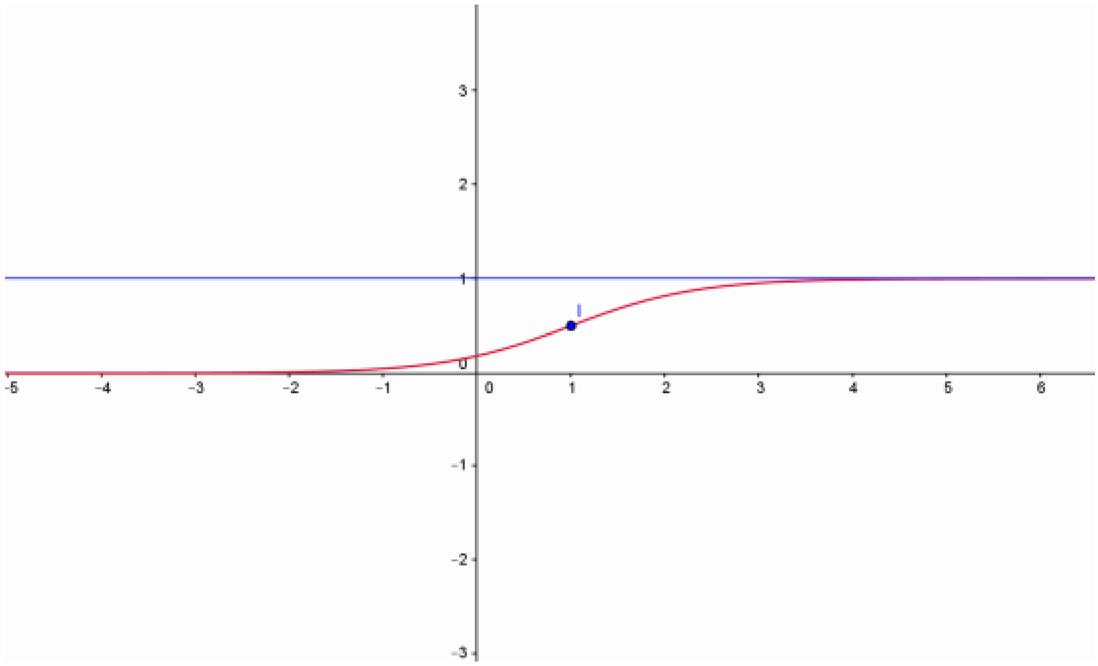
جدول تغيرات الدالة f_1

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f_1(x)$	$0 \nearrow 1$

www.9alami.info

Yassine Mghazli

مبيان f_1



ج) حساب مساحة الحيز المستوي المحصور بين المنحني (C_1) و المستقيمات التي معادلاتها على التوالي $x=0$ و $x=1$ و $y=0$

لدينا $$\int_0^1 f_1(x)dx=\int_0^1 \frac{1}{1+e^{-\frac{3}{2}(x-1)}}dx=\int_0^1 \frac{e^{\frac{3}{2}(x-1)}}{1+e^{\frac{3}{2}(x-1)}}dx=\left[\ln\left(1+e^{\frac{3}{2}(x-1)}\right)\right]_0^1=\ln 2-\ln\left(1+e^{-\frac{3}{2}}\right)=\ln\left(\frac{2}{1+e^{-\frac{3}{2}}}\right)$$

و منه $$\boxed{\text{المساحة المطلوبة هي } \|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\|\times\ln\left(\frac{2}{1+e^{-\frac{3}{2}}}\right)}$$

2) أ) $n\in\mathbb{N}^*$ لنبين أن المعادلة $f_n(x)=x$ تقبل حلا وحيدا u_n في المجال $]0,n[$

نضع $\varphi_n(x)=f_n(x)-x$

φ_n قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و $$(\forall x\in\mathbb{R});\varphi_n'(x)=\frac{3}{2}\frac{e^{-\frac{3}{2}(x-n)}}{\left(1+e^{-\frac{3}{2}(x-n)}\right)^2}-1=-\frac{2+e^{-\frac{3}{2}(x-n)}+2e^{-3(x-n)}}{2\left(1+e^{-\frac{3}{2}(x-n)}\right)^2}<0$$

φ_n متصلة و تناقصية فقطعا على $\mathbb{R}$ إذن φ_n تقابل من $\mathbb{R}$ نحو $\varphi_n(\mathbb{R})$

و $\varphi_n(\mathbb{R})=\left]\lim_{x\to+\infty}\varphi_n(x),\lim_{x\to-\infty}\varphi_n(x)\right[=]-\infty,+\infty[$

نستنتج أن المعادلة $\varphi_n(x)=0$ تقبل حلا وحيدا u_n و بما أن $\varphi_n(0)=f_n(0)>0$ و $\varphi_n(n)=f_n(n)-n=\frac{1}{2}-n<0$

Yassine Mghazli

فإن (حسب مبرهنة القيم الوسطية) $u_n \in]0,n[$

$$\boxed{(\forall n\in\mathbb{N}^*);\exists! u_n \in]0,n[\,/\, f_n(u_n)=u_n}$$

ب) لدينا :

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*)(\forall x\in\mathbb{R})\; f_{n+1}(x)-f_n(x)=\frac{1}{1+e^{-\frac{3}{2}(x-n-1)}}-\frac{1}{1+e^{-\frac{3}{2}(x-n)}}$$

$$=\frac{1+e^{-\frac{3}{2}(x-n)}-1-e^{-\frac{3}{2}(x-n-1)}}{\left(1+e^{-\frac{3}{2}(x-n)}\right)\left(1+e^{-\frac{3}{2}(x-n-1)}\right)}=\frac{e^{-\frac{3}{2}(x-n)}\left(1-e^{\frac{3}{2}}\right)}{\left(1+e^{-\frac{3}{2}(x-n)}\right)\left(1+e^{-\frac{3}{2}(x-n-1)}\right)}<0$$

إذن

$$\boxed{(\forall n\in\mathbb{N}^*)(\forall x\in\mathbb{R})\; f_{n+1}(x)<f_n(x)}$$

ج) لنبين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ تناقصية قطعا ثم لنستنتج أنها متقاربة

لدينا

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*)(\forall x\in\mathbb{R}) : \quad f_{n+1}(x)<f_n(x)\Rightarrow f_{n+1}(x)-x<f_n(x)-x$$

$$\Rightarrow \varphi_{n+1}(x)<\varphi_n(x)$$

$$\Rightarrow \varphi_{n+1}(u_{n+1})<\varphi_n(u_{n+1})$$

$$\Rightarrow \varphi_n(u_n)<\varphi_n(u_{n+1})$$

(لأن $\varphi_{n+1}(u_{n+1})=\varphi_n(u_n)=0$)

و بما أن الدالة φ_n تناقصية قطعا على $\mathbb{R}$ فإن $(\forall n\in\mathbb{N}^*);u_n>u_{n+1}$

نستنتج أن : المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ تناقصية قطعا

$\boxed{\text{المتتالية } (u_n)_{n\geq 1} \text{ تناقصية قطعا}}$

إستنتاج : بما أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ تناقصية قطعا و مصغورة ب 0 فإنها متقاربة

$\boxed{\text{المتتالية } (u_n)_{n\geq 1} \text{ متقاربة}}$

د) لنحسب نهاية المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$

المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متقاربة والدالة f_n متصلة على المجال $]0,n[$ و تحقق $f_n(]0,n[)=\left]f_n(0),\frac{1}{2}\right[\subset]0,n[$

إذن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ تقبل نهاية l تحقق $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(l)=l$ و لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(l)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{1+e^{-\frac{3}{2}(l-n)}}=0$ نستنتج أن $l=0$

Yassine Mghazli

$$\boxed{\lim u_n = 0}$$

التمرين الخامس

نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}^*$ ب $g(x)=\int_x^{3x}\frac{\cos t}{t}dt$

1) لنبين أن الدالة g زوجية

$$\forall x\in\mathbb{R}^*;-x\in\mathbb{R}^* \quad \text{و} \quad g(-x)=\int_{-x}^{-3x}\frac{\cos t}{t}dt\overset{t=-u}{=}\int_x^{3x}\frac{\cos(-u)}{-u}(-du)=\int_x^{3x}\frac{\cos u}{u}du=g(x)$$

نستنتج أن $\boxed{\text{الدالة } g \text{ زوجية}}$

2) الدالة $t\to\frac{\cos t}{t}$ متصلة على $]0,+\infty[$ إذن تقبل دالة أصلية φ على هذا المجال

لدينا $g(x)=\int_x^{3x}\frac{\cos t}{t}dt=\left[\varphi(t)\right]_x^{3x}=\varphi(3x)-\varphi(x)$

بما أن الدالة φ قابلة للإشتقاق (أصلية) على $]0,+\infty[$ فإن الدالة g قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و لدينا :

$$(\forall x>0);g'(x)=3\varphi'(3x)-\varphi'(x)=3\frac{\cos 3x}{3x}-\frac{\cos x}{x}=\frac{\cos 3x-\cos x}{x}$$

$$\boxed{(\forall x>0);g'(x)=\frac{\cos 3x-\cos x}{x}}$$

3) أ) لنتحقق من ان $\forall x>0;\int_x^{3x}\frac{\cos t}{t}dt=\frac{\sin 3x-3\sin x}{3x}+\int_x^{3x}\frac{\sin t}{t^2}dt$

لدينا $\forall x>0;\int_x^{3x}\frac{\cos t}{t}dt=\left[\frac{\sin t}{t}\right]_x^{3x}-\int_x^{3x}-\frac{\sin t}{t^2}dt=\frac{\sin 3x}{3x}-\frac{\sin x}{x}+\int_x^{3x}\frac{\sin t}{t^2}dt=\frac{\sin 3x-3\sin x}{3x}+\int_x^{3x}\frac{\sin t}{t^2}dt$

إذن

$$\boxed{\forall x>0;\int_x^{3x}\frac{\cos t}{t}dt=\frac{\sin 3x-3\sin x}{3x}+\int_x^{3x}\frac{\sin t}{t^2}dt}$$

ب) لنبين أن $(\forall x>0);|g(x)|<\frac{2}{x}$

لدينا $(\forall x>0);|g(x)|<\left|\int_x^{3x}\frac{\cos t}{t}dt\right|\leq\left|\frac{\sin 3x-3\sin x}{3x}\right|+\left|\int_x^{3x}\frac{\sin t}{t^2}dt\right|\leq\frac{4}{3x}+\int_x^{3x}\frac{1}{t^2}dt$

Yassine Mghazli

و لدينا $(\forall x>0); x\le t\le 3x \Rightarrow \frac{1}{3x}\le\frac{1}{t}\le\frac{1}{x}\Rightarrow\frac{1}{t^2}\le\frac{1}{x^2}\Rightarrow\int_x^{3x}\frac{1}{t^2}dt\le\int_x^{3x}\frac{1}{x^2}dt$

و $\int_x^{3x}\frac{1}{x^2}dt=\left[-\frac{1}{x}\right]_x^{3x}=\frac{-1}{3x}+\frac{1}{x}=\frac{2}{3x}$

نستنتج أن $(\forall x>0); |g(x)|<\frac{4}{3x}+\frac{2}{3x}$ و بالتالي :

$$\boxed{(\forall x>0); |g(x)|<\frac{2}{x}}$$

4) أ) لنبين أن $(\forall x>0); 0\le\int_x^{3x}\frac{\cos t-1}{t}dt\le 2x$

لدينا $(\forall t>0); 1-\cos t\le t\Rightarrow\frac{1-\cos t}{t}\le 1\Rightarrow\int_x^{3x}\frac{1-\cos t}{t}dt\le\int_x^{3x}dt$

و لدينا $\int_x^{3x}dt=2x$ نستنتج أن :

$$\boxed{(\forall x>0); 0\le\int_x^{3x}\frac{\cos t-1}{t}dt\le 2x}$$

ب) لنتحقق أن $(\forall x>0); g(x)-\ln 3=\int_x^{3x}\frac{\cos t-1}{t}dt$

لدينا $(\forall x>0); \int_x^{3x}\frac{\cos t-1}{t}dt=g(x)-\int_x^{3x}\frac{1}{t}dt=g(x)-[\ln t]_x^{3x}=g(x)-(\ln 3x-\ln x)=g(x)-\ln 3$

و منه

$$\boxed{(\forall x>0); \int_x^{3x}\frac{\cos t-1}{t}dt=g(x)-\ln 3}$$

ج) لدينا $(\forall x>0); 0\le\int_x^{3x}\frac{\cos t-1}{t}dt\le 2x$ إذن $\lim_{x\to 0^+}\int_x^{3x}\frac{\cos t-1}{t}dt=0$ و بما أن $(\forall x>0); g(x)-\ln 3=\int_x^{3x}\frac{\cos t-1}{t}dt$

فإن $\lim_{x\to 0^+}g(x)-\ln 3=0$ و بالتالي

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+}g(x)=\ln 3}$$

إنتهى