التمرين الاول (البنيات الجبرية)

1) أ) لدينا: $\left(\forall(x,y)\in\mathbb{Z}^2\right); x*y = x+y-2 = y+x-2 = y*x$

إذن $\left(\forall(x,y)\in\mathbb{Z}^2\right); x*y = y*x$

ومنه القانون * تبادلي.

و لدينا

$$\left(\forall(x,y,z)\in\mathbb{Z}^3\right); (x*y)*z = (x*y)+z-2 = x+y-2+z-2 = x+(y+z-2)-2 = x+(y*z)-2 = x*(y*z)$$

إذن $\left(\forall(x,y,z)\in\mathbb{Z}^3\right); (x*y)*z = x*(y*z)$

و منه القانون* تجميعي

خلاصة :

القانون * تبادلي.و تجميعي

ب) ليكن e من $\mathbb{Z}$ $\left(\forall x\in\mathbb{Z}\right); x*e = x \Leftrightarrow x+e-2 = x \Leftrightarrow e = 2$ و بما أن* تبادلي فإن

2 هو العنصر المحايد ل *

ج) ليكن x و y من $\mathbb{Z}$

$x*y = 2 \Leftrightarrow x+y-2 = 2 \Leftrightarrow y = 4-x$

إذن لكل x من $\mathbb{Z}$ مماثل بالنسبة ل* هو $4-x$

القانون * تبادلي.و تجميعي ويقبل عنصرا محايد هو2 و لكل x من $\mathbb{Z}$ مماثل بالنسبة ل* هو $4-x$
إذن

$(\mathbb{Z},*)$ زمرة تبادلية.

2) أ) لدينا $\left(\forall(x,y)\in\mathbb{Z}^2\right); f(x)\mathrm{T}f(y) = (x+2)(y+2)-2(x+2)-2(y+2)+6$

$$\begin{aligned}&= xy+2x+2y+4-2x-4-2y-4+6\\&= xy+2\\&= f(xy)\end{aligned}$$

إذن $\left(\forall(x,y)\in\mathbb{Z}^2\right); f(x\times y) = f(x)\mathrm{T}f(y)$

نستنتج أن f تشاكل من $(\mathbb{Z},\times)$ نحو $(\mathbb{Z},\mathrm{T})$

وبما أن لكل x من $\mathbb{Z}$ سابق و حيد ب f في $\mathbb{Z}$ هو$x-2$ فإن f تقابل من $\mathbb{Z}$ نحو $\mathbb{Z}$ و منه :

f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{Z},\times)$ نحو $(\mathbb{Z},\mathrm{T})$

ب) لدينا $\left(\forall(x,y,z)\in\mathbb{Z}^3\right); (x*y)\mathrm{T}z = (x+y-2)\mathrm{T}z$

$$\begin{aligned}&= (x+y-2)z-2(x+y-2)-2z+6\\&= (xz-2x-2z+6)+(yz-2y-2z+6)-2\\&= (x\mathrm{T}z)+(y\mathrm{T}z)-2\\&= (x\mathrm{T}z)*(y\mathrm{T}z)\end{aligned}$$

و منه

$\left(\forall(x,y,z)\in\mathbb{Z}^3\right); (x*y)\mathrm{T}z = (x\mathrm{T}z)*(y\mathrm{T}z)$

3) لدينا $\left(\forall(x,y)\in\mathbb{Z}^2\right); x\mathrm{T}y = y\mathrm{T}x$ إذن القانون T تبادلي.

وحسب السؤال 2) ب) نستنتج أن القانون T توزيعي على القانون *

بما أن f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{Z},\times)$ نحو $(\mathbb{Z},\mathrm{T})$ و $\times$ تجميعي في $\mathbb{Z}$ فإن T تجميعي في $\mathbb{Z}$
و بما أن $(\mathbb{Z},*)$ زمرة تبادلية و T تجميعي و تبادلي و توزيعي على القانون $*$ فإن $(\mathbb{Z},*,\mathrm{T})$ حلقة تبادلية

لنبين أن القانون T يقبل عنصرا محايدا e في $\mathbb{Z}$

$$(\forall x\in \mathbb{Z}),x\mathrm{T}e = x \Leftrightarrow xe-2x-2e+6 = x$$
$$\Leftrightarrow \forall x\in \mathbb{Z};x(e-3)=2(e-3)$$
$$\Leftrightarrow e=3$$

إذن $\forall x\in \mathbb{Z};x\mathrm{T}3=3\mathrm{T}x=x$ ومنه 3 هو العنصر المحايد للقانون T
نستنتج من كل ما سبق أن

$\boxed{(\mathbb{Z},*,\mathrm{T}) \text{ حلقة تبادلية و واحدية}}$

4) أ) لدينا

$$x\mathrm{T}y=2 \Leftrightarrow xy-2x-2y+6=2$$
$$\Leftrightarrow xy-2x-2y+4=0$$
$$\Leftrightarrow x(y-2)-2(y-2)=0$$
$$\Leftrightarrow (x-2)(y-2)=0$$
$$\Leftrightarrow x=2 \text{ أو } y=2$$

إذن

$\boxed{x\mathrm{T}y=2 \Leftrightarrow x=2 \text{ أو } y=2}$

ب) لدينا $x\mathrm{T}y=2 \Leftrightarrow x=2$ أو $y=2$ حيث 2 هو صفر الحلقة $(\mathbb{Z},*,\mathrm{T})$
إذن

$\boxed{(\mathbb{Z},*,\mathrm{T}) \text{ حلقة كاملة}}$

ج) لدينا $(\mathbb{Z},*,\mathrm{T})$ حلقة تبادلية و واحدية
و لدينا

$$(\forall x\in \mathbb{Z}/\{2\});x\mathrm{T}y=3 \Leftrightarrow xy-2x-2y+6=3$$
$$\Leftrightarrow y(x-2)=2x-3$$
$$\Leftrightarrow y=\frac{2x-3}{x-2}$$

من أجل $x=5$ نحصل على $y=\frac{7}{3}\notin \mathbb{Z}$
إذن 5 ليس له مقلوبا بالنسبة ل T
نستنتج أن

$\boxed{(\mathbb{Z},*,\mathrm{T}) \text{ ليس جسم}}$

التمرين الثاني

I

1) مميز المعادلة : $(E):2z^2-(3+i\sqrt{3})az+(1+i\sqrt{3})a^2=0$

لدينا $\Delta=(3+i\sqrt{3})^2a^2-8(1+i\sqrt{3})a^2=(9+6i\sqrt{3}-3-8(1+i\sqrt{3}))a^2=(-2-2i\sqrt{3})a^2=(-1+i\sqrt{3})^2a^2$

إذن

$$\boxed{\Delta=\left(-1+i\sqrt{3}\right)^2 a^2}$$

2) بما أن $a\in\mathbb{C}^*$ فإن ل (E) حلين مختلفين هما :

$$z_1=\frac{\left(3+i\sqrt{3}\right)a+\left(-1+i\sqrt{3}\right)a}{4}=\frac{a+ai\sqrt{3}}{2} \quad \text{و} \quad z_2=\frac{\left(3+i\sqrt{3}\right)a-\left(-1+i\sqrt{3}\right)a}{4}=a$$

ومنه مجموعة حلول (E) هي :

$$\boxed{S=\left\{a,\frac{a+ai\sqrt{3}}{2}\right\}}$$

II

1) لدينا

$$\frac{a}{b}=e^{i\frac{-\pi}{3}}\Rightarrow\begin{cases}\left|\dfrac{a}{b}\right|=1\\ \arg\left(\dfrac{a}{b}\right)\equiv\dfrac{-\pi}{3}[2\pi]\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{OA}{OB}=1\\ \left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)\equiv\dfrac{-\pi}{3}[2\pi]\end{cases}$$

إذن

$\boxed{\text{المثلث } OAB \text{ متساوي الأضلاع}}$

2) أ) لدينا r دوران مركزه M و زاويته $\dfrac{\pi}{3}$ إذن r^{-1} دوران مركزه M و زاويته $-\dfrac{\pi}{3}$

إذن

$$\begin{cases}B_1=r(B)\\ A_1=r^{-1}(A)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b_1-z=e^{i\frac{\pi}{3}}(b-z)\\ a_1-z=e^{-i\frac{\pi}{3}}(a-z)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a_1=z+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{i\sqrt{3}}{2}\right)(a-z)\\ b_1=z+\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{i\sqrt{3}}{2}\right)(b-z)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a_1=\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{i\sqrt{3}}{2}\right)a+z\left(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{i\sqrt{3}}{2}\right)\\ b_1=z\left(1-\dfrac{1}{2}-\dfrac{i\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2 a\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} a_1=\left(\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)a+z\left(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \\ b_1=z\left(\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)a \end{cases}$$

و منه

$$\boxed{\begin{array}{l} a_1=\left(\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)a+\left(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)z \\ b_1=\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)a+\left(\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)z \end{array}}$$

ب) لدينا $a_1+b_1=z$ إذن $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}=\overrightarrow{OM}$ و منه

$\boxed{\text{الرباعي } OA_1MB_1 \text{ متوازي أضلاع}}$

3) أ) لدينا
$$\begin{cases} a_1-z=\left(\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)a+\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)z \\ b_1-z=\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)a+\left(-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)z \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} z-a_1=e^{i\frac{-\pi}{3}}(z-a) \\ b_1-z=ae^{i\frac{2\pi}{3}}-e^{i\frac{\pi}{3}}z \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} a_1-z=e^{i\frac{2\pi}{3}}(z-a) \\ b_1-z=-e^{i\frac{\pi}{3}}\left(z-ae^{i\frac{\pi}{3}}\right) \end{cases}\Rightarrow\frac{z-b_1}{z-a_1}=-e^{i\frac{-\pi}{3}}\frac{\left(z-a\times\frac{b}{a}\right)}{z-a}$$

$$\Rightarrow\frac{z-b_1}{z-a_1}=-\frac{a}{b}\times\frac{(z-b)}{z-a}$$

و أخيرا

$$\boxed{\frac{z-b_1}{z-a_1}=-\frac{a}{b}\times\frac{z-b}{z-a}}$$

ب) المثلث OAB متساوي الأضلاع إذن النقط M وO وA وB غير مستقيمية .

ومنه النقط $\Leftrightarrow\frac{b-z}{a-z}\div\frac{b-0}{a-0}\in\mathbb{R}$ M وO و A وB متداورة

$$\Leftrightarrow \frac{b-z}{a-z}\times\frac{a}{b}\in\mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow -\frac{z-b_1}{z-a_1}\in\mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow$$ M و A_1 و B_1 مستقيمية

نستنتج أن

النقط M وO و A و B متداورة يكافئ M و A_1 و B_1 مستقيمية

التمرين الثالث (الحسابيات)

1) أ) لدينا $n>1$ و يحقق $(R): 3^n-2^n\equiv 0[n]$ و p أصغر قاسم أولي موجب ل n

إذن $\begin{cases} n\mid 3^n-2^n \\ p\mid n \end{cases}$ و منه $p\mid 3^n-2^n$ و بالتالي $3^n-2^n\equiv 0[p]$

لنبين أن $p\geq 5$

لدينا $\left(p=2\Rightarrow\begin{cases}2\mid 2^n\\ 2\mid 3^n-2^n\end{cases}\Rightarrow 2\mid 3^n\Rightarrow 2\mid 3\right)$ و $\left(p=3\Rightarrow\begin{cases}3\mid 2^n\\ 3\mid 3^n-2^n\end{cases}\Rightarrow 3\mid 2^n\Rightarrow 3\mid 2\right)$

و بما أن 2 لايقسم 3 و 3 لايقسم 2 فإن (الإستلزام المضاض للعكس) $p\neq 2$ و $p\neq 3$ نستنتج أن $p\geq 5$

ومنه

$3^n-2^n\equiv 0[p]$ و $p\geq 5$

ب) بما أن $p\geq 5$ فإن p لايقسم 2 و p لايقسم 3

إذن حسب مبرهنة فرما الصغرى

$2^{p-1}\equiv 1[p]$ و $3^{p-1}\equiv 1[p]$

ج) بما أن p أصغر قاسم أولي موجب ل n فإن جميع قواسم $p-1$ لا تقسم n باستثناء 1

نستنتج أن $(p-1)\wedge n=1$

إذن حسب مبرهنة بوزو يوجد (α,β) من $\mathbb{Z}^2$ بحيث $\alpha n+\beta(p-1)=1$

و بوضع $\alpha=a$ و $b=-\beta$ نحصل على المطلوب

$\exists(a,b)\in\mathbb{Z}^2; an-b(p-1)=1$

د) لدينا $\begin{cases} an-b(p-1)=1 \\ a=q(p-1)+r \end{cases}\Rightarrow 1+b(p-1)=nq(p-1)+nr\Rightarrow nr=1+(b-nq)(p-1)$

بوضع $k=b-nq$ نحصل على $nr=1+k(p-1)$ مع $k\in\mathbb{Z}$

بقي أن نبين أن $k\in\mathbb{N}$

يكفي أن نبين أن $r\geq 1$

حسب السؤال ج) لدينا $a\wedge(p-1)=1$ و بما أن $p-1\geq 4$ فإن $p-1$ لايقسم a ومنه $r\geq 1$

وبما أن $n>1$ فأن $nr>1$ و من $nr-1=k(p-1)$ نستنتج أن : $k\in\mathbb{N}$

خلاصة

يوجد عدد صحيح طبيعي k يحقق $nr=1+k(p-1)$

2) نفترض أنه يوجد $n>1$ و يحقق الخاصية (R)

لدينا حسب السؤال ب) $2^{p-1}\equiv 1[p]$ و $3^{p-1}\equiv 1[p]$ و لدينا $k\in\mathbb{N}$ إذن $2^{k(p-1)}\equiv 1[p]$ و $3^{k(p-1)}\equiv 1[p]$

و بما أن $nr-1=k(p-1)$ فإن $2^{nr-1}\equiv 1[p]$ و$3^{nr-1}\equiv 1[p]$ و منه $3^{nr}\equiv 3[p]$ و $2^{nr}\equiv 2[p]$

نستنتج أن $3^{nr}-2^{nr}\equiv 1[p]$ (1)

و حسب السؤال 1) أ) $3^n-2^n\equiv 0[p]$

يعني أن $3^n\equiv 2^n[p]$ أي أن $3^{nr}\equiv 2^{nr}[p]$ ما يعني أن $3^{nr}-2^{nr}\equiv 0[p]$ (2)

من (1) و(2) نستنتج أن $1\equiv 0[p]$ أي أن p يقسم 1 ز هذا تناقض

إذن الإفتراض الأول خاطئ

خلاصة:

لا يوجد عدد صحيح طبيعي n أكبر قطعا من 1 و يحقق الخاصية (R)

المسألة

الجزء الأول

1) أ) لدينا $h(1)=1=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{1}{x}\frac{1}{\frac{\ln x}{x-1}}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x-1}{x\ln x}=\lim\limits_{x\to 1^+}h(x)$ (لأن $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=1$)

نستنتج أن

h متصلة على يمين 1

ب) لدينا $(\forall t\geq x>1);\frac{1}{t}<1\Rightarrow\int_1^x\frac{1}{t}dt<\int_1^x 1dt\Rightarrow \ln x<x-1$

إذن

$(\forall x>1);\ln x<x-1$

لدينا $(\forall x>1);h'(x)=\frac{x\ln x-(x-1)(\ln x+1)}{(x\ln x)^2}=\frac{\ln x-(x-1)}{(x\ln x)^2}$

و بما أن $(\forall x>1);\ln x<x-1$ فإن $(\forall x>1);h'(x)<0$

إذن

h تناقصية قطعا على $]1,+\infty[$

2) أ) $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x\ln x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x} = 0$ (لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} h(x) = 0}$$

جدول تغيرات h

x	1		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	
$h(x)$	1	$\searrow$	0

ب) بما أن h متصلة و تناقصية قطعا على $[1,+\infty[$ فإن $h([1,+\infty[) = \left]\lim\limits_{x\to+\infty} h(x);h(1)\right] =]0,1]$

ومنه $\forall x \geq 1; h(x) \in]0,1]$

نستنتج أن

$$\boxed{\forall x \geq 1; 0<h(x) \leq 1}$$

الجزء الثاني

1) أ) لدينا $(\forall x>1); \int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln t}dt = \left[\ln|\ln t|\right]_x^{x^2} = \ln|\ln x^2| - \ln|\ln x| = \ln\left|\frac{2\ln x}{\ln x}\right| = \ln 2$

إذن

$$\boxed{\forall x>1; \int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln t}dt = \ln 2}$$

ب) لدينا

$$(\forall x>1); g(x) - g(2) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t}\ln t}dt - \ln 2 = \int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t}\ln t}dt - \int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln t}dt = \int_x^{x^2}\left(\frac{1}{\sqrt{t}\ln t} - \frac{1}{t\ln t}\right)dt = \int_x^{x^2} \frac{\sqrt{t}-1}{t\ln t}dt$$

إذن

$$\boxed{(\forall x>1); g(x) - g(2) = \int_x^{x^2} \frac{\sqrt{t}-1}{t\ln t}dt}$$

ج) باستعمال مكاملة بتغيير المتغير و بوضع $\sqrt{t} = \alpha$ نحصل على

$$\begin{cases} t = x \Rightarrow \alpha = \sqrt{t} = \sqrt{x} \\ t = x^2 \Rightarrow \alpha = \sqrt{t} = x \\ \frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}} \Rightarrow dt = 2\sqrt{t}\,d\alpha \end{cases}$$

ومنه $(\forall x>1);\ g(x)-g(2)=\int_{x}^{x^2}\frac{\sqrt{t}-1}{t\ln t}dt=\int_{\sqrt{x}}^{x}\frac{\alpha-1}{\alpha^2\ln\alpha^2}2\alpha d\alpha=\int_{\sqrt{x}}^{x}\frac{\alpha-1}{\alpha\ln\alpha}d\alpha=\int_{\sqrt{x}}^{x}\frac{t-1}{t\ln t}dt$

نستنتج أن

$$\boxed{(\forall x>1);\ g(x)-g(2)=\int_{\sqrt{x}}^{x}\frac{t-1}{t\ln t}dt}$$

2) أ) لدينا $\forall x>1; \sqrt{x}\le t\le x$

h تناقصية قطعا على $]1,+\infty[$ و $\forall x>1, \left[\sqrt{x},x\right]\subset]1,+\infty[$ إذن h تناقصية قطعا على $\left[\sqrt{x},x\right]$

و منه $\forall x>1; \sqrt{x}\le t\le x \Rightarrow h(x)\le h(t)\le h\left(\sqrt{x}\right)\overset{(x>\sqrt{x})}{\Rightarrow}\int_{\sqrt{x}}^{x}h(x)dt\le\int_{\sqrt{x}}^{x}h(t)dt\le\int_{\sqrt{x}}^{x}h\left(\sqrt{x}\right)dt$

$$\Rightarrow \left(x-\sqrt{x}\right)h(x)\le g(x)-\ln 2\le\left(x-\sqrt{x}\right)h\left(\sqrt{x}\right)$$

و بالتالي

$$\boxed{(\forall x>1);\left(x-\sqrt{x}\right)h(x)\le g(x)-\ln 2\le\left(x-\sqrt{x}\right)h\left(\sqrt{x}\right)}$$

ب) لدينا حسب 2) أ) من الجزء الثاني $(\forall x>1);\frac{\left(x-\sqrt{x}\right)h(x)}{x-1}\le\frac{g(x)-\ln 2}{x-1}\le\frac{\left(x-\sqrt{x}\right)h\left(\sqrt{x}\right)}{x-1}$

و بعد إختزال $\sqrt{x}-1$ نحصل على $(\forall x>1);\frac{\sqrt{x}h(x)}{\sqrt{x}+1}\le\frac{g(x)-\ln 2}{x-1}\le\frac{\sqrt{x}h\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}+1}$

و بما أن $\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt{x}h(x)}{\sqrt{x}+1}=\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt{x}h\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2}$ فإن $\lim_{x\to1^+}\frac{g(x)-\ln 2}{x-1}=\frac{1}{2}$

نستنتج أن

g قابلة للإشتقاق غلى يمين 1 و أن $g'_d(1)=\frac{1}{2}$

ج) لدينا $(\forall x>1);\left(x-\sqrt{x}\right)h(x)\le g(x)-\ln 2$

يستلزم $(\forall x>1);\left(x-\sqrt{x}\right)\frac{x-1}{x\ln x}+\ln 2\le g(x)$

و لدينا $\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x}\right)\frac{x-1}{x\ln x}+\ln 2=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\ln x}\left(\sqrt{x}-1\right)\frac{x-1}{x}+\ln 2=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{2\ln\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-1\right)\left(1-\frac{1}{x}\right)+\ln 2=+\infty$

إذن حسب خاصيات النهايات و الترتيب نستنتج أن

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}g(x)=+\infty}$$

كما لدينا $(\forall x>1);\frac{\left(x-\sqrt{x}\right)h(x)+\ln 2}{x}\leq\frac{g(x)}{x}\leq\frac{\left(x-\sqrt{x}\right)h\left(\sqrt{x}\right)+\ln 2}{x}$

و بما أن $\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x}\right)h(x)+\ln 2}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x}\right)\frac{x-1}{x\ln x}+\ln 2}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{\sqrt{x}\ln x}\right)\left(1-\frac{1}{x}\right)+\frac{\ln 2}{x}=0$

و $\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x}\right)h\left(\sqrt{x}\right)+\ln 2}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x}\right)\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}\ln\sqrt{x}}+\ln 2}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{x\ln\sqrt{x}}+\frac{\ln 2}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2}{\ln\sqrt{x}}+\frac{\ln 2}{x}=0$

فإن حسب خاصيات النهايات و الترتيب نستنتج أن

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=0}$$

3) أ) الدالة $t\to\frac{1}{\sqrt{t}\ln t}$ متصلة على المجال $]1,+\infty[$ إذن تقبل دالة أصلية φ على هذا المجال

نستنتج أن $\forall x>1; g(x)=\varphi\left(x^2\right)-\varphi(x)$

بما أن φ قابلة للإشتقاق على المجال $]1,+\infty[$ فإن g قابلة للإشتقاق على المجال $]1,+\infty[$ كمركب دوال قابلة للإشتقاق

و لدينا $(\forall x>1); g'(x)=2x\varphi'\left(x^2\right)-\varphi'(x)=2x\frac{1}{x\ln x^2}-\frac{1}{\sqrt{x}\ln x}=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}\ln x}=\frac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}\ln\sqrt{x}}=\frac{1}{2}h\left(\sqrt{x}\right)$

و منه

$$\boxed{\forall x>1; g'(x)=\frac{1}{2}h\left(\sqrt{x}\right)}$$

ب) لدينا: $(\forall x\geq 1);1\leq\sqrt{x}\leq x\overset{h\searrow}{\Rightarrow}h(x)\leq h\left(\sqrt{x}\right)\leq h(1)\overset{(h(x)>0)}{\Rightarrow}\frac{1}{2}h(x)\leq\frac{1}{2}h\left(\sqrt{x}\right)\leq\frac{h(1)}{2}\Rightarrow 0<g'(x)\leq\frac{1}{2}$

إذن

$$\boxed{\forall x\geq 1;0<g'(x)\leq\frac{1}{2}}$$

و منه جدول تغيرات الدالة g

x	1		$+\infty$
$g'(x)$		+	
$g(x)$	$\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

ج) منحنى الدالة g

الجزء الثالث

I 1) الدالة قابلة للإشتقاق على $[1,+\infty[$ و $\left(\forall x\in[1,+\infty[\right);k'(x)=g'(x)-1$

و لدينا $\forall x\in[1,+\infty[;-1<g'(x)-1\leq -\frac{1}{2}\Rightarrow \forall x\in[1,+\infty[;-1<k'(x)\leq -\frac{1}{2}$

نستنتج أن $\forall x\in[1,+\infty[;k'(x)<0$ ومنه k تناقصية قطعا على $[1,+\infty[$

و بما أنها متصلة عليه فإنها تقابل من $[1,+\infty[$ نحو $k\left([1,+\infty[\right)$ مع $k\left([1,+\infty[\right)=\left]\lim\limits_{x\to+\infty}k(x),k(1)\right]$

$\lim\limits_{x\to+\infty}k(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)-x+1=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\frac{g(x)}{x}-1\right)=-\infty$ (لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=0$) و $k(1)=\ln 2$

نستنتج أن $k\left([1,+\infty[\right)=]-\infty,\ln 2]$

و منه

$$\boxed{k \text{ تقابل من } [1,+\infty[\text{ نحو }]-\infty,\ln 2]}$$

2) بما أن $0\in]-\infty,\ln 2]$ فإن ل 0 سابق وحيد α بالدالة k من المجال $]1,+\infty[$

إذن $k(\alpha)=0$ ومنه $g(\alpha)-\alpha+1=0$

نستنتج أ نه

$$\boxed{\exists!\alpha\in]1,+\infty[/1+g(\alpha)=\alpha}$$

II 1) أ) برهان بالترجع

لدينا $1\leq u_0<\alpha$

ليكن n من $\mathbb{N}$

نفترض أن $1\leq u_n<\alpha$.

لدينا
$$\begin{aligned}1\leq u_n<\alpha &\overset{(g\nearrow)}{\Rightarrow} g(1)\leq g(u_n)<g(\alpha)\\ &\Rightarrow \ln 2\leq u_{n+1}\text{-}1<\alpha\text{-}1\\ &\Rightarrow \ln 2+1\leq u_{n+1}<\alpha\\ &\Rightarrow 1\leq u_{n+1}<\alpha\end{aligned}$$

إذن حسب مبدأ الترجع

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N};1\leq u_n<\alpha}$$

ب) لدينا $(\forall n\in\mathbb{N});u_{n+1}-u_n=1+g(u_n)-u_n=k(u_n)$

كما لدينا $(\forall n\in\mathbb{N});u_n<\alpha\overset{(k\searrow)}{\Rightarrow}k(u_n)>k(\alpha)$

وبما أن $k(\alpha)=g(\alpha)-\alpha+1=0$

نستنتج أن $\forall n\in\mathbb{N};u_{n+1}-u_n>0$

و منه

$\boxed{(u_n) \text{ متتالية تزايدية قطعا}}$

ج) (u_n) متتالية تزايدية قطعا و مكبورة ب α إذن فهي متقاربة و لتكن l نهايتها

لدينا $\forall n\in\mathbb{N};1\leq u_n<\alpha \Rightarrow l\geq 1$ و بما أن g متصلة على $[1,+\infty[$ فإن g متصلة عند l

إذن $(\forall n\in\mathbb{N});u_{n+1}=1+g(u_n)\Rightarrow l=1+g(l)\Rightarrow k(l)=0\Rightarrow l=\alpha$

و بالتالي

$\boxed{\lim u_n=\alpha}$

2) أ) لدينا $\forall n\in\mathbb{N};[u_n,\alpha]\subset[1,+\infty[$

إذن g متصلة على $[u_n,\alpha]$ و قابلة للإشتقاق على $]u_n,\alpha[$ و منه حسب مبرهنة التزايدات المنتهية لدينا

$$\exists c\in\,]u_n,\alpha[;\frac{g(u_n)-g(\alpha)}{u_n-\alpha}=g'(c)$$

و بما أن لكل n من $\mathbb{N}$ لدينا: $1\leq u_n<c<\alpha\Rightarrow c>1\Rightarrow 0<g'(c)\leq\frac{1}{2}\Rightarrow|g'(c)|\leq\frac{1}{2}$

فإن $\forall n\in\mathbb{N};\left|\frac{g(u_n)-g(\alpha)}{u_n-\alpha}\right|=|g'(c)|\leq\frac{1}{2}$ ما يستلزم أن $|g(u_n)-g(\alpha)|\leq\frac{1}{2}|u_n-\alpha|$

و بما أن $(\forall n\in\mathbb{N});g(u_n)-g(\alpha)=u_{n+1}+1-\alpha+1=u_{n+1}-\alpha$

فإن

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N};\quad |u_{n+1}-\alpha|\leq\frac{1}{2}|u_n-\alpha|}$$

ب) برهان بالترجع

من أجل $n=0$ العلاقة تكتب $|u_0-\alpha|\leq|u_0-\alpha|$ وهذا صحيح

ليكن n من $\mathbb{N}$ نفترض أن $|u_n-\alpha|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n|u_0-\alpha|$ و نبين أن $|u_{n+1}-\alpha|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}|u_0-\alpha|$

لدينا $(\forall n\in\mathbb{N});\ |u_{n+1}-\alpha|\leq\frac{1}{2}|u_n-\alpha|\leq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n|u_0-\alpha|\Rightarrow|u_{n+1}-\alpha|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}|u_0-\alpha|$

وبالتالي و حسب مبدأ الترجع

$$\boxed{\forall n\geq 0;|u_n-\alpha|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n|u_0-\alpha|}$$

ج) بما أن $\lim\left(\frac{1}{2}\right)^n|u_0-\alpha|=0$ فإن $\lim|u_n-\alpha|=0$

نستنتج أن

$\boxed{\lim u_n=\alpha}$

إنتهى