تصحيح التمرين الأول

.1

✓ لدينا : $E \subset M_2\ \mathbb{R}$

و $E \neq \varnothing$ $\left(I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in E \right)$ لأن $\left(I = M\ 1,0 \right)$

لتكن $M\ x,y$ و $M\ a,b$ من E و ليكن α و β من $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \alpha M\ a,b + \beta M\ x,y &= \alpha \begin{pmatrix} a & -3b \\ b & a \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} x & -3y \\ y & x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha a + \beta x & -3\ \alpha b + \beta y \\ \alpha b + \beta y & \alpha a + \beta x \end{pmatrix} \\ &= M\ \alpha a + \beta x, \alpha b + \beta y\ \in E \end{aligned}$$

$$\alpha a + \beta x, \alpha b + \beta y\ \in \mathbb{R}^2$$

إذن : E فضاء متجهي جزئي من $M_2\ \mathbb{R}\ ,+,\cdot$

✓

- لتكن $M\ x,y$ من E

$$\begin{aligned} M\ x,y &= \begin{pmatrix} x & -3y \\ y & x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -3y \\ y & 0 \end{pmatrix} \\ &= x.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y.\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= x.I + y.J \end{aligned}$$

إذن I,J أسرة مولدة للفضاء E

- ليكن α و β من $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \alpha.I + \beta.J = O &\Rightarrow M\ \alpha,\beta\ = O \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha & -3\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

إذن I,J أسرة حرة للفضاء E

وبالتالي (I,J) أساس للفضاء E

و منه $\dim E = card(I,J) = 2$

2. أ) لنبين أن E جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}),\times)$

لدينا : $E \neq \varnothing$ و $E \subset M_2(\mathbb{R})$

لتكن $M(x,y)$ و $M(a,b)$ من E

$$\begin{aligned} M(a,b)\times M(x,y) &= \begin{pmatrix} a & -3b \\ b & a \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} x & -3y \\ y & x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ax-3by & -3ay-3bx \\ bx+ay & -3by+ax \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ax-3by & -3(ay+bx) \\ ay+bx & ax-3by \end{pmatrix} \\ &= M(ax-3by, ay+bx) \in E \end{aligned}$$

$(ax-3by, ay+bx) \in \mathbb{R}^2$

إذن E جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}),\times)$

ب) لنبين أن $(E,-,\times)$ حلقة واحدية و تبادلية

❖

✓ $(E,+)$ زمرة تبادلية (لأن $(\mathrm{E},+,\cdot)$ فضاء متجهي)

✓ بما أن E جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}),\times)$ و $\times$ تجميعي و توزيعي بالنسبة ل $+$ في $M_2(\mathbb{R})$

فإن $\times$ تجميعي و توزيعي بالنسبة ل $+$ في E

إذن $(E,+,\times)$ حلقة

❖

✓ $I = M(1,0)$ هو العنصر المحايد بالنسبة ل $\times$

إذن $(E,+,\times)$ حلقة واحدية

❖

✓ $\times$ تبادلي في E

لتكن $M(x,y)$ و $M(a,b)$ من E

لدينا : $M(a,b)\times M(x,y) = M(ax-3by, ay+bx)$

و : $M(x,y)\times M(a,b) = M(xa-3yb, xb+ya)$

إذن لكل $M(x,y)$ و $M(a,b)$ من E : $M(a,b)\times M(x,y) = M(x,y)\times M(a,b)$

و بالتالي : $(E,+,\times)$ حلقة واحدية و تبادلية

.3 أ)

❖ ليكن (a,b) و (x,y) من $\mathbb{R}^2$

✓ $$\varphi\left((a+ib)\times(x+iy)\right)=\varphi\left((ax-by)+i(ay+bx)\right)=M\left(ax-by,\frac{ay+bx}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\begin{aligned}\varphi(a+ib)\times\varphi(x+iy) &= M\left(a,\frac{b}{\sqrt{3}}\right)\times M\left(x,\frac{y}{\sqrt{3}}\right)\\ &= M\left(ax-3\times\frac{b}{\sqrt{3}}\times\frac{y}{\sqrt{3}},a\times\frac{y}{\sqrt{3}}+\frac{b}{\sqrt{3}}\times x\right)\\ &= M\left(ax-by,\frac{ay+bx}{\sqrt{3}}\right)\end{aligned}$$ ✓

إذن φ تشاكل من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو $(E^*,\times)$

❖ ليكن $M(a,b)$ من E^*

لنحل المعادلة : $\varphi(x+iy)=M(a,b)$

$$\begin{aligned}\varphi(x+iy)=M(a,b) &\Leftrightarrow M\left(x,\frac{y}{\sqrt{3}}\right)=M(a,b)\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}x=a\\ \dfrac{y}{\sqrt{3}}=b\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}x=a\\ y=b\sqrt{3}\end{cases}\end{aligned}$$

إذن لكل $M(a,b)$ من E^* يوجد زوج وحيد $(x,y)=(a,b\sqrt{3})$ من $\mathbb{R}^2$ بحيث :

$$\varphi(x+iy)=M(a,b)$$

و منه φ تقابل من $\mathbb{C}^*$ نحو E^*

و بالتالي : φ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو $(E^*,\times)$

ب) بما أن φ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو $(E^*,\times)$ و $(\mathbb{C}^*,\times)$ زمرة تبادلية فإن $(E^*,\times)$ زمرة تبادلية

ج)

✓

$$
\begin{aligned}
J^{2017} &= \quad M\ \ 0,1\ \ ^{2017} \\
&= \left(M\left(0,\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)\right)^{2017} \\
&= \quad \varphi\ \ 0+i\sqrt{3}\ \ ^{2017} \\
&= \quad \varphi\ \ i\sqrt{3}\ \ ^{2017} \\
&= \quad \varphi\ \ \sqrt{3}^{2017}\times i \\
&= \quad \varphi\ \ \sqrt{3}^{2016}\sqrt{3}\times i \\
&= \quad \varphi\ \ 3^{1008}\sqrt{3}\times i
\end{aligned}
$$

✓

$$
\begin{aligned}
J^{2017\ \ -1} &= \quad \varphi\ \ 3^{1008}\sqrt{3}\times i\ \ ^{1} \\
&= \quad \varphi\ \ 3^{1008}\sqrt{3}\times i\ \ ^{-1} \\
&= \quad \varphi\left(\frac{1}{3^{1008}\sqrt{3}\times i}\right) \\
&= \quad \varphi\left(\frac{-i}{3^{1008}\sqrt{3}}\right) \\
&= \varphi\left(\ 0\ +i\left(\frac{-1}{3^{1008}\sqrt{3}}\right)\right) \\
&= \quad M\left(0,\frac{-\sqrt{3}}{3^{1008}\times\sqrt{3}}\right) \\
&= \quad M\left(0,\frac{-1}{3^{1008}}\right)
\end{aligned}
$$

.4

- ✓ لدينا $E,+,\times$ حلقة واحدية و تبادلية
- ✓ إذن يكفي أن نبين أن كل عنصر $M\ \ x,y$ من E^* يقبل مقلوبا
  ليكن $M\ \ x,y$ من E بحيث : $M\ \ x,y \neq M\ \ 0,0$

لدينا $M(x,y)=\begin{pmatrix} x & -3y \\ y & x \end{pmatrix}$

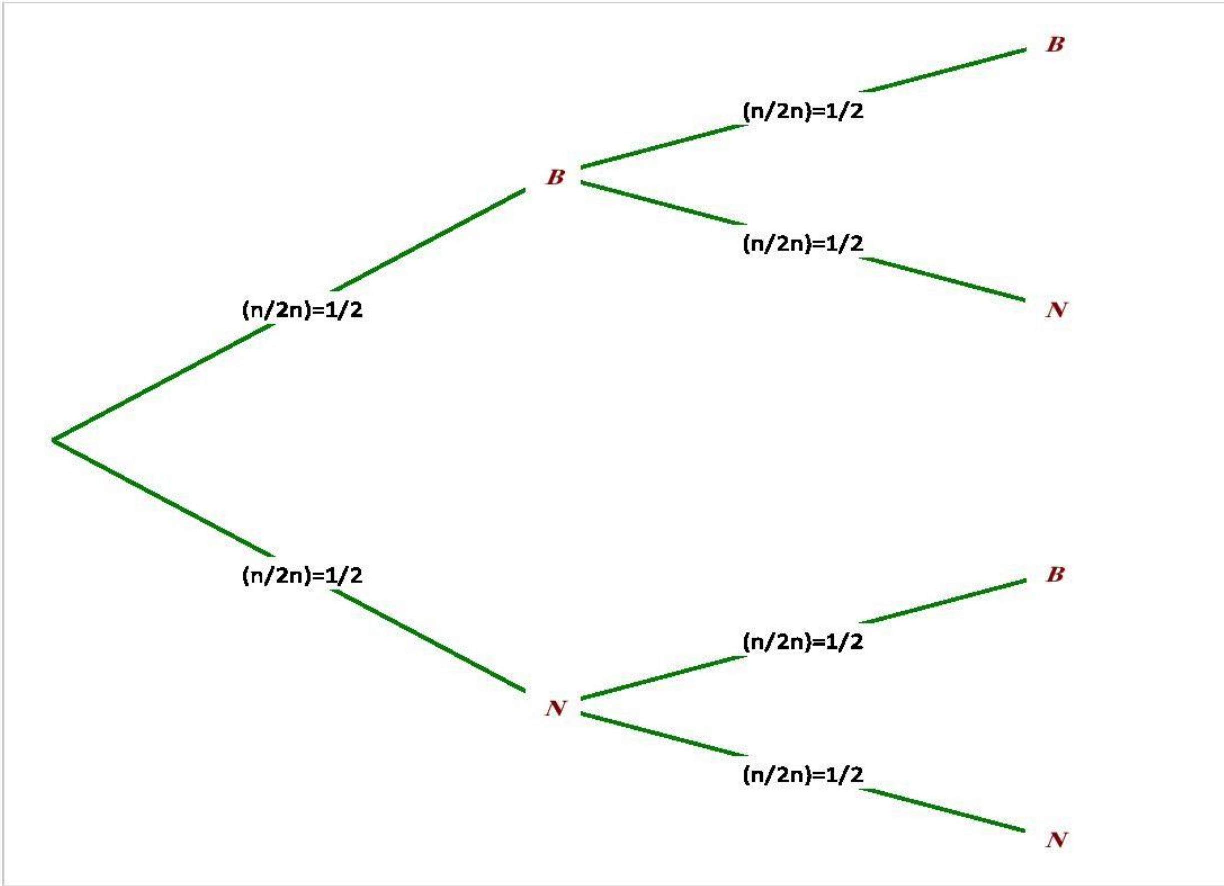
$$d\acute{e}tM(x,y)=\begin{vmatrix} x & -3y \\ y & x \end{vmatrix}=x^2+3y^2$$

إذن $d\acute{e}tM(x,y)\neq 0$ (لأن $(x,y)\neq(0,0)$)

$$M(x,y)^{-1}=\begin{pmatrix} \dfrac{x}{x^2+3y^2} & \dfrac{3y}{x^2+3y^2} \\ \dfrac{-y}{x^2+3y^2} & \dfrac{x}{x^2+3y^2} \end{pmatrix}=M\left(\dfrac{x}{x^2+3y^2},\dfrac{-y}{x^2+3y^2}\right)\in E^*$$

و بالتالي : $(E,-,\times)$ جسم تبادلي.

تصحيح التمرين الثاني



1. ليكن الحدث E " ربح 20 نقطة " بمعنى لون الكرتين المسحوبتين أبيض

$$p(E)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

ليكن الحدث F " خسارة 20 نقطة " بمعنى لون الكرتين المسحوبتين أسود

$$p(F)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

ليكن الحدث G " الربح منعدم " بمعنى الكرتان المسحوبتان مختلفتي اللون

$$p(G)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

2. أ) لنحسب احتمال ربح 100 نقطة بمعنى تحقق الحدث E خمس مرات

$$C_5^5\,(p(E))^5\,(1-p(E))^{5-5}=1\times\left(\frac{1}{4}\right)^5\times\left(\frac{3}{4}\right)^0=\left(\frac{1}{4}\right)^5$$

ب) لنحسب احتمال ربح 40 نقطة بمعنى تحقق الحدث E مرتين

$$C_5^2\,(p(E))^2\,(1-p(E))^{5-2}=10\times\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{270}{1024}=\frac{135}{512}$$

3. أ) $p(X=-20)=p(F)=\frac{1}{4}$

$$p(X=0)=p(G)=\frac{1}{2}$$

$$p(X=20)=p(E)=\frac{1}{4}$$

قانون احتمال X

x_i	-20	0	20
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

ب) الأمل الرياضي :

$$E(X)=\left(-20\times\frac{1}{4}\right)+\left(0\times\frac{1}{2}\right)+\left(20\times\frac{1}{4}\right)=0$$

تصحيح التمرين الثالث

1. ليكن $z \subset \mathbb{C}^*$

M و M' منطبقتين تكافئ $z' = z$

تكافئ $\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right) = z$

تكافئ $z = \frac{1}{z}$

تكافئ $z^2 = 1$

تكافئ $z = 1$ أو $z = -1$

2. ليكن $z \in \mathbb{C}^* - \ -1,1$

$$\frac{z'+1}{z'-1} = \frac{\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)+1}{\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)-1}$$

$$= \frac{z+\frac{1}{z}+2}{z+\frac{1}{z}-2}$$

$$= \frac{z^2+1+2z}{z^2+1-2z}$$

$$= \frac{z+1^{\ 2}}{z-1^{\ 2}}$$

$$= \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$$

إذن $\frac{z'+1}{z'-1} = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$ لكل z من $\mathbb{C}^* - \ -1,1$

3. ليكن Δ واسط القطعة AB

نفترض أن M تنتمي إلى Δ

إذن $AM = BM$

إذن $\frac{BM}{AM} - 1$ $\qquad M \neq A$

لنبين أن M' تنتمي إلى Δ

لدينا : $\frac{BM'}{AM'}=\frac{|z'+1|}{|z'-1|}=\left|\frac{z'+1}{z'-1}\right|=\left|\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2\right|=\left(\frac{|z+1|}{|z-1|}\right)^2=\left(\frac{BM}{AM}\right)^2=1^2=1$

إذن $AM'=BM'$

و منه M' تنتمي إلى Δ

4. لتكن Γ الدائرة التي أحد أقطارها AB

نفترض أن M تنتمي إلى Γ

إذن $\overline{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BM}}\equiv\frac{\pi}{2}\ \pi$ $\quad$ ($\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{BM}$)

إذن $\arg\left(\frac{z+1}{z-1}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\ \pi$

لنبين أن M' تنتمي إلى AB

$$\begin{aligned}\left(\overline{\overrightarrow{AM'},\overrightarrow{BM'}}\right) &\equiv \arg\left(\frac{z'+1}{z'-1}\right)\ 2\pi\\ &\equiv \arg\left(\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2\right)\ 2\pi\\ &\equiv 2\arg\left(\frac{z+1}{z-1}\right)\ 2\pi\\ &\equiv \pi\ 2\pi\end{aligned}$$

لأن : $\arg\left(\frac{z+1}{z-1}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\ \pi$

إذن A و B و M' نقط مستقيمية و منه M' تنتمي إلى AB

تصحيح التمرين الرابع

الجزء الأول :

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $I=\ 0,+\infty$ بما يلي :

$$f\ \ 0\ =1 \quad \text{و} \quad \forall x\in\ 0,+\infty \quad f\ \ x\ =\frac{Arc\tan\ x}{x}$$

1. لنبين أن f متصلة على المجال I

✓ لندرس اتصال f في 0 على اليمين

لدينا $f\ \ 0\ =1$

و $\lim\limits_{x\to0^+} f\ \ x\ =\lim\limits_{x\to0^+}\frac{Arc\tan\ x}{x}=1$

بما أن $\lim\limits_{x\to0^+} f\ \ x\ =f\ \ 0$ فإن f في 0 على اليمين

✓ $f_1 : x \mapsto Arc\tan\ x$ متصلة على $\mathbb{R}$ و بالخصوص متصلة على $0,+\infty$

$f_2 : x \mapsto x$ متصلة على $\mathbb{R}$ و بالخصوص متصلة على $0,+\infty$

و $\forall x \in 0,+\infty \quad f_2\ x \neq 0$

إذن $f = \dfrac{f_1}{f_2}$ متصلة على $0,+\infty$

خلاصة : f متصلة على المجال I

2. أ) ليكن $x \in I = 0,+\infty$ و ليكن $t \in 0,x$

لدينا : $0 \leq t \leq x$

إذن : $0 \leq t^2 \leq x^2$

إذن : $1 \leq 1+t^2 \leq 1+x^2$

و منه : $\dfrac{1}{1+x^2} \leq \dfrac{1}{1+t^2} \leq 1 \quad \forall t \in 0,x$

ب) لدينا : $\dfrac{1}{1+x^2} \leq \dfrac{1}{1+t^2} \leq 1 \quad \forall t \in 0,x$

إذن : $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+x^2}dt \leq \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt \leq \int_0^x 1dt$

إذن : $\left[\dfrac{t}{1+x^2}\right]_0^x \leq Arc\tan t\ {}_0^x \leq t\ {}_0^x$

و منه : $\dfrac{x}{1+x^2} \leq Arc\tan x \leq x \quad \forall x \in 0,+\infty$

ج) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{f\ x - f\ 0}{x-0} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{Arc\tan x}{x} - 1}{x}$

لدينا : $\dfrac{x}{1+x^2} \leq Arc\tan x \leq x \quad \forall x \in 0,+\infty$

إذن : $\dfrac{1}{1+x^2} \leq \dfrac{Arc\tan x}{x} \leq 1 \quad \forall x \in 0,+\infty$

إذن : $\dfrac{1}{1+x^2} - 1 \leq \dfrac{Arc\tan x}{x} - 1 \leq 0 \quad \forall x \in 0,+\infty$

إذن : $\dfrac{-x}{1+x^2} \leq \dfrac{\frac{Arc\tan x}{x} - 1}{x} \leq 0 \quad \forall x \in 0,+\infty$

لدينا : $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{-x}{1+x^2} = 0$

إذن : $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{Arc\tan x}{x} - 1}{x} = 0$

و منه : $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$

و بالتالي f قابلة للاشتقاق في الصفر على اليمين و لدينا $f_d'(0)=0$

3. أ) f قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ (كخارج دالتين قابلتين للاشتقاق على $]0,+\infty[$)

ليكن $x\in]0,+\infty[$: لدينا

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{Arc\tan x}{x}\right)' \\ &= \frac{Arc\tan'(x)\times x - Arc\tan(x)\times(x)'}{x^2} \\ &= \frac{\frac{x}{1+x^2}-Arcatn(x)}{x^2} \end{aligned}$$

إذن : $\forall x\in]0,+\infty[\quad f'(x)=\dfrac{\frac{x}{1+x^2}-Arcatn(x)}{x^2}$

ب) لدينا : $\forall x\in]0,+\infty[\quad f'(x)=\dfrac{\frac{x}{1+x^2}-Arcatn(x)}{x^2}$

و لدينا : $\forall x\in]0,+\infty[\quad x^2>0$

إذن إشارة $f'(x)$ هي إشارة : $\dfrac{x}{1+x^2}-Arcatn(x)$

حسب الجزء الأول . 2) ب) : $\dfrac{x}{1+x^2}-Arcatn(x)\le 0$

إذن : $f'(x)<0$

و منه : f تناقصية .

الجزء الثاني :

1. أ) ليكن $t\in]0,+\infty[$ و $x\in]0,+\infty[$

لدينا : $\dfrac{t}{1+t^2}\le Arc\tan t\le t$

إذن : $\dfrac{1}{1+t^2}\le \dfrac{Arc\tan t}{t}\le 1$

إذن: $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt\le \int_0^x \frac{Arc\tan t}{t}dt\le \int_0^x 1dt$

إذن : $Arc\tan x\le \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt\le x$

إذن : $\dfrac{Arc\tan x}{x} \leq \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt \leq 1$

و منه : $\forall x \in]0,+\infty[\quad \dfrac{Arc\tan x}{x} \leq g(x) \leq 1$

ب) لدينا : $\forall x \in]0,+\infty[\quad f(x) \leq g(x) \leq 1$

إذن : $\forall x \in]0,+\infty[\quad f(x)-1 \leq g(x)-1 \leq 0$

إذن : $\forall x \in]0,+\infty[\quad \dfrac{f(x)-1}{x} \leq \dfrac{g(x)-1}{x} \leq 0$

إذن : $\forall x \in]0,+\infty[\quad \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} \leq \dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} \leq 0$

لدينا f قابلة للاشتقاق في الصفر على اليمين و لدينا $0 = \displaystyle\lim_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$

إذن : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} = 0$

و بالتالي : g قابلة للاشتقاق في الصفر على اليمين و لدينا : $g'_d(0) = 0$

2. أ) ليكن $x \in]0,+\infty[$

$t \mapsto f(t)$ متصلة على $[0,x]$

و الدالة $x \mapsto x$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$

إذن الدالة $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$

و لدينا : $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$

و منه g قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ (كجداء دالتين قابلتين للاشتقاق على $]0,+\infty[$)

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\right)' \\
&= \left(\frac{1}{x}\right)'\int_0^x f(t)\,dt + \frac{1}{x}\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)' \\
&= \frac{-1}{x^2}\int_0^x f(t)\,dt + \frac{1}{x}f(x) \\
&= \frac{1}{x}\left(\frac{-1}{x}\int_0^x f(t)\,dt + f(x)\right) \\
&= \frac{1}{x}\left(f(x) - g(x)\right)
\end{aligned}$$

و منه : $g'(x)=\frac{1}{x}\left(f(x)-g(x)\right)\quad \forall x\in\,]0,+\infty[$

3. لدينا : $x>0$ و لدينا : $f(x)-g(x)\leq 0$

إذن : $g'(x)\leq 0\quad \forall x\in\,]0,+\infty[$

و منه g تناقصية على I

4. أ) ليكن $x>1$ و ليكن $1\leq t\leq x$

لدينا : $0<Arc\tan t<\frac{\pi}{2}$

إذن : $0<\frac{Arc\tan t}{t}<\frac{\pi}{2t}$

إذن : $0<\int_1^x\frac{Arc\tan t}{t}dt<\int_1^x\frac{\pi}{2t}dt$

إذن : $0<\int_1^x\frac{Arc\tan t}{t}dt<\frac{\pi}{2}\left[\ln t\right]_1^x$

إذن : $0<\frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,dt<\frac{\pi}{2}\frac{\ln x}{x}$

بما أن : $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ فإن $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,dt=0$

ب) لدينا : $g(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt=\frac{1}{x}\int_0^1 f(t)\,dt+\frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,dt$

ليكن $t\in[0,1]$

لدينا : $0\leq t\leq 1$ و f تناقصية

إذن : $f(1)\leq f(t)\leq f(0)$

إذن : $\frac{\pi}{4}\leq f(t)\leq 1$

إذن : $\frac{\pi}{4}\leq\int_0^1 f(t)\,dt\leq 1$

إذن : $\frac{\pi}{4x}\leq\frac{1}{x}\int_0^1 f(t)\,dt\leq\frac{1}{x}$

بما أن : $\lim_{x\to+\infty}\frac{\pi}{4x}=0$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$

فإن : $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^1 f(t)\,dt=0$

و لدينا كذلك : $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_1^x f\ \ t\ dt = 0$

و منه : $\lim_{x\to+\infty} g\ \ x\ = 0$

الجزء الثالث :

1. لنبين أن المعادلة $g\ \ x\ = x$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $0,1$

نعتبر الدالة : $h : x \mapsto g\ \ x\ - x$

✓ h <u>متصلة</u> على $0,1$

✓ h قابلة للاشتقاق على $0,1$ و لدينا : $h'\ \ x\ = g'\ \ x\ - 1 < 0$ (لأن $g'\ \ x\ \leq 0$)

إذن h <u>تناقصية قطعا</u> على $0,1$

✓ ولدينا : على $h\ 0\ = g\ 0\ - 0 = 1 > 0$ و $h\ 1\ = g\ 1\ - 1 = \int_0^1 f\ \ t\ dt - 1 < 0$

إذن : $h\ 0\ \times h\ 1\ < 0$

و منه حسب مبرهنة القيم الوسيطية بالوحدانية : $\exists!\alpha \in\ 0,1 \quad g\ \ \alpha\ = 0$

2. أ) ليكن $x \in\ 0,+\infty$

لدينا : $1 - f\ \ x\ = 1 - \frac{Arc\tan x}{x}$

حسب الجزء الأول . 2) ب) : $\frac{x}{1+x^2} \leq Arc\tan\ \ x\ \leq x \quad \forall x \in\ 0,+\infty$

إذن : $\frac{1}{1+x^2} \leq \frac{Arc\tan\ \ x}{x} \leq 1 \quad \forall x \in\ 0,+\infty$

إذن : $-1 \leq -\frac{Arc\tan\ \ x}{x} \leq -\frac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in\ 0,+\infty$

إذن : $0 \leq 1 - \frac{Arc\tan\ \ x}{x} \leq 1 - \frac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in\ 0,+\infty$

و منه : $0 \leq 1 - f\ \ x\ \leq \frac{x^2}{1+x^2} \quad \forall x \in\ 0,+\infty$

(ملاحظة النتيجة تبقى صحيحة في حالة $x - 0$)

ب) ليكن $x \in\ 0,+\infty$

لدينا : $0 \leq 1\ \ \ f\ \ x\ \leq \frac{x^2}{1+x^2}$

إذن : $-1\le -f\ \ x\ \le \frac{-1}{1+x^2}$

إذن : $\frac{1}{1+x^2}\le f\ \ x\ \le 1$

إذن : $\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt \le \int_0^x f\ \ t\ \ dt \le \int_0^x 1dt$

إذن : $Arc\tan x \le \int_0^x f\ \ t\ \ dt \le x$

إذن : $f\ \ x\ \le \frac{1}{x}\int_0^x f\ \ t\ \ dt \le 1$

إذن : $f\ \ x\ \le g\ \ x\ \le 1$

إذن : $0\le g\ \ x\ - f\ \ x\ \le 1-f\ \ x\ \le \frac{x^2}{1+x^2}$

إذن : $0\le \frac{1}{x}\ \ g\ \ x\ -f\ \ x\ \ \le \frac{x}{1+x^2}\le \frac{1}{2}$

و منه : $\forall x\in\ 0,+\infty\ \ \ |g'\ \ x\ |\le \frac{1}{2}$

3. أ) ليكن $n\in\mathbb{N}$: لدينا :

- ✓ g متصلة على المجال المغلق الذي طرفاه u_n و α
- ✓ g قابلة للاشتقاق على المجال المفتوح الذي طرفاه u_n و α
- ✓ $\forall x\in\ 0,+\infty\ \ \ |g'\ \ x\ |\le \frac{1}{2}$

إذن حسب متفاوتة التزايدات المنتهية : $|g\ \ u_n\ -g\ \ \alpha\ |\le \frac{1}{2}|u_n-\alpha|$

وبما أن $u_{n-1}=g\ \ u_n$ و $\alpha=g\ \ \alpha$

فإن : $\forall n\in\mathbb{N}\ \ \ |u_{n+1}-\alpha|\le \frac{1}{2}|u_n-\alpha|$

ب) لنتين بالترجع : $\forall n\in\mathbb{N}\ \ \ |u_n-\alpha|<\left(\frac{1}{2}\right)^n|u_0-\alpha|$

- ✓ من أجل $n=0$:

لدينا : $\left(\frac{1}{2}\right)^0 |u_0-\alpha| = |u_0-\alpha|$ و $|u_0-\alpha| = |u_0-\alpha|$

إذن : $|u_0-\alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 |u_0-\alpha|$

✓ ليكن $n\in\mathbb{N}$

- نفترض أن : $|u_n-\alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0-\alpha|$
- و نبين أن : $|u_{n+1}-\alpha| < \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |u_0-\alpha|$ ؟

لدينا حسب الافتراض : $|u_n-\alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0-\alpha|$

إذن : $\boxed{\frac{1}{2}|u_n-\alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |u_0-\alpha|}$ $\boxed{a}$

و حسب نتيجة السؤال السابق : $\boxed{|u_{n+1}-\alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n-\alpha|}$ $\boxed{b}$

من $\boxed{a}$ و $\boxed{b}$ نستنتج : $|u_{n+1}-\alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |u_0-\alpha|$

✓ نستنتج : $|u_n-\alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0-\alpha| \quad \forall n\in\mathbb{N}$

بما أن $-1<\frac{1}{2}<1$ فإن : $\lim\limits_{n\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ و منه : $\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n-\alpha| = 0$

و بالتالي المتتالية u_n متقاربة و لدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$