السنة 2 بكالوريا علوم رياضية	تصحيح الامتحان الوطني 2015 الدورة العادية	امتحانات وطنية

تمرين 1 :

$$(E):\ z^2-\left(5+i\sqrt{3}\right)z+4+4i\sqrt{3}=0$$

1

أ) $\Delta=\left(5+i\sqrt{3}\right)^2-4\left(4+4i\sqrt{3}\right)=25+10i\sqrt{3}-3-16-16i\sqrt{3}=6-6i\sqrt{3}=9-6i\sqrt{3}-3=\left(3-i\sqrt{3}\right)^2$

ب) $a=\dfrac{5+i\sqrt{3}-3+i\sqrt{3}}{2}=1+i\sqrt{3}$ ، $b=\dfrac{5+i\sqrt{3}+3-i\sqrt{3}}{2}=4$

ج) لدينا : $a\left(1-i\sqrt{3}\right)=\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(1-i\sqrt{3}\right)=1+3=4=b$ إذن : $b=\left(1-i\sqrt{3}\right)a$

2

أ) الصيغة العقدية للدوران $R\left(A,\dfrac{\pi}{2}\right)$ هي : $z'=e^{\frac{\pi}{2}i}(z-a)+a=i(z-a)+a$ ، بما أن $B_1=R(O)$ فإن :

$b_1=i(0-a)+a=-i\,a+a=-i\left(1+i\sqrt{3}\right)+1+i\sqrt{3}=-i-\sqrt{3}+1+i\sqrt{3}=1-\sqrt{3}+i\left(\sqrt{3}-1\right)$

ب) الصيغة العقدية للتحاكي h هي : $z'=k(z-a)+a=\sqrt{3}(z-a)+a$

لتكن $B_1'=R(B_1)$ إذن : $b_1'=\sqrt{3}(b_1-a)+a=\sqrt{3}(-i\,a)+a=a\left(1-i\sqrt{3}\right)=b$

إذن $B_1'=B$ منه : $B=R(B_1)$

ج) لدينا : $\dfrac{b}{b-a}=\dfrac{b}{a-i\sqrt{3}a-a}=\dfrac{b}{-a\sqrt{3}i}=\dfrac{\frac{b}{a}}{-\sqrt{3}i}=\dfrac{1-i\sqrt{3}}{-\sqrt{3}i}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\dfrac{\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}{-i}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\dfrac{e^{\frac{-\pi}{3}i}}{e^{-\frac{\pi}{2}i}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}e^{\frac{\pi}{6}i}$

بالتالي : $\arg\left(\dfrac{b}{b-a}\right)\equiv\dfrac{\pi}{6}[2\pi]$

د) بما أن C تنتمي إلى الدائرة المحيطة بالمثلث OAB فإن النقط O و A و B و C متداورة

منه : $\dfrac{c-0}{c-a}\div\dfrac{b-0}{b-a}\in IR$ منه : $\arg\left(\dfrac{c-0}{c-a}\div\dfrac{b-0}{b-a}\right)\equiv 0[\pi]$ منه : $\arg\left(\dfrac{c}{c-a}\right)-\arg\left(\dfrac{b}{b-a}\right)\equiv 0[\pi]$

منه : $\arg\left(\dfrac{c}{c-a}\right)\equiv\dfrac{\pi}{6}[\pi]$

تمرين 2 : $x^{1439}\equiv 1436[2015]$

1 بما أن : $1436\times 1051-2015\times 749=1$ فحسب مبرهنة بيزو «Bezout» فإن : $1436\wedge 2015=1$

2

أ) لدينا : $x^{1439}\equiv 1436[2015]$ إذن : $\exists k\in Z\ /\quad x^{1439}-2015k=1436$

لدينا d/x و $d/2015$ منه: d/x^{1436} و $d/2015k$ منه : $d/x^{1439}-2015k$ بالتالي : $d/1436$

ب) نضع : $x\wedge 2015=d$ ، إذن d/x و $d/2015$ إذن حسب السؤال السابق : $d/1436$

إذن : $d/1436\times 1051$ و لدينا : $d/2015$ إذن : $d/2015\times 749$ إذن : $d/1436\times 1051-2015\times 749$

منه : $d/1$ ، و بما أن : $d>0$ فإن : $d=1$ ، بالتالي : $x\wedge 2015=1$

3

أ) لدينا : $2015=5\times 13\times 31$ ، بما أن : $x\wedge 2015=1$ فإن : $x\wedge(5\times 13\times 31)=1$ إذن : $\begin{cases}x\wedge 5=1\\x\wedge 13=1\\x\wedge 31=1\end{cases}$

إذن حسب مبرهنة فيرما نستنتج أن : $\begin{cases}x^4\equiv 1[5]\\x^{12}\equiv 1[13]\\x^{30}\equiv 1[31]\end{cases}$ منه : $\begin{cases}\left(x^4\right)^{360}\equiv 1[5]\\\left(x^{12}\right)^{120}\equiv 1[13]\\\left(x^{30}\right)^{48}\equiv 1[31]\end{cases}$ بالتالي : $\begin{cases}x^{1404}\equiv 1[5]\\x^{1404}\equiv 1[13]\\x^{1404}\equiv 1[31]\end{cases}$

ب)

لدينا : $\begin{cases} x^{1404} \equiv 1[5] \\ x^{1404} \equiv 1[13] \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} 5/x^{1404}-1 \\ 13/x^{1404}-1 \end{cases}$ منه : $(5 \vee 13)/x^{1404}-1$ أي : $65/x^{1404}-1$ أي : $x^{1404} \equiv 1[65]$

مرة أخرى لدينا : $\begin{cases} x^{1404} \equiv 1[65] \\ x^{1404} \equiv 1[31] \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} 65/x^{1404}-1 \\ 31/x^{1404}-1 \end{cases}$ منه : $(65 \vee 31)/x^{1404}-1$ أي : $2015/x^{1404}-1$

أي : $x^{1404} \equiv 1[2015]$

4

لدينا : $x^{1439} \equiv 1436[2015]$ منه : $x^{1440} \equiv 1436\,x[2015]$ و لدينا : $x^{1404} \equiv 1[2015]$

إذن : $1436\,x \equiv 1[2015]$ منه : $\exists \alpha \in Z \ / \ \ 1436\,x - 2015\alpha = 1$

منه : $1436\,x - 2015\alpha = 1436 \times 1051 - 2015 \times 749$ منه : $1436(x-1051) = 2015(\alpha - 749)$

منه : $2015/1436(x-1051)$ ، و بما أن : $2015 \wedge 1436 = 1$ فإن $2015/(x-1051)$ أي : $x \equiv 1051[2015]$

تمرين 3 :

$M(x) = \begin{pmatrix} 1-x & x \\ -2x & 1+2x \end{pmatrix}$ ، $E = \{M(x) \ / \ x \in IR\}$ ، $\forall (x,y) \in IR^2 \quad M(x) \mathrm{T} M(y) = M(x+y+1)$

$$\varphi : \ IR \to E$$
$$x \mapsto \varphi(x) = M(x-1)$$

1

أ)

لدينا : $\forall (x,y) \in IR^2 \quad \varphi(x+y) = M(x+y-1)$

و $\forall (x,y) \in IR^2 \quad \varphi(x) \mathrm{T} \varphi(y) = M(x-1) \mathrm{T} M(y-1) = M(x-1+y-1+1) = M(x+y-1)$

إذن : $\forall (x,y) \in IR^2 \quad \varphi(x+y) = \varphi(x) \mathrm{T} \varphi(y)$ ، إذن : φ تشاكل من $(IR,+)$ نحو (E,T)

ب)

لدينا $\forall x \in IR \quad \varphi(x+1) = M(x)$ إذن $\forall M \in E \ \exists m \in IR \ / \ \varphi(m) = M$ أي أن φ شمول أي : $\varphi(IR) = E$

إذن و بما أن : $(IR\ ,+)$ زمرة تبادلية فإن $(E\ ,\mathrm{T})$ زمرة تبادلية عنصرها الحايد هو: $\varphi(0) = M(-1)$

2

أ)

لدينا لكل $(x,y) \in IR^2$:

$$M(x) \times M(y) = \begin{pmatrix} 1-x & x \\ -2x & 1+2x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1-y & y \\ -2y & 1+2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-x)(1-y)-2xy & y(1-x)+x(1+2y) \\ -2x(1-y)-2y(1+2x) & -2xy+(1+2x)(1+2y) \end{pmatrix}$$

$$M(x) \times M(y) = \begin{pmatrix} 1-x-y+xy-2xy & y-xy+x+2xy \\ -2x+2xy-2y-4xy & -2xy+1+2y+2x+4xy \end{pmatrix}$$

$$M(x) \times M(y) = \begin{pmatrix} 1-x-y-xy & y+x+xy \\ -2x-2y-2xy & 1+2y+2x+2xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-(x+y+xy) & y+x+xy \\ -2(x+y+xy) & 1+2(x+y+xy) \end{pmatrix}$$

$$M(x) \times M(y) = M(x+y+xy)$$

ب)

بما أن : $(x,y) \in IR^2 \Rightarrow x+y+xy \in IR$

فإن : $(M(x), M(y)) \in E^2 \Rightarrow M(x+y+xy) \in E \Rightarrow M(x) \times M(y) \in E$

إذن E جزء مستقر من $(M_2(IR),\times)$ ، ولدينا أيضا :

$\forall (x,y) \in IR^2 \quad M(x) \times M(y) = M(x+y+xy) = M(y+x+yx) = M(y) \times M(x)$

أي أن القانون $\times$ تبادلي

ج)

لدينا : لكل $(x,y,z) \in IR^3$:

$$M(x) \times (M(y) \mathrm{T} M(z)) = M(x) \times M(y+z+1) = M(x+y+z+1+x(y+z+1))$$
$$M(x) \times (M(y) \mathrm{T} M(z)) = M(2x+y+z+xy+xz+1)$$

و

$$(M(x) \times M(y)) \mathrm{T} (M(x) \mathrm{T} M(z)) = M(x+y+xy) \mathrm{T} M(x+z+xz) = M(x+y+xy+x+z+xz+1)$$
$$(M(x) \times M(y)) \mathrm{T} (M(x) \mathrm{T} M(z)) = M(2x+y+z+xy+xz+1)$$

منه : $M(x) \times (M(y) \mathrm{T} M(z)) = (M(x) \times M(y)) \mathrm{T} (M(x) \mathrm{T} M(z))$

و لكون القانونين $\times$ و T تبادليان فإن : $(M(y) \mathrm{T} M(z)) \times M(x) = (M(y) \times M(x)) \mathrm{T} (M(z) \mathrm{T} M(x))$

إذن : $\times$ توزيعي بالنسبة لـ T في E

د)

لدينا : $\forall x \in IR \quad M(x) \mathrm{T} M(-1) = M(-1) \mathrm{T} M(x) = M(x-1+1) = M(x)$

		إذن $M(-1)$ هي العنصر المحايد في (E,T) ولدينا: $M(0)=I$ ، و $\forall x\in IR \quad M(x)\times M(0)=M(0)\times M(x)=M(x+0+0)=M(x)$ إذن: I هي العنصر المحايد في $(E,\times)$
3	أ)	لدينا : $(\forall x\in IR-\{-1\})\ M(x)\times M\left(\frac{-x}{1+x}\right)=M\left(x-\frac{x}{1+x}-\frac{x^2}{1+x}\right)=M\left(\frac{x+x^2-x-x^2}{1+x}\right)=M(0)=I$
	ب)	لدينا : (E,T) زمرة تبادلية عنصرها المحايد : $M(-1)$ القانون $\times$ قانون تركيب داخلي تبادلي في E و تجميعي لأن $E\subset M_2(IR)$ و $(M_2(IR),\times)$ تجميعي القانون $\times$ توزيعي بالنسبة لـ T في E و له عنصر محايد هو : $I=M(0)$ إذن : $(E,T,\times)$ حلقة واحدية، و بما أن لكل $M(x)\in E-\{M(-1)\}$ مماثلا بالنسبة للقانون $\times$ هو $M\left(\frac{-x}{1+x}\right)$ فإن $(E,T,\times)$ جسم تبادلي

التمرين الرابع :

الجزء الأول:		$\begin{cases} f(x)=x(1+\ln^2 x);\ x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$
1		لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x(1+\ln^2 x)=+\infty$ (لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\ln^2 x)=+\infty$) و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\ln^2 x)=+\infty$ ما يعني أن (C) يقبل فرعا شلجميا باتجاه محور الأراتيب جوار $+\infty$
2	أ)	لدينا : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x+x\ln^2 x=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x+(\sqrt{x}\ln x)^2=0+0^2=0=f(0)$ إذن f متصلة يمين الصفر
		للتذكير : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x^r\ \ln(x)=0$ حيث $r\in Q^{*+}$ (في حالتنا : $r=\frac{1}{2}$)
	ب)	لدينا : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} 1+\ln^2 x=+\infty$ (لأن: $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\ln x=-\infty$) إذن $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=+\infty$ ، ما يعني أن الدالة غير قابلة للاشتقاق يمين الصفر ، لكن المنحنى (C) يقبل نصف مماس عمودي في النقطة O له نفس منحى المتجهة $\vec{j}$
		ليس من الضروري تحديد منحى نصف المماس ، لكنه يساعد على اكتشاف أي خطأ في جدول التغيرات لاحقا المنحى نعرفه انطلاقا من إشارة النتيجة و يمين أو يسار النهاية(في حالتنا $(+)\times(+)\to+$ $\begin{cases}+\infty\\0^+\end{cases}$ أي الأعلى أي منحى $\vec{j}$
	ج)	لدينا : $\forall x>0 \quad f'(x)=1+\ln^2 x+x\left(2\ln x\times\frac{1}{x}\right)=1+\ln^2 x+2\ln x=(\ln x+1)^2$ لدينا : $\forall x>0 \quad (\ln x+1)^2\geq 0$ ، و $(\ln x+1)^2=0 \Leftrightarrow \ln x=-1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{e}$ إذن $f'(x)$ موجبة على $]0;+\infty[$ و تنعدم في عدد وحيد ، إذن f تزايدية قطعا على $]0;+\infty[$
		الرتابة القطعية تستوجب أحد حالتين: ▪ أن تكون المشتقة لها إشارة سالبة قطعا أو موجبة قطعا على كل المجال ▪ أن تكون موجبة أو سالبة و أن تنعدم في عدد معدود من الحلول (حل ،حلان ...)

أ) لدينا لكل $x \in]0;+\infty[$: $f''(x) = 2(\ln x + 1) \times \frac{1}{x} = \frac{2}{x}(\ln x + 1)$

و لدينا : $\ln x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > e^{-1}$ و $\ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = e^{-1}$

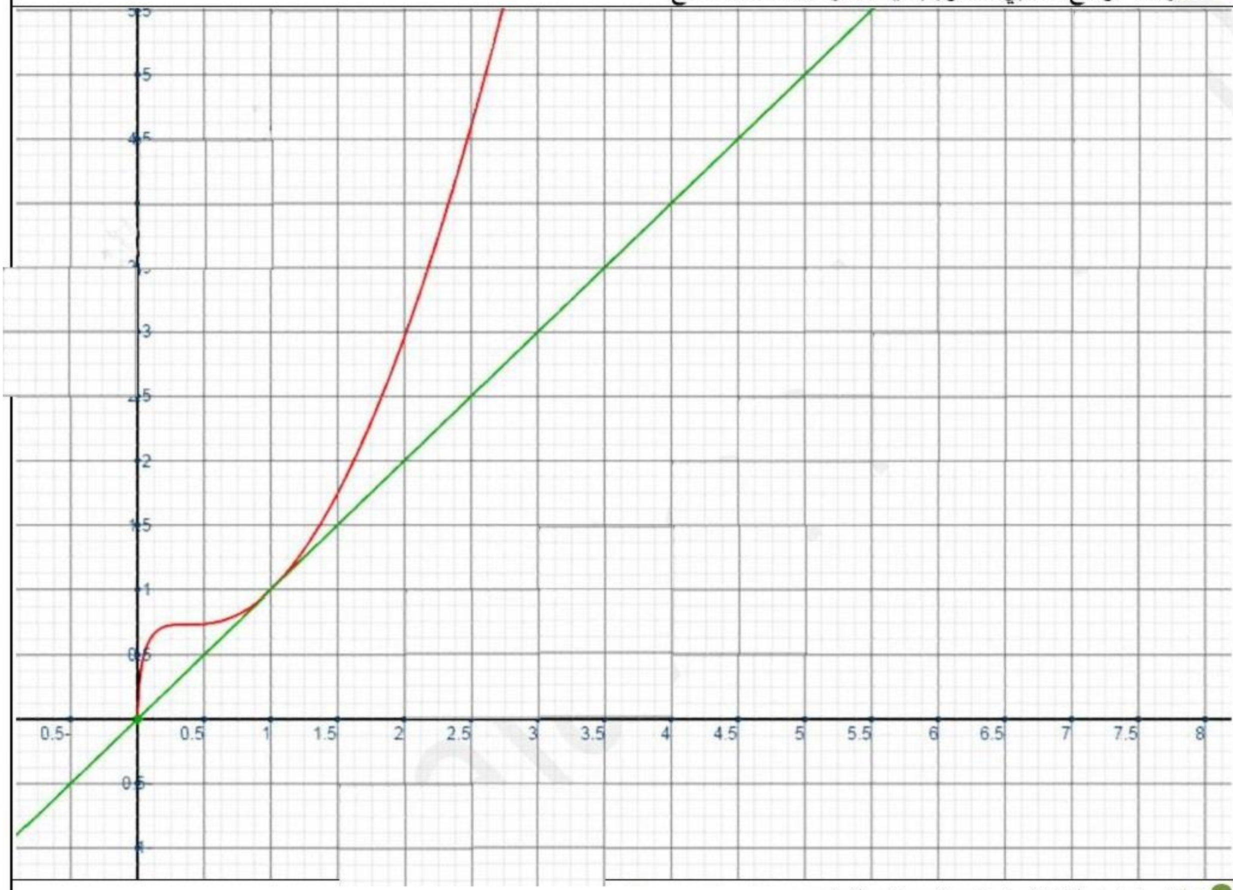
إذن : $f''(x)$ تنعدم و تغير إشارتها في e^{-1} إذن فالمنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف I أفصولها e^{-1}

ب) لدينا لكل $x \in]0;+\infty[$: : $f(x) - x = x\ln^2 x \geq 0$ و $f(x) - x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

إذن (C) يوجد فوق المستقيم $(D): y = x$ و يقطعه في النقطة $A(1;1)$

دراسة الوضع النسبي تستوجب أيضا دراسة نقط التقاطع

ج)



الشكل تم إنشاؤه باستعمال برنامج الموقع :

الجزء الثاني:

$$\begin{cases} u_0 = e^{-1} \\ u_{n+1} = f(u_n) \ ; \ n \in IN \end{cases}$$

1 نعلم أن : $e > 1$ إذن : $\frac{1}{e} \leq \frac{1}{e} < 1$ أي : $\frac{1}{e} \leq u_0 < 1$

نفترض أن : $\frac{1}{e} \leq u_n < 1$، إذن : $f\left(\frac{1}{e}\right) \leq f(u_n) < f(1)$ (لأن f تزايدية على $]0;+\infty[$)

منه : $\frac{2}{e} \leq u_{n+1} < 1$ منه : $\frac{1}{e} \leq u_{n+1} < 1$ (لأن : $\frac{1}{e} < \frac{2}{e}$)، إذن حسب مبدأ الترجع: $\frac{1}{e} \leq u_n < 1 \quad \forall n \in IN$

2 لدينا : $\forall n \in IN \quad u_{n+1} - u_n = u_n \ln^2(u_n)$

و لدينا : $\forall n \in IN \quad \frac{1}{e} \leq u_n < 1 \Rightarrow \forall n \in IN \quad \begin{cases} \ln(u_n) < 0 \\ u_n > 0 \end{cases} \Rightarrow \forall n \in IN \quad u_n \ln^2(u_n) > 0$

إذن : $(u_n)_n$ متتالية تزايدية قطعا، وبما أنها مكبورة بالعدد 1 فهي متقاربة.

يمكن أيضا استعمال السؤال 3) ب) من الجزء الأول

3	أ)	لدينا : $\frac{1}{e} \le u_n < 1 \quad \forall n \in IN$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{e} = \frac{1}{e}$ ، إذن : $\frac{1}{e} \le l \le 1$	
	ب)	لدينا: الدالة f متصلة على $\left[\frac{1}{e};1\right]$ و $f\left(\left[\frac{1}{e};1\right]\right) = \left[\frac{2}{e};1\right] \subset \left[\frac{1}{e};1\right]$ والمتتالية $(u_n)_n$ متقاربة نهايتها l إذن l تحقق المعادلة $f(x)=x$ و التي حسب الجزء الأول تقبل حلين بالظبط 1 و 0 ولكون : $\frac{1}{e} \le l \le 1$ ، فإن : $l=1$	
		الجزء الثالث: $F(x) = \int_1^x f(t)dt \quad \forall x \in [0;+\infty[$	
1	أ)	لدينا لكل $x \in]0;+\infty[$: $H'(x) = \left(\frac{-1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^2 \ln x\right)' = \frac{-2}{4}x + \frac{1}{2}\left(2x\ln x + x^2 \times \frac{1}{x}\right) = \frac{-1}{2}x + x\ln x + \frac{1}{2}x = x\ln x = h(x)$ إذن الدالة H هي دالة أصلية للدالة h	
	ب)	لدينا لكل $x \in]0;+\infty[$: $\int_1^x t\ln^2(t)dt = \int_1^x \left(\frac{1}{2}t^2\right)' \ln^2(t)dt = \left[\frac{1}{2}t^2 \ln^2(t)\right]_1^x - \int_1^x \frac{1}{2}t^2\, 2\ln(t) \times \frac{1}{t}dt = \frac{x^2}{2}\ln^2(x) - \int_1^x t\,\ln(t)dt$	
	ج)	لدينا لكل $x \in]0;+\infty[$: $F(x) = \int_1^x t\left(1+\ln^2(t)\right)dt = \int_1^x t + t\,\ln^2(t)dt = \int_1^x t\,dt + \int_1^x t\,\ln^2(t)dt$ $F(x) = \left[\frac{1}{2}t^2\right]_1^x + \frac{x^2}{2}\ln^2(x) - \left[\frac{-1}{4}t^2 + \frac{1}{2}t^2 \ln t\right]_1^x = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} + \frac{x^2}{2}\ln^2(x) - \left(\frac{-x^2}{4} + \frac{x^2}{2}\ln x\right) + \left(\frac{-1}{4}\right)$ $F(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} + \frac{x^2}{2}\ln^2(x) + \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{4} = \frac{-3}{4} + \frac{3x^2}{4} - \frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{2}\ln^2(x)$	
2	أ)	نعلم أن الدالة f متصلة على $]0;+\infty[$ ، إذن فهي تقبل دالة أصلية k متصلة و قابلة للاشتقاق على $[0;+\infty[$ ، ومنه : $\forall[0;+\infty[\quad F(x) = k(x) - k(1)$ ، ما يعني أن الدالة F متصلة على $[0;+\infty[$	
	ب)	$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} F(x) = \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{-3}{4} + \frac{3x^2}{4} - \frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{2}\ln^2(x) = \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{-3}{4} + \frac{3x^2}{4} - \frac{x^2}{2}\ln x + \frac{(x\ln x)^2}{2}$ $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} F(x) == \frac{-3}{4} + 0 - 0 + 0 = \frac{-3}{4}$ بما أن F متصلة يمين الصفر حسب السؤال السابق فإن : $\int_0^1 f(t)dt = -\int_1^0 f(t)dt = -F(0) = -\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} F(x) = \frac{3}{4}$	
		التمرين الخامس :	
		$\begin{cases} g(x) = \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t}dt \quad ; x>0 \\ g(0) = \ln 2 \end{cases}$	
1	أ)	ليكن $x>0$ ، لدينا : $t \in [x,2x] \Rightarrow x \le t \le 2x \Rightarrow -2x \le -t \le -x \Rightarrow e^{-2x} \le e^{-t} \le e^{-x}$ إذن : $(\forall x>0) \quad (\forall t \in [x,2x]) \quad e^{-2x} \le e^{-t} \le e^{-x}$	
	ب)	حسب السؤال السابق نستنتج أن : $(\forall x>0) \quad (\forall t \in [x,2x]) \quad \frac{e^{-2x}}{t} \le \frac{e^{-t}}{t} \le \frac{e^{-x}}{t}$ منه : $(\forall x>0) \quad \int_x^{2x} \frac{e^{-2x}}{t}dt \le \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t}dt \le \int_x^{2x} \frac{e^{-x}}{t}dt$	

منه: $e^{-2x}\int_x^{2x}\frac{1}{t}dt \le g(x) \le e^{-x}\int_x^{2x}\frac{1}{t}dt \quad (\forall x>0)$ أي : $(\forall x>0)\quad e^{-2x}\left[\ln t\right]_x^{2x} \le g(x) \le e^{-x}\left[\ln t\right]_x^{2x}$

منه : $(\forall x>0)\quad e^{-2x}\left(\ln 2x-\ln x\right) \le g(x) \le e^{-x}\left(\ln 2x-\ln x\right)$

بالتالي : $(\forall x>0)\quad e^{-2x}\ln 2 \le g(x) \le e^{-x}\ln 2$

ج) بما أن $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} e^{-x}\ln 2=\ln 2$ و $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} e^{-2x}\ln 2=\ln 2$ فإن : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} g(x)=\ln 2=g(0)$ ، إذن g متصلة يمين 0

2

بما أن الدالة $t\mapsto\frac{e^{-t}}{t}$ متصلة على $]0;+\infty[$ فهي تقبل دالة أصلية G متصلة و قابلة للاشتقاق على هذا المجال، ولدينا ،لكل $x>0$: $g(x)=G(2x)-G(x)$ ، وبما أن $x\mapsto 2x$ قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ فإن الدالة g قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و لدينا :

$$\forall x>0\qquad g'(x)=2G'(2x)-G'(x)=2\frac{e^{-2x}}{2x}-\frac{e^{-x}}{x}=\frac{e^{-2x}-e^{-x}}{x}$$

3

أ) ليكن $t>0$ ، الدالة $p:x\mapsto e^{-x}$ متصلة على $[0,t]$ و قابلة للاشتقاق على $]0,t[$ (لأنها متصلة و قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$)، إذن حسب مبرهنة التزايدات المنتهية :

$$\exists c_t\in\left]0,t\right[\qquad \frac{p(t)-p(0)}{t}=p'(c_t)$$

ولدينا : $\forall x>0\;\; p'(x)=-e^{-x}$ ، منه : $\frac{e^{-t}-1}{t}=-e^{-c_t}\qquad \exists c_t\in\left]0,t\right[$

ولدينا : $c_t\in\left]0,t\right[\;\Rightarrow\; 0<c_t<t \;\Rightarrow\; -t<-c_t<0 \;\Rightarrow\; e^{-t}<e^{-c_t}<1 \;\Rightarrow\; -1<-e^{-c_t}<-e^{-t}$

منه : $-1<\frac{e^{-t}-1}{t}<-e^{-t}$

بالتالي : $\forall t>0\quad -1<\frac{e^{-t}-1}{t}<-e^{-t}$ أو أيضا : $\forall t>0\quad -1\le\frac{e^{-t}-1}{t}\le -e^{-t}$

ب) لدينا : $\forall t>0\quad -1\le\frac{e^{-t}-1}{t}\le -e^{-t}$ منه : $\forall x>0\quad \int_x^{2x}-1\,dt\le\int_x^{2x}\frac{e^{-t}-1}{t}dt\le\int_x^{2x}-e^{-t}\,dt$

منه : $\forall x>0\quad \left[-t\right]_x^{2x}\le\int_x^{2x}\frac{e^{-t}}{t}dt-\int_x^{2x}\frac{1}{t}dt\le\left[e^{-t}\right]_x^{2x}$

منه : $\forall x>0\quad -2x+x\le g(x)-\ln 2\le e^{-2x}-e^{-x}$

بالتالي : $\forall x>0\quad -1\le\frac{g(x)-\ln 2}{x}\le\frac{e^{-2x}-e^{-x}}{x}$

ج) بما أن : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{e^{-2x}-e^{-x}}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{e^{-2x}-1}{x}-\frac{e^{-x}-1}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}-2\,\frac{e^{-2x}-1}{-2x}+\frac{e^{-x}-1}{-x}=-2\times1+1=-1$

و $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}-1=-1$ ، فإن : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{g(x)-\ln 2}{x}=-1$ أي : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{g(x)-g(0)}{x}=-1$ ، ما يعني أن g قابلة للاشتقاق يمين الصفر.