التمرين الأول : (3,5 ن)

■ (I)①

ليكن x و y عنصرين من $[1;+\infty[$

إذن : $x \geq 1$ و $y \geq 1$

و منه : $\sqrt{x} \geq 1$ و $\sqrt{y} \geq 1$

يعني : $\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}-1\right)^2 \geq 1$

إذن : $x \perp y \in [1;+\infty[$

و بالتالي : $\perp$ قانون تركيب داخلي في I .

■ (I)②

ليكن x و y عنصرين من $[1;+\infty[$

لدينا : $x \perp y = \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}-1\right)^2$

$$\Leftrightarrow \quad x \perp y = \left(\sqrt{y}+\sqrt{x}-1\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad x \perp y = y \perp x$$

و منه $\perp$ قانون تبادلي في I .

ليكن x و y و z ثلاثة عناصر من المجال I .

لدينا : $(x \perp y) \perp z = \left(\sqrt{x \perp y}+\sqrt{z}-1\right)^2$

$$\Leftrightarrow \quad (x \perp y) \perp z = \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}-1+\sqrt{z}-1\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad (x \perp y) \perp z = \left(\sqrt{x}+\left(\sqrt{y}+\sqrt{z}-1\right)-1\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad (x \perp y) \perp z = \left(\sqrt{x}+\sqrt{y \perp z}-1\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad (x \perp y) \perp z = x \perp (y \perp z)$$

إذن $\perp$ قانون تجميعي في $[1;+\infty[$.

■ (I)③

ليكن e العنصر المحايد للقانون $\perp$ في I .

$$\Leftrightarrow \quad (\forall x \in I)\ ;\ x \perp e = e \perp x = x$$

$$\Leftrightarrow \quad (\forall x \in I)\ ;\ \left(\sqrt{x}+\sqrt{e}-1\right)^2 = x$$

$$\Leftrightarrow \quad (\forall x \in I)\ ;\ \sqrt{x}+\sqrt{e}-1 = \pm\sqrt{x}$$

في حالة : $\sqrt{x}+\sqrt{e}-1 = -\sqrt{x}$

نحصل على : $e = \left(1-2\sqrt{x}\right)^2$

لكن : $\left(1-2\sqrt{x}\right)^2 \notin I$ لأنه لدينا $x \in I$

إذن : $x \geq 0$ و منه : $\left(1-2\sqrt{x}\right)^2 < 1$

أما في حالة : $\sqrt{x}+\sqrt{e}-1 = \sqrt{x}$

نحصل على : $e = 1 \in [1;+\infty[$

و نعلم أن العنصر المحايد إن وجد يكون دائما وحيدا

إذن : 1 هو العنصر المحايد للقانون $\perp$ في المجموعة I .

■ (II)①

لتكن $M(a)$ و $M(b)$ مصفوفتين من E

لدينا : $M(a) \times M(b) = \begin{pmatrix} a & 2(a-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & 2(b-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} ab & 2(ab-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = M(ab) \in E$$

إذن E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$

■ (II)② أ

ليكن x و y عنصرين من $\mathbb{R}^*$

لدينا :

$$\varphi(x \times y) = M(xy) = M(x) \times M(y) = \varphi(x) \times \varphi(y)$$

إذن φ تشاكل من $(\mathbb{R}^*,\times)$ نحو $(E,\times)$

ليكن $M(y)$ عنصرا من $(E,\times)$

لنحل المعادلة $\varphi(x) = M(y)$ ذات المجهول x

$$\varphi(x) = \varphi(y) \ \Leftrightarrow\ M(x) = M(y)$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & 2(x-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & 2(y-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = y$$

و بالتالي : المعادلة $\varphi(x) = M(y)$ تقبل حلا وحيدا في $\mathbb{R}^*$ و هو y

و بتعبير آخر :

$$(\forall M(y) \in E)\ (\exists!\, x \in \mathbb{R}^*)\ :\ \varphi(x) = M(y)$$

و منه : φ تقابل من $(\mathbb{R}^*,\times)$ نحو $(E,\times)$

خلاصة : φ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}^*,\times)$ نحو $(E,\times)$.

■ (II)② ب

نعلم أن التشاكل التقابلي يحافظ على بنية الزمرة .

نستنتج إذن بنية $(E,\times)$ انطلاقا من بنية $(\mathbb{R}^*,\times)$
عن طريق التشاكل التقابلي φ .

لدينا : $(\mathbb{R}^*,\times)$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد هو العدد الحقيقي 1 و كل عنصر x يقبل $\frac{1}{x}$ كمماثل.

إذن : $(E,\times)$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد هو المصفوفة $\varphi(1)$ و كل مصفوفة $M(x)$ تقبل مماثلة و هي المصفوفة $M\left(\frac{1}{x}\right)$.

و لدينا : $$\varphi(1)=M(1)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I$$

و $$\varphi\left(\frac{1}{x}\right)=M\left(\frac{1}{x}\right)=\begin{pmatrix}\frac{1}{x}&2\left(\frac{1}{x}-1\right)\\0&1\end{pmatrix}$$

■(II)②ج

لتكن H_n مصفوفة من المجموعة $\mathcal{H}$

$$\Leftrightarrow\quad H_n=\begin{pmatrix}2^n&2^{n+1}-2\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\quad H_n=\begin{pmatrix}2^n&2(2^n-1)\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\quad H_n=\begin{pmatrix}x&2(x-1)\\0&1\end{pmatrix}\ ;\ x=2^n$$

إذن : $\mathcal{H}\subset E$ و لدينا : $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\in\mathcal{H}$

إذن $\mathcal{H}$ جزء غير فارغ من E

لتكن : $\begin{pmatrix}2^m&2^{m+1}-2\\0&1\end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix}2^n&2^{n+1}-2\\0&1\end{pmatrix}$ مصفوفتين من $\mathcal{H}$.

لدينا : $$\begin{pmatrix}2^n&2^{n+1}-2\\0&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2^m&2^{m+1}-2\\0&1\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}2^n&2^{n+1}-2\\0&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2^{-m}&2(2^{-m}-1)\\0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2^{n-m}&2^{n-m+1}-2\\0&1\end{pmatrix}\in\mathcal{H}$$

<u>إذن : $(\mathcal{H},\times)$ زمرة جزئية من $(E,\times)$.</u>

<u>التمرين الثاني : (3,5 ن)</u>

■(I)①أ

تعويض مباشر و حساب سهل

■(I)①ب

نعلم أنه إذا كان z_1 و z_2 هما حلا المعادلة : $az^2+bz+c=0$

فإن : $z_1+z_2=\frac{-b}{a}$ و $z_1z_2=\frac{c}{a}$

نستعمل العلاقة : $z_1z_2=\frac{c}{a}$

إذن : $z_1z_2=\left(\frac{5}{3}+4i\right)$

$$\Leftrightarrow\quad z_2=\frac{\left(\frac{5}{3}+4i\right)\left(1-\frac{2}{3}i\right)}{\left(1+\frac{2}{3}i\right)\left(1-\frac{2}{3}i\right)}$$

$$\Leftrightarrow\quad z_2=\frac{9}{13}\left(\frac{13}{3}+\frac{26}{9}i\right)$$

$$\Leftrightarrow\quad z_2=3+2i$$

$$\Leftrightarrow\quad z_2=3\left(1+\frac{2}{3}i\right)$$

$$\Leftrightarrow\quad z_2=3z_1$$

■(II)①أ

لدينا : $P=r(A)$

إذن حسب الكتابة العقدية للدوران : $(z_P-z_\Omega)=e^{\frac{i\pi}{3}}(z_A-z_\Omega)$

$$\Leftrightarrow\quad (p-\omega)=e^{\frac{i\pi}{3}}(a-\omega)$$

$$\Leftrightarrow\quad \boxed{p=e^{\frac{i\pi}{3}}(a-\omega)+\omega}\quad(1)$$

و بنفس الطريقة : $B=r(Q)$

$$\Leftrightarrow\quad (z_B-z_\Omega)=e^{\frac{i\pi}{3}}(z_Q-z_\Omega)$$

$$\Leftrightarrow\quad (b-\omega)=e^{\frac{i\pi}{3}}(q-\omega)$$

$$\Leftrightarrow\quad qe^{\frac{i\pi}{3}}=(b-\omega)+\omega e^{\frac{i\pi}{3}}$$

$$\Leftrightarrow\quad \boxed{q=e^{\frac{-i\pi}{3}}(b-\omega)+\omega}\quad(2)$$

■(II)①ب

في البداية لدينا :

$$\cos\left(\frac{-4\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\sin\left(\frac{-4\pi}{3}\right)=-\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)=-\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

ننطلق إذن من الكتابة :

$$\frac{1-e^{\frac{i\pi}{3}}}{1-e^{\frac{-i\pi}{3}}} = \frac{e^{\frac{4i\pi}{3}}\left(e^{\frac{-4i\pi}{3}} - e^{-i\pi}\right)}{\left(1-e^{\frac{-i\pi}{3}}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1-e^{\frac{i\pi}{3}}}{1-e^{\frac{-i\pi}{3}}} = \frac{e^{\frac{4i\pi}{3}}\left(\cos\left(\frac{-4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-4\pi}{3}\right) + 1\right)}{\left(1-\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)\right)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1-e^{\frac{i\pi}{3}}}{1-e^{\frac{-i\pi}{3}}} = \frac{e^{\frac{4i\pi}{3}}\left(\cancel{-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} + \cancel{i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)} + 1\right)}{\left(1-\cancel{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} + \cancel{i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{1-e^{\frac{i\pi}{3}}}{1-e^{\frac{-i\pi}{3}}} = e^{\frac{4i\pi}{3}}}$$

■ (II) 1 ج

لدينا حسب العلاقتين (1) و (2) من السؤال 1 أ

$$(p-a) = \omega + ae^{\frac{i\pi}{3}} - \omega e^{\frac{i\pi}{3}} - a$$

$$\Leftrightarrow \quad (p-a) = \omega\left(1-e^{\frac{i\pi}{3}}\right) + a\left(e^{\frac{i\pi}{3}} - 1\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{(p-a) = \left(1-e^{\frac{i\pi}{3}}\right)(\omega - a)}$$

و لدينا كذلك : $(q-b) = \omega + be^{\frac{-i\pi}{3}} - \omega e^{\frac{-i\pi}{3}} - b$

$$\Leftrightarrow \quad (q-b) = \omega\left(1-e^{\frac{-i\pi}{3}}\right) + b\left(e^{\frac{-i\pi}{3}} - 1\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{(q-b) = \left(1-e^{\frac{-i\pi}{3}}\right)(\omega - b)}$$

و منه : $\frac{p-a}{q-b} = \left(\frac{1-e^{\frac{i\pi}{3}}}{1-e^{\frac{-i\pi}{3}}}\right)\left(\frac{\omega-a}{\omega-b}\right) = \left(\frac{\omega-a}{\omega-b}\right)e^{\frac{4i\pi}{3}}$

و بالتالي : $\boxed{\frac{p-a}{q-b} = \left(\frac{\omega-a}{\omega-b}\right)e^{\frac{4i\pi}{3}}}$ (3)

■ (II) 2 أ

نفترض أن : $\left(\frac{\omega-a}{\omega-b}\right) = e^{\frac{2i\pi}{3}}$

بالإستعانة بالعلاقة (3) نحصل على :

$$\frac{p-a}{q-b} = \left(\frac{\omega-a}{\omega-b}\right)e^{\frac{4i\pi}{3}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{p-a}{q-b} = e^{\frac{2i\pi}{3}} \times e^{\frac{4i\pi}{3}} = e^{2i\pi} = 1$$

إذن : $(p-a) = (q-b)$

يعني : $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{BQ}$

و منه حسب التعريف المتجهي لمتوازي الأضلاع : $APBQ$ متوازي أضلاع.

■ (II) 2 ب

لدينا حسب النتيجة (1) :

$$(p-a) = \omega + ae^{\frac{i\pi}{3}} - \omega e^{\frac{i\pi}{3}} - a$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{(p-a) = \left(1-e^{\frac{i\pi}{3}}\right)(\omega - a)} \quad (4)$$

و لدينا كذلك حسب افتراض السؤال 2 : $\left(\frac{\omega-a}{\omega-b}\right) = e^{\frac{2i\pi}{3}}$

إذن : $\boxed{(\omega - b) = e^{\frac{-2i\pi}{3}}(\omega - a)}$ (5)

و لدينا من جهة أخرى :

$$(b-a) = (\omega-a) - (\omega-b)$$

إذن باستعمال العلاقة (5) نحصل على :

$$(b-a) = (\omega-a) - (\omega-b)$$

$$\Leftrightarrow \quad (b-a) = (\omega-a) - e^{\frac{-2i\pi}{3}}(\omega-a)$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{(b-a) = (\omega-a)\left(1-e^{\frac{-2i\pi}{3}}\right)} \quad (6)$$

من (4) و (6) نستنتج أن :

$$\frac{b-a}{p-a} = \frac{(\omega-a)\left(1-e^{\frac{-2i\pi}{3}}\right)}{\left(1-e^{\frac{i\pi}{3}}\right)(\omega-a)} = \frac{1-e^{\frac{-2i\pi}{3}}}{1-e^{\frac{i\pi}{3}}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{b-a}{p-a} = \frac{1-cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\,sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{1-cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i\,sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{b-a}{p-a} = \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}} = \frac{3+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$$

نضرب طرفي آخر نتيجة في العدد العقدي $(1+i\sqrt{3})$ نحصل على :

$$\Leftrightarrow \quad \frac{b-a}{p-a} = \frac{1}{4}(3+i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3}) = \boxed{i\sqrt{3}}$$

و بالتالي : $\left(\frac{b-a}{p-a}\right) = i\sqrt{3}$

$$\Rightarrow \quad arg\left(\frac{b-a}{p-a}\right) = arg(i\sqrt{3})[2\pi]$$

$$\Rightarrow \quad arg\left(\frac{b-a}{p-a}\right) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

$$\Rightarrow \quad \overline{(\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AB})} = \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

$\Rightarrow$ $P\hat{A}B$ زاوية قائمة

و بما أن : $APQB$ متوازي أضلاع و إحدى زواياه قائمة.

فإن $APQB$ مستطيل.

التمرين الثالث : (3,0 ن)

■ 1 أ

لدينا الأعداد الأولية التي مربعاتها أصغر من 503 هي : 2 و 3 و 5 و 7 و 11 و 13 و 17 و 19 و لا أحد من هذه الأعداد يقسم العدد 503 .

إذن 503 عدد أولي.

■ 1 ب

بما أن 503 عدد أولي و 7 عدد أولي كذلك.

فإنه حسب $(Fermat)$: $7^{503-1} \equiv 1[503]$

يعني : $7^{502} \equiv 1[503]$

و منه : $(7^{502})^4 \equiv 1^4[503]$

أي : $7^{2008} \equiv 1[503]$

■ 2

لدينا : $(1,8)$ حل خاص للمعادلة (E) .

و ليكن (x,y) الحل العام للمعادلة (E) .

إذن : $\begin{cases} 49\times 1 - 6\times 8 = 1 \\ 49x - 6y = 1 \end{cases}$

ننجز عملية الفرق بين المعادلتين طرفا بطرف نحصل على :

$$\boxed{49(x-1) = 6(y-8)} \quad (*)$$

$$\Rightarrow \quad 49 \,/\, 6(y-8)$$

بما أن $49 \wedge 6 = 1$ فإنه حسب $Gauss$: نحصل على : $49 \,/\, (y-8)$

و منه : $y = 49k+8$; $(\exists k\epsilon\mathbb{Z})$

نعوض y بقيمته في المعادلة $(*)$ نحصل على :

$$49(x-1) = 6(49k)$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 6k+1$$

عكسيا : لدينا : $49(6k+1) - 6(49k+8) = 1$

و بالتالي : مجموعة حلول المعادلة تكتب على شكل :

$$\boxed{\mathcal{S} = \{\ (6k+1\,;49k+8) \quad / \quad k\epsilon\mathbb{Z}\}}$$

■ 3 أ

نعلم أنه إذا كانت q^n متتالية هندسية أساسها العدد الحقيقي الغير المنعدم q فإن :

$$1+q+q^2+\cdots\cdots+q^n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

لدينا 7^n متتالية هندسية أساسها 7 إذن :

$$1+7+7^2+\cdots\cdots+7^{2007} = \frac{7^{2007+1}-1}{7-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad N = \frac{7^{2008}-1}{6}$$

$$\Leftrightarrow \quad 7^{2008} - 6N = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 7^2\cdot 7^{2006} - 6N = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 49\cdot 7^{2006} - 6N = 1$$

إذن الزوج $(7^{2006},N)$ حل للمعادلة (E) .

■ 3 ب

لدينا : $\begin{cases} 1 \equiv 1[4] \\ 7 \equiv -1[4] \end{cases}$

$$\begin{cases} 7^2 \equiv 1[4] \\ 7^3 \equiv -1[4] \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7^4 \equiv 1[4] \\ 7^5 \equiv -1[4] \end{cases}$$

$\vdots \qquad \vdots$

$$\begin{cases} 7^{2006} \equiv 1[4] \\ 7^{2007} \equiv -1[4] \end{cases}$$

نجمع هذه المتوافقات طرفا بطرف نحصل على :

$$1+7+7^2+7^3+\cdots\cdots+7^{2006}+7^{2007}\equiv 0[4]$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{N\equiv 0[4]}$$

لدينا حسب ①ب $7^{2008}\equiv 1[503]$ إذن : $503\,/\,(7^{2008}-1)$

و نعلم أن : $(7^{2008}-1)=6N$ إذن : $503\,/\,6N$

و بما أن 503 عدد أولي و 2×3 هو التفكيك الأولي للعدد 6 فإن : $6\wedge 503=1$

و منه حسب $(Gauss)$: $503\,/\,N$

و بالتالي : $N\equiv 0[503]$

■③ج

لدينا : $503\wedge 4=1$ لأن : 503 عدد أولي.

و لأن 2^2 هو التفكيك الأولي للعدد 4

و نعلم أن : $4\,/\,N$ و $503\,/\,N$

إذن : $4\times 503\,/\,N$ يعني : $2012\,/\,N$

التمرين الرابع : (7,5 ن)

■(I)①

لدينا : $$g'(x)=\frac{1}{1+x}-\left(\frac{(1+x)-x}{(1+x)^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad g'(x)=\frac{x}{(1+x)^2}$$

إذن : g' تنعدم في 0 و إشارتها موجبة على المجال $[0,+\infty[$.

و منه g دالة تزايدية على المجال $[0,+\infty[$.

■(I)②

ليكن x عنصرا من $[0,+\infty[$.

إذن $x\geq 0$ و منه : $g(x)\geq g(0)=0$

و بالتالي : $\forall x\epsilon[0,+\infty[\ ;\ g(x)\geq 0$

■(II)①

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} e^x ln(1+e^{-x})=\lim_{x\to+\infty}\frac{ln(1+e^{-x})}{e^{-x}}$$

نضع : $t=e^{-x}$ نحصل على :

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{ln(1+t)-ln(1+0)}{t-0}=\frac{1}{1+0}=1$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} e^x ln(1+e^{-x})=\lim_{x\to-\infty} e^x ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty} e^x ln\left(\frac{e^x+1}{e^x}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty} e^x\left(ln(e^x+1)-ln(e^x)\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty} \underbrace{e^x}_{0^+} \underbrace{ln\left(e^x+1\right)}_{0^+}-\underbrace{xe^x}_{0^-}=0$$

■(II)②

ليكن x عددا حقيقيا .

$$f'(x)=e^x ln(1+e^{-x})+e^x\left(\frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad f'(x)=e^x\left(ln(1+e^{-x})-\left(\frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad f'(x)=e^x g(e^{-x})$$

■(II)③

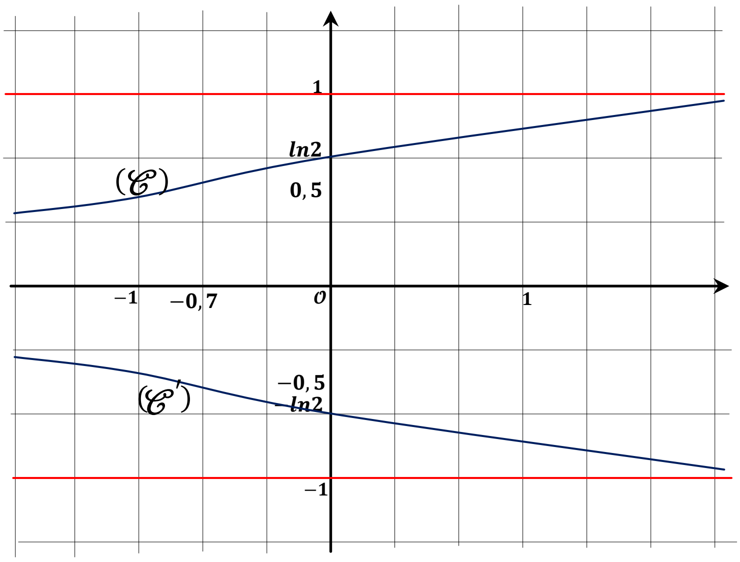
لدينا : $f'(x)=e^x g(e^{-x})$

إذن f' لا تنعدم أبدا و إشارتها موجبة دائما .

و نستنتج جدول تغيرات f كما يلي :

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
f	0 $\nearrow$ 1

■(II)④



■(II)⑤

ليكن x عنصرا من $]-1,0[$.

إذن : $-1<x<0$ و منه $e^{-x}<e$ و $e^x<1$

يعني : $g(e^{-x})<g(e)$ و $e^x<1$

إذن : $0<e^x g(e^{-x})<g(e)$ أي : $0<f'(x)<g(e)$

■(II)⑥

نضع : $h(x) = f(x) + x$

لدينا : $h^{'}(x) = f^{'}(x) + 1$

بما أن : $f^{'}(x) > 0$ حسب السؤال ⑤

فإن : $h^{'}(x) > 1 > 0$ و منه : h دالة تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$

و منه : h تقابل من أي مجال $[x,y]$ من $\mathbb{R}$ نحو صورته بالدالة h .

نختار المجال $[-1,0]$.

إذن h تقابل من $[-1,0]$ نحو $f([-1,0])$

و لدينا : $h([-1,0]) = [h(-1), h(0)] \approx \left[\frac{-1}{2}, ln2\right]$

و بما أن : $0 \epsilon \left[\frac{-1}{2}, ln2\right]$

فإن الصفر يمتلك سابقا واحدا بالتقابل h في المجال $[-1,0]$.

و بتعبير آخر : $\exists!\ \alpha \epsilon [-1,0]\ ;\ h(\alpha) = 0$

و بما أن : $h(-1) \neq h(0) \neq 0$

فإن : $\exists!\ \alpha \epsilon\ ]-1,0[\ ;\ h(\alpha) = 0$

أي : $\exists!\ \alpha \epsilon\ ]-1,0[\ ;\ f(\alpha) + \alpha = 0$

■(II)⑦أ

من أجل $n = 0$ لدينا : $-1 \leq u_0 = 0 \leq 0$

نفترض أن : $(\forall n \epsilon \mathbb{N})\ ;\ -1 \leq u_n \leq 0$

حسب التمثيل المبياني للدالة f : $(\forall x \epsilon \mathbb{R})\ ;\ f(x) \geq 0$

إذن : $(\forall n \epsilon \mathbb{N})\ ;\ \underset{(1)}{\boxed{f(u_n) \geq 0}}$

و لدينا حسب الإفتراض : $u_n \leq 0$

إذن : $f(u_n) \leq ln2$ لأن f تزايدية على $\mathbb{R}$.

و منه : $\underset{(2)}{\boxed{f(u_n) \leq 1}}$ لأن : $ln2 \approx 0{,}6$

من (1) و (2) نستنتج أن : $(\forall n \epsilon \mathbb{N})\ ;\ 0 \leq f(u_n) \leq 1$

$$\Leftrightarrow \quad (\forall n \epsilon \mathbb{N})\ ;\ -1 \leq -f(u_n) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (\forall n \epsilon \mathbb{N})\ ;\ -1 \leq u_{n+1} \leq 0$$

و بالتالي حسب مبدأ الترجع : $\boxed{(\forall n \epsilon \mathbb{N})\ ;\ -1 \leq u_n \leq 0}$

■(II)⑦ب

لدينا f دالة متصلة و قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ كله.

نستطيع إذن تطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على أي مجال من $\mathbb{R}$

نختار المجال الذي طرفاه u_n و α و الذي سنرمز له بالرمز $\overleftrightarrow{[\alpha, u_n]}$

لأننا لا ندري من الأكبر هل u_n أم α .

$$\Rightarrow \quad \exists\, c\, \epsilon\, \overleftrightarrow{[\alpha, u_n]}\ ;\ \frac{f(u_n) - f(\alpha)}{u_n - \alpha} = f^{'}(c)$$

$$\Rightarrow \quad \exists\, c\, \epsilon\, \overleftrightarrow{[\alpha, u_n]}\ ;\ |f(u_n) - f(\alpha)| = f^{'}(c)|u_n - \alpha|$$

$$\Rightarrow \quad \exists\, c\, \epsilon\, \overleftrightarrow{[\alpha, u_n]}\ ;\ |-u_{n+1} + \alpha| = f^{'}(c)|u_n - \alpha|$$

$$\Rightarrow \quad \exists\, c\, \epsilon\, \overleftrightarrow{[\alpha, u_n]}\ ;\ |u_{n+1} - \alpha| = f^{'}(c)|u_n - \alpha|$$

بما أن : $0 \leq f^{'}(x) \leq g(e)$

فإن : $(\forall n \epsilon \mathbb{N})\ ;\ 0 \leq f^{'}(x)|u_n - \alpha| \leq g(e)|u_n - \alpha|$

و منه : $\boxed{(\forall n \epsilon \mathbb{N})\ ;\ |u_{n+1} - \alpha| \leq g(e)|u_n - \alpha|}$

■(II)⑦ج

لدينا حسب السؤال ب :

$$(\forall n \epsilon \mathbb{N})\ ;\ |u_{n+1} - \alpha| \leq g(e)|u_n - \alpha|$$

من أجل $(n-1)$ نحصل على :

$$\begin{aligned} |u_n - \alpha| &\leq g(e)|u_{n-1} - \alpha| \\ &\leq (g(e))^2|u_{n-2} - \alpha| \\ &\leq (g(e))^3|u_{n-3} - \alpha| \\ &\ \ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ &\leq (g(e))^n|u_{n-n} - \alpha| \end{aligned}$$

إذن : $|u_n - \alpha| \leq (g(e))^n|0 - \alpha|$

و بما أن : $\alpha\, \epsilon\,]-1,0[$ و ذلك حسب ⑥

فإن : $|0 - \alpha| = |\alpha| < 1$

و بالتالي : $\boxed{(\forall n \epsilon \mathbb{N})\ ;\ |u_n - \alpha| \leq (g(e))^n}$

■(II) ⑦ د

لدينا حسب السؤال ⑦ ج

$$(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ |u_n-\alpha|\le (g(e))^n$$

و نلاحظ أن $(g(e))^n$ متتالية هندسية أساسها $g(e)$ و هو عدد موجب أصغر من 1

لأن : $g(e)<0{,}6<1$

إذن : $\lim\limits_{n\to+\infty}(g(e))^n=0$

و منه حسب مصاديق تقارب المتتاليات نستنتج أن :

$$\lim_{n\to+\infty}|u_n-\alpha|=0$$

أي : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\alpha}$

التمرين الخامس : (2,5 ن)

■ ①

$$F(1)=\int_1^1\left(\frac{\ln t}{1+t^2}\right)dt=0$$

■ ② أ

لدينا الدالة : $t\to\dfrac{\ln t}{1+t^2}$ متصلة على $]0,+\infty[$

إذن فهي تقبل دالة أصلية ψ على $]0,+\infty[$ بحيث :

$$\psi'(x)=\frac{\ln x}{1+x^2}\quad \text{و}\quad \psi(x)-\psi(0)=\int_0^x\left(\frac{\ln t}{1+t^2}\right)dt$$

بما أن : $F(x)=\psi(x)-\psi\left(\frac{1}{x}\right)$

فإن F قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$ لأنها مجموع دالة و مركب دالتين قابلتين للإشتقاق على $]0,+\infty[$

و لدينا :

$$F'(x)=\psi'(x)+\left(\frac{1}{x}\right)'\psi'\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$=\left(\frac{\ln x}{1+x^2}\right)-\left(\frac{-1}{x^2}\right)\left(\frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\right)$$

$$=\left(\frac{\ln x}{1+x^2}\right)-\left(\frac{\ln x}{1+x^2}\right)=0$$

■ ② ب

بما أن : $(\forall\, x\in\,]0,+\infty[)\ ;\ F'(x)=0$

فإن : $(\forall\, x\in\,]0,+\infty[)\ ;\ F(x)=c\in\mathbb{R}$

و بما أن : $F(1)=0$ فإن $c=0$

و بالتالي : $(\forall\, x\in\,]0,+\infty[)\ ;\ F(x)=0$

■ ③

$$F(x)=\int_{\frac{1}{x}}^{x}\left(\frac{\ln t}{1+t^2}\right)dt=0$$

$$\Leftrightarrow\quad F(x)=\int_{\frac{1}{x}}^{x}\underbrace{\left(\frac{1}{1+t^2}\right)}_{v'}\underbrace{(\ln t)}_{u}dt$$

$$\Leftrightarrow\quad F(x)=\Big[\big(Arctan(t)\big)(\ln t)\Big]_{\frac{1}{x}}^{x}-\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{Arctan(t)}{t}dt$$

$$\Leftrightarrow\quad F(x)=\ln(x)\cdot Arctan(x)+ln\left(\frac{1}{x}\right)\cdot Arctan\left(\frac{1}{x}\right)-\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{Arctan(t)}{t}dt$$

$$\Leftrightarrow\quad \boxed{F(x)=\left(Arctan(x)-Arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right)\ln x-\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{Arctan(t)}{t}dt}\ (*)$$

■ ④

نعتبر الدالة العددية φ المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بما يلي :

$$\varphi(x)=Arctan\left(\frac{1}{x}\right)+Arctan(x)$$

لدينا φ قابلة للإشتقاق على كل من المجالين $]-\infty,0[$ و $]0,+\infty[$

لأنها تضم دوال اعتيادية كلها معرفة و قابلة للإشتقاق على $]-\infty,0[$ و $]0,+\infty[$

و لدينا :

$$\varphi'(x)=\left(\frac{1}{x}\right)'\left(\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\right)+\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$$

$$=\left(\frac{-1}{x^2}\right)\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)+\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$$

$$=\frac{-1}{x^2+1}+\frac{1}{1+x^2}=0$$

إذن φ دالة ثابتة على كل من المجالين $]0,+\infty[$ و $]-\infty,0[$

أو بتعبير آخر :
$$\begin{cases}\forall x\epsilon]-\infty,0[\ ;\ \varphi(x)=c_1\epsilon\mathbb{R}\\ \forall x\epsilon]0,+\infty[\ ;\ \varphi(x)=c_2\epsilon\mathbb{R}\end{cases}$$

نعوض x بالقيمتين 1 و -1 و ذلك من أجل إيجاد c_1 و c_2 نحصل على :

$$\begin{cases}c_1=\varphi(-1)=2Arctan(-1)=2\left(\frac{-\pi}{4}\right)=\frac{-\pi}{2}\\ c_2=\varphi(1)=2Arctan(1)=2\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

و بالتالي :
$$\boxed{\varphi(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\ ;\ \forall x>0\\ \frac{-\pi}{2}\ ;\ \forall x<0\end{cases}}$$

ما يهمنا من هذه النتيجة هو : $(\forall x>0)\ ;\ \varphi(x)=\frac{\pi}{2}$

$$\Leftrightarrow\quad (\forall x>0)\ ;\ Arctan\left(\frac{1}{x}\right)+Arctan(x)=\frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow\quad \boxed{(\forall x>0)\ ;\ Arctan\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}-Arctan(x)}\ (**)$$

■ **4**

نستغل إذن النتيجتين $(*)$ و $(**)$ في الإجابة على هذا السؤال.

لدينا : $(\forall x>0)\ ;\ F(x)=0$

إذن :

$$\left(Arctan(x)-Arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right)\ln x-\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{Arctan(t)}{t}dt=0$$

$$\Leftrightarrow\quad \left(\frac{\pi}{2}\right)\ln x-\int_{\frac{1}{x}}^{1}\frac{Arctan(t)}{t}dt=0$$

$$\Leftrightarrow\quad \int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{Arctan(t)}{t}dt=\frac{\pi}{2}\ln x$$

$$\Leftrightarrow\quad \boxed{\frac{2}{\pi}\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{Arctan(t)}{t}dt=\ln x}$$

■ و الحمد لله رب العالمين ■