Corrigé de l'épreuve de Maths
Session normale
2020

2ème année Sciences Mathématiques

Préparé et présenté par

Mr.EL ABBASSI Mohammed

Professeur de Mathématiques

07 juillet 2020

Exercice 1 (Arithmétique)

Considérons dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ *l'équation* (D) : $7x^3-13y=5$.

1- *Supposons que l'équation* (D) *admet une solution* (x,y) *dans* $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

a- *Montrons que* x *et 13 sont premiers entre eux .*

Pour cela, posons $d=x\wedge 13$ *et montrons que* $d=1$.

Comme $d=x\wedge 13$ *alors* d/x *et* $d/13$

Donc $d/x\times 7x^2+13\times(-y)$

D'où $d/5$ *(car* $5=7x^3-13y$ *)*

Et par suite $d=5$ *ou* $d=1$ *(puisque 5 est premier et* $d\geq 1$ *)*

Et comme 5 ne divise pas 13 alors $d=1$

Et par suite x *et 13 sont premiers entre eux .*

b- *Déduisons que* $x^{12}\equiv 1[13]$

Comme 13 est premier et comme $x\wedge 13=1$ *alors d'après le théorème de Fermat* $x^{13-1}\equiv 1[13]$ *c.à.d* $x^{12}\equiv 1[13]$.

c-*Montrons que* $x^3\equiv 10[13]$

On a : $7x^3-13y=5$ *et comme* $5\equiv 70[13]$ *et* $13y\equiv 0[13]$ *alors* $7x^3\equiv 70[13]$

Donc $13/7\left(x^3-10\right)$ *et comme* $13\wedge 7=1$ *alors d'après le théorème de Gauss*

$13/x^3-10$ *et par suite* $x^3\equiv 10[13]$.

d- *Déduisons que* $x^{12}\equiv 3[13]$

On a d'après la question précédente $x^3\equiv 10[13]$ *et comme* $10\equiv -3[13]$

Alors $\left(x^3\right)^4\equiv(-3)^4[13]$ *et comme* $(-3)^4\equiv 27\times 3[13]$ *et* $27\equiv 1[13]$

Alors $x^{12}\equiv 3[13]$.

2- *D'après ce qui a précédé, si on suppose que l'équation* (D) *admet une solution* (x,y) *dans* $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ *alors* $x^{12}\equiv 1[13]$ *et* $x^{12}\equiv 3[13]$ *d'où* $1\equiv 3[13]$

c.à.d 13/2 ce qui contredit le fait que 13 ne divise pas 2.

On en déduit que l'équation (D) *ne peut pas avoir de solution dans* $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

Exercice 2 (Structures)

$$E=\left\{\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & y\end{pmatrix}/(x,y)\in\Re\times\Re^*\right\}$$

1- a *Montrons que* E *est une partie stable dans* $\left(M_2(\Re),\times\right)$

Pour cela, considérons deux matrices M et N de E tels que

$M=M(a,\ )=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & b\end{pmatrix}$ *et* $N=M(x,y)=\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & y\end{pmatrix}$ *et montrons que* $M\times N\in E$.

(Sous-entendu , on a $(a,x)\in\Re$ *et* $(b,y)\in(\Re^*)^2$*)*

On a : $M\times N$ $\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & b\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times1+a\times0 & 1\times x+a\times y\\ 0\times1+b\times0 & 0\times x+b\times y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & x+ay\\ 0 & by\end{pmatrix}=M(x+ay,by)$

Et comme $x+ay\in\Re$ *(car* $(\Re,+,\times)$ *est un anneau) et* $by\in\Re^*$ *(car* $(\Re^*,\times)$ *est un groupe) alors* $M\times N\in E$

Et par suite E *est une partie stable dans* $\left(M_2(\Re),\times\right)$.

b- *Montrons que la loi* $\times$ *n'est pas commutative dans E .*

Pour cela, considérons deux matrices M et N de E tels que

$M=M(a,\ )=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & b\end{pmatrix}$ *et* $N=M(x,y)=\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & y\end{pmatrix}$ *et montrons que* $M\times N\in E$.

On a d'après la question précédente $M\times N=\begin{pmatrix}1 & x+ay\\ 0 & by\end{pmatrix}=M(x+ay,by)$

et $N\times M=\begin{pmatrix}1 & a+xb\\ 0 & yb\end{pmatrix}=M(a+xb,yb)$.

On constate bien que $M\times N\neq N\times M$ *en général , en effet si on prend par exemple* $M=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ *et* $N=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

On a $M\times N=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ *et* $N\times M=\begin{pmatrix}1 & 7\\ 0 & 2\end{pmatrix}$

Donc $M\times N\neq N\times M$ *et par suite la loi* $\times$ *n'est pas commutative dans E .*

$c-$ *On a* $\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & y\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & \frac{-x}{y}\\ 0 & \frac{1}{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times1+x\times0 & 1\times\frac{-x}{y}+x\times\frac{1}{y}\\ 0\times1+y\times0 & 0\times\frac{-x}{y}+y\times\frac{1}{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

De même, on a :

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{-x}{y} \\ 0 & \frac{1}{y} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times1+\frac{-x}{y}\times0 & 1\times x+\frac{-x}{y}\times y \\ 0\times1+\frac{1}{y}\times0 & 0\times x+\frac{1}{y}\times y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2- Montrons que $(E,\times)$ est un groupe.

On a : $E \subset M_2(\Re)$ *et* $E \neq \varnothing$ *(car* $I \in E, I = M(0,1)$ *)*

D'après 1)a- E est une partie stable dans $(\mathrm{M}_2(\Re),\times)$.

Comme E est stable dans $(\mathrm{M}_2(\Re),\times)$ et comme $\times$ est associative dans $(\mathrm{M}_2(\Re),\times)$ alors elle l'est dans E et *comme I est l'élément neutre dans $(\mathrm{M}_2(\Re),\times)$ alors il l'est aussi dans $(E,\times)$.*

Et d'après la question précédente l'inverse de tout élément $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix}$ de E dans $(\mathrm{M}_2(\Re),\times)$ est $\begin{pmatrix} 1 & \frac{-x}{y} \\ 0 & \frac{1}{y} \end{pmatrix}$ et comme $\frac{-x}{y} \in \Re$ et $\frac{1}{y} \in \Re^*$ alors $\begin{pmatrix} 1 & \frac{-x}{y} \\ 0 & \frac{1}{y} \end{pmatrix}$ est bien l'inverse de $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix}$ dans E.

D'où $(E,\times)$ est un groupe, et d'après la question 1)b- ce groupe est non commutatif.

3) Considérons la partie F de E définie par :

$$F = \left\{ M(x) = \begin{pmatrix} 1 & x-1 \\ 0 & x \end{pmatrix} = M(x-1,x) / x \in \Re^* \right\}$$

a- Considérons l'application φ : $\begin{array}{l} \Re^* \to E \\ x \to \varphi(x) = M(x) \end{array}$

Montrons que φ est un homomorphisme de $(\Re^*,\times)$ vers $(E,\times)$.

On a d'une part : $\forall(x,y)\in(\Re^*)^2$, $\varphi(x\times y)=\varphi(xy)=M(xy)=M(xy-1,xy)$

Et d'autre part :

$$\varphi(x)\times\varphi(y)=M(x)\times M(y)=M(x-1,x)\times M(y-1,y)=M\left(y-1+(x-1)y,xy\right)$$
$$=M(y-1+xy-y,xy)=M(xy-1,xy)$$

D'où : $\forall(x,y)\in(\Re^*)^2$, $\varphi(x\times y)=\varphi(x)\times\varphi(x)$

Et par suite φ est un homomorphisme de $(\Re^*,\times)$ vers $(E,\times)$.

b- Déduisons que $(F,\times)$ est un groupe commutatif et précisons son élément neutre .

Par définition de F, on en déduit que $F=\varphi(\Re^*)$, en effet $F=\{\varphi(x)/\,x\in\Re^*\}$

Et comme φ est un homomorphisme de $(\Re^*,\times)$ vers $(E,\times)$ et comme $(\Re^*,\times)$ est un groupe commutatif alors $(\varphi(\Re^*),\times)$ c.à.d $(F,\times)$est un groupe commutatif.

Exercice 3 (Les complexes)

Première partie

Considérons dans $\mathbb{C}$ *l'équation* $(E): z^3-2mz^2+2m^2z-m^3=0$ *, avec* $m\in\mathbb{C}^*$.

1- Résolvons dans $\mathbb{C}$ *l'équation* (E)*, sachant que* m *est une solution de* (E).

On a $(\forall z\in\mathbb{C})$: $z^3-2mz^2+2m^2z-m^3=0 \Leftrightarrow z^3-m^3-2mz^2+2m^2z=0$

$$\Leftrightarrow (z-m)(z^2+mz+m^2)-2mz(z-m)=0$$
$$\Leftrightarrow (z-m)(z^2+mz-2mz+m^2)=0$$
$$\Leftrightarrow (z-m)(z^2-mz+m^2)=0$$
$$\Leftrightarrow z-m=0 \text{ ou } z^2-mz+m^2=0$$
$$\Leftrightarrow z=m \text{ ou } z^2-mz+m^2=0$$

Résolvons dans $\mathbb{C}$ *l'équation :* $z^2 - mz + m^2 = 0$

Le discriminant de cette équation est $\Delta = -3m^2 = \left(im\sqrt{3}\right)^2$

Cette équation admet deux solutions dans $\mathbb{C}$ *qui sont :*

$$z_1 = \frac{-(-m) - im\sqrt{3}}{2} = m\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad et \quad z_2 = \frac{-(-m) + im\sqrt{3}}{2} = m\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

D'où l'ensemble des solutions de l'équation (E) *est :*

$$\mathrm{S} = \left\{ m, m\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\ m\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right\}.$$

2) a- Vérifions que $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{1}{m}$.

Comme z_1 *et* z_2 *sont des solutions de l'équation* (E) *autre que* m *alors elles sont les deux solutions de l'équation :* $z^2 - mz + m^2 = 0$

donc $z_1 + z_2 = \frac{-(-m)}{1} = m$ *et* $z_1.z_2 = \frac{m^2}{1} = m^2$

et par suite : $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{z_1 + z_2}{z_1 z_2} = \frac{m}{m^2} = \frac{1}{m}$.

b- Donnons l'écriture algébrique de chacun des nombres z_1 *et* z_2 *en prenant dans cette question* $m = 1 + e^{i\frac{\pi}{3}}$.

On a : $m = 1 + e^{i\frac{\pi}{3}} = 1 + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ *,Donc :*

$$z_1 = m\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{4}i + \frac{\sqrt{3}}{4}i + \frac{3}{4} = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad et$$

$$z_2 = m\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{4}i + \frac{\sqrt{3}}{4}i - \frac{3}{4} = \sqrt{3}\,i$$

Deuxième partie

Considérons dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ *les points* $A(a)$ *et* $B(b)$ *avec* $a = me^{i\frac{\pi}{3}}$ *et* $b = me^{-i\frac{\pi}{3}}$

Considérons les trois rotations R_1 , R_2 *et* R_3 *tels que :*

$$R_1 = r\left(P, \frac{\pi}{2}\right),\ R_2 = r\left(Q, \frac{\pi}{2}\right) \text{ et } R_3 = r\left(R, \frac{\pi}{2}\right)$$

Par hypothèses on a : $A = R_1(O)$, $B = R_2(A)$ *et* $O = R_3(B)$.

1) *Montrons que les points O, A et B ne sont pas alignés.*

On a :

$$\frac{z_B - z_O}{z_A - z_O} = \frac{z_B}{z_A} = \frac{me^{-i\frac{\pi}{3}}}{me^{i\frac{\pi}{3}}} = e^{-i\frac{2\pi}{3}} \notin \Re \ (\ car \ \operatorname{Im}\left(e^{-i\frac{2\pi}{3}}\right) = -\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \neq 0)$$

D'où les points O, A et B ne sont pas alignés.

2) a-

Montrons que $z_P = p = m\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$ *et que* $z_R = r = m\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{7\pi}{12}}$

$$\begin{aligned} A = R_1(O) &\Leftrightarrow z_A - z_P = e^{i\frac{\pi}{2}}\left(z_O - z_P\right) \\ &\Leftrightarrow z_A - z_P = i\left(z_O - z_P\right) \\ &\Leftrightarrow z_A = (1- \ )z_P \\ &\Leftrightarrow z_P = p = \frac{1}{1-i}a = \frac{me^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = m\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)} = m\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\left(\frac{7\pi}{12}\right)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} O = R_3(B) &\Leftrightarrow z_O - z_R = e^{i\frac{\pi}{2}}\left(z_B - z_R\right) \\ &\Leftrightarrow -z_R = iz_B - iz_R \\ &\Leftrightarrow z_B = \frac{(1-i)}{i}z_R \\ &\Leftrightarrow z_B = -(1+ \ )z_R \\ &\Leftrightarrow z_R = r = \frac{-1}{1+i}b = \frac{me^{-i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = m\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)} = m\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\left(\frac{7\pi}{12}\right)} \end{aligned}$$

b- *Montrons que* $z_Q = q = m\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

On a :

$$B=R_2(A)\Leftrightarrow z_B-z_Q=e^{i\frac{\pi}{2}}\left(z_A-z_Q\right)$$
$$\Leftrightarrow z_B-z_Q=i\left(z_A-z_Q\right)$$
$$\Leftrightarrow z_Q=q=\frac{1}{-1+i}(iz_A-z_B)=\frac{1}{\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}}\left(e^{i\frac{\pi}{2}}me^{i\frac{\pi}{3}}-me^{-i\frac{\pi}{3}}\right)$$
$$\Leftrightarrow z_Q=q=m\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}\left(e^{i\frac{5\pi}{6}}-e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)$$
$$\Leftrightarrow z_Q=q=m\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}.e^{i\frac{\pi}{4}}\left(e^{i\frac{7\pi}{12}}-e^{-i\frac{7\pi}{12}}\right)=m\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{\pi}{2}}.2i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)=m\sqrt{2}\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$$

Car $e^{-i\frac{\pi}{2}}=-i$ *et* $\forall(\alpha,\beta)\in\Re^2:e^{i\alpha}-e^{i\beta}=e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}\left(e^{i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}-e^{-i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}\right)=2i\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$

3) Montrons que $OQ=PR$ *et que* $(OQ)\perp(PR)$.

On a d'une part : $aff\left(\overrightarrow{OQ}\right)=q=m\sqrt{2}\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ *et d'autre part :*

$aff\left(\overrightarrow{PR}\right)=r-p=m\frac{\sqrt{2}}{2}\left(e^{-i\left(\frac{7\pi}{12}\right)}-e^{i\frac{7\pi}{12}}\right)=-2i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)m\frac{\sqrt{2}}{2}=-i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)m\sqrt{2}$ *, donc :*

$OQ=\left|\overrightarrow{OQ}\right|=|q|=\sqrt{2}\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)|m|$ $\left(car\ \frac{7\pi}{12}\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\rangle 0\right)$

et $PR=|r-p|=\sqrt{2}\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)|m|$ *, donc :* $OQ=PR$ *.*

De même, on a

$$\begin{aligned}\overline{\left(\overrightarrow{OQ},\overrightarrow{PR}\right)}&\equiv\arg\left(\frac{r-p}{q-o}\right)[2\pi]\\ &\equiv\arg\left(\frac{1}{-i}\right)[2\pi]\\ &\equiv\arg(i)\,[2\pi]\\ &\equiv\frac{\pi}{2}\,[2\pi]\end{aligned}$$

:

D'où : $(OQ)\perp(PR)$ *.*

Exercice 4 (Analyse)

Première partie

Considérons la fonction f *définie sur l'intervalle* $I=\left[0,+\infty\right[$ *par :*

$$f(0)=0 \quad et \quad \forall x\in\left]0,+\infty\right[: f(x)=x^3\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

1) *Soit* $x\in\left]0,+\infty\right[$ *, montrons en appliquant le TAF à la fonction ln sur l'intervalle* $\left[x,x+1\right]$ *que* $\frac{1}{x+1}<\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)<\frac{1}{x}$.

Comme la fonction ln est dérivable sur $\left]0,+\infty\right[$ *alors elle est continue sur l'intervalle* $\left[x,x+1\right]$ *et dérivable sur l'intervalle* $\left]x,x+1\right[$ *alors d'après le TAF*

$\exists c\in\left]x,x+1\right[$ *tel que :* $\ln(x+1)-\ln x=\ln'(c)(x+1-x)=\frac{1}{c}$

Et comme $\ln(x+1)-\ln x=\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ *alors*

$\exists c\in\left]x,x+1\right[$ *tel que* $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{c}$

Et comme

$$c\in\left]x,x+1\right[\Leftrightarrow x<c<x+1$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+1}<\frac{1}{c}<\frac{1}{x}$$

Alors $\frac{1}{x+1}<\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)<\frac{1}{x}$.

.

2) *Considérons la propriété* $(P):\left(\forall x\in\left]0,+\infty\right[\right): \frac{1}{x+1}<\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)<\frac{1}{x}$

a - *En utilisant la propriété* (P) *montrons que* f *est dérivable à droite en 0.*

On a : $\forall x\in\left]0,+\infty\right[: \frac{f(x)-f(0)}{x-0}=x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

Comme $\forall x\in\left]0,+\infty\right[\quad x^3>0$ *alors de* (P) *on en déduit que*

$\left(\forall x\in\left]0,+\infty\right[\right): \frac{x^2}{x+1}<x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)<\frac{x^2}{x}$ *c.à.d* $\left(\forall x\in\left]0,+\infty\right[\right): \frac{x^2}{x+1}<\frac{f(x)-f(0)}{x-0}<x$

Et comme : $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x^2}{x+1}=\lim\limits_{x\to0^+}x=0$ *alors d'après le théorème dit des gendarmes on a* $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0\in\Re$*, et par suite* f *est dérivable à droite en 0 et on a* $f'_d(0)=0$

b- En utilisant la propriété (P) montrons que la courbe (C) admet une branche parabolique dont on précisera la direction .

D'abord, on remarque que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=+\infty$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{\ln(1+t)}{t}=1$ *(en posant : $t=\frac{1}{x}$)*

Ensuite, à partir de la proposition (P) on déduit que $\left(\forall x\in\left]0,+\infty\right[\right): \dfrac{x^2}{x+1}\langle\dfrac{f(x)}{x}\langle x$

Et puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{1+\frac{1}{x}}=+\infty$ *alors* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$

Et par suite la courbe (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

3) a – Montrons que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $\left]0,+\infty\right[$

et que $\forall x\in\left]0,+\infty\right[: f'(x)=3x^2\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{3(1+x)}\right)$.

Comme la fonction $x\to1+\frac{1}{x}$ est dérivable et strictement positive sur $\left]0,+\infty\right[$

Alors la fonction : $x\to\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $\left]0,+\infty\right[$

D'où la fonction f est dérivable sur l'intervalle $\left]0,+\infty\right[$ (produit de deux fonctions dérivables sur $\left]0,+\infty\right[$), et on a :

$$\forall x\in\left]0,+\infty\right[: f'(x)=\left(x^3\right)'\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+x^2\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)'=3x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+x^3\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)'}{1+\frac{1}{x}}$$

$$=3x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+x^3\frac{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1+x}{x}}=3x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{x^2}{1+x}=3x^2\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{3(1+x)}\right)$$

b- Déduisons que la fonction f est strictement croissante sur $\left[0,+\infty\right[$.

On a : $\forall x\in\left]0,+\infty\right[:\ f'(x)=3x^2\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{3(1+x)}\right)$

Et comme d'après (P) *:* $\forall x\in\left]0,+\infty\right[: \frac{1}{3(1+x)}<\frac{1}{1+x}<\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ *alors :*

$\forall x\in\left]0,+\infty\right[: \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{3(1+x)}>0$ *et comme* $\forall x\in\left]0,+\infty\right[: 3x^2>0$

Alors : $\forall x\in\left]0,+\infty\right[:\ f'(x)>0$

D'où f est strictement croissante sur $\left[0,+\infty\right[$.

c- Tableau de variations de f

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$0 \nearrow +\infty$

4) Considérons la fonction g définie sur $\left(\forall x\in\left]0,+\infty\right[\right) :\ g(x)=\frac{f(x)}{x}$

a- Vérifions que $\left(\forall x\in\left]0,+\infty\right[\right) :\ g'(x)=2x\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{2(1+x)}\right)$

D'abord, signalons que g est dérivable sur $\left]0,+\infty\right[$ (rapport de deux fonctions dérivables sur $\left]0,+\infty\right[$). On a :

$$\left(\forall x\in\left]0,+\infty\right[\right) :\ g'(x)=\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=\frac{f'(x).x-x'f(x)}{x^2}=\frac{1}{x}\left(3x^2\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)-\frac{1}{3(1+x)}\right)-\frac{1}{x^2}\left(x^3\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$=3x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{x}{1+x}=2x\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{2(1+x)}\right).$$

D'où : $\left(\forall x\in\left]0,+\infty\right[\right):\ g'(x)=2x\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{2(1+x)}\right)$

Toujours d'après (P) *on a :* $\forall x\in\left]0,+\infty\right[:\ \frac{1}{2(1+x)}\langle\frac{1}{1+x}\langle\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

Et comme $\left(\forall x\in\left]0,+\infty\right[\right):\ 2x\rangle 0$ *alors* $\left(\forall x\in\left]0,+\infty\right[\right):\ g'(x)\rangle 0$.

Et par suite la fonction g *est strictement croissante sur l'intervalle* $\left]0,+\infty\right[$.

b- *Montrons que la fonction* $g(x)=1$ *admet une solution unique* α *sur* $\left]0,+\infty\right[$ *puis vérifions que* $\alpha\in\left]1,2\right[$.

Comme la fonction g *est continue et strictement croissante sur l'intervalle* $\left]0,+\infty\right[$ *alors c'est une bijection de* $\left]0,+\infty\right[$ *vers l'intervalle* $J=g\left(\left]0,+\infty\right[\right)$ *et on a :* $J=\left]\lim\limits_{x\to0^+}g(x),\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)\right[=\left]0,+\infty\right[$*, en effet, on a :*

$\lim\limits_{x\to0^+}g(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}=0$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$.

Et comme $1\in J$ *alors* $\left(\exists!\alpha\in\left]0,+\infty\right[\right)$ *tel que* $g(\alpha)=1$ *(d'après théorème de la fonction bijective).*

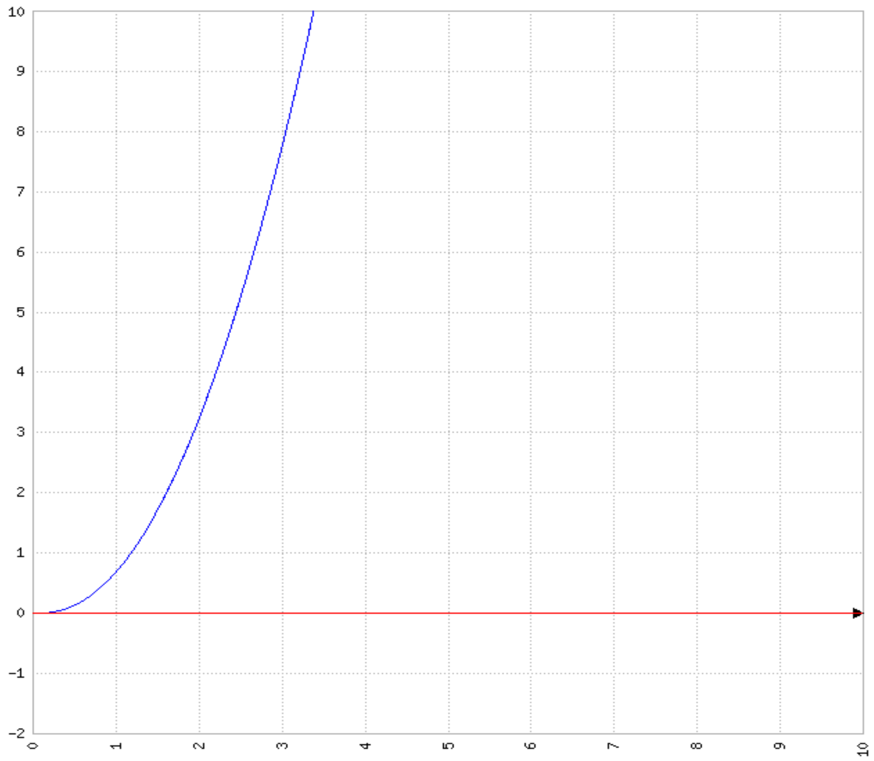
Et comme $g(1)=f(1)=\ln(2)\approx0.7$ *et* $g(2)=\frac{1}{2}f(2)=4\ln\left(\frac{3}{2}\right)\approx1.5$ *et* $g(\alpha)=1$ *alors* $g(1)\langle g(\alpha)\langle g(2)$ *et comme la fonction* g *est strictement croissante sur* $\left]0,+\infty\right[$ *et que* $1,\alpha$ *et 2 sont des éléments de cet intervalle alors* $1\langle\alpha\langle2$.

c) *Déduisons que les seules solutions de l'équation* $f(x)=x$ *sont 0 et* α. *On a :*

$$\begin{aligned}\left(\forall x\in\left]0,+\infty\right[\right):\ f(x)=x&\Leftrightarrow\frac{f(x)}{x}=1\\&\Leftrightarrow g(x)=1\\&\Leftrightarrow x=\alpha\end{aligned}$$

Et comme $f(0)=0$ *alors les seules solutions de l'équation* $f(x)=x$ *sont 0 et* α.

5) a – *Représentation graphique de la fonction* f .



b- Montrons que la fonction f réalise une bijection de I vers I .

Comme la fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle I

Alors elle réalise une bijection de I vers $f(I)=\left]\lim_{x\to0^+} f(x),\lim_{x\to+\infty} f(x)\right[=\left]0,+\infty\right[=I$.

Signalons que f est continue à droite en 0 ,puisqu'on a démontré qu'elle est dérivable à droite en 0 , d'où $\lim_{x\to0^+} f(x)=f(0)=0$.

Deuxième partie

Considérons la suite (u_n) *définie par* $(\forall n\in\mathbf{N})\ u_{n+1}=f^{-1}(u_n)$ *avec* $u_0\in\left]0,\alpha\right[$.

1) Montrons par récurrence que : $(\forall n\in\mathbf{N}): 0<u_n<\alpha$.

Par hypothèse la propriété est vraie pour $n=0$ *,* $0<u_0<\alpha$.

Soit $n\in\mathbf{N}$*, supposons que* $0<u_n<\alpha$ *et montrons que* $0<u_{n+1}<\alpha$

On a d'après l'hypothèse de la récurrence $0<u_n<\alpha$ *et la fonction* f^{-1} *est strictement croissante sur* $f(I)=I$ *(car f l'est sur I) alors*

$f^{-1}(0)<f^{-1}(u_n)<f^{-1}(\alpha)$ *et comme* $f^{-1}(0)=0$ *et* $f^{-1}(\alpha)=\alpha$ *(puisque* $f(0)=0$ *et* $f(\alpha)=\alpha$*) alors* $0<u_{n+1}<\alpha$ *(puisque* $f^{-1}(u_n)=u_{n+1}$ *).*

Selon le principe de la récurrence on peut conclure que : $(\forall n\in\mathbf{N}): 0<u_n<\alpha$.

2) a- Montrons que $g\left(\left]0,\alpha\right[\right)=\left]0,1\right[$.

On a vu déjà que g *est continue est strictement croissante sur* $\left]0,+\infty\right[$ *et comme* $\left]0,\alpha\right[\subset\left]0,+\infty\right[$ *alors elle l'est aussi sur* $\left]0,\alpha\right[$ *et donc*

$g\left(\left]0,\alpha\right[\right)=\left]\lim_{x\to 0^+} g(x),\lim_{x\to\alpha^-} g(x)\right[=\left]0,1\right[$, *en effet* $\lim_{x\to 0^+} g(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=0$

Et $\lim_{x\to\alpha^-} g(x)=g(\alpha)=1$ *(car* g *est continue en* α *et* $g(\alpha)=1$*) .*

b- Déduisons que la suite (u_n) *est strictement croissante.*

Du fait que $g\left(\left]0,\alpha\right[\right)=\left]0,1\right[$ *on déduit que* $\left(\forall x\in\left]0,1\right[\right)\ 0<g(x)<1$ *et comme* $(\forall n\in\mathbf{N}): u_n\in\left]0,\alpha\right[$ *alors* $(\forall n\in\mathbf{N}): 0<g(u_n)<1$ *et comme* $(\forall n\in\mathbf{N})\ g(u_n)=\frac{f(u_n)}{u_n}$ *et* $u_n>1$ *alors on en déduit que* $(\forall n\in\mathbf{N})\ 0<f(u_n)<u_n$ *et comme* f^{-1} *est strictement croissante sur* $\left]0,+\infty\right[$ *alors* $(\forall n\in\mathbf{N})\ f^{-1}(0)<f^{-1}(f(u_n))<f^{-1}(u_n)$ *alors* $(\forall n\in\mathbf{N})\ 0<u_n<f^{-1}(u_n)$ *et comme* $f^{-1}(u_n)=u_{n+1}$ *alors on déduit que* $(\forall n\in\mathbf{N})\ u_n<u_{n+1}$ *ce qui signifie que la suite* (u_n) *est strictement croissante.*

c- Comme la suite (u_n) *est strictement croissante et comme elle est majorée (par* α *) alors elle est convergente .*

3) détermination de la limite de (u_n)

La suite (u_n) *est une suite récurrente définie par* $(\forall n\in\mathbf{N})\ u_{n+1}=f^{-1}(u_n)$ *avec* $u_0\in\left]0,\alpha\right[\subset\left[0,\alpha\right]$.

Comme la fonction f^{-1} *est continue sur l'intervalle* $\left[0,\alpha\right]$ *et comme* $f^{-1}(\left[0,\alpha\right])=\left[0,\alpha\right]\subset\left[0,\alpha\right]$ *(car* $\alpha\in\left]1,2\right[$ *) et comme* $u_0\in\left[0,\alpha\right]$ *et comme* (u_n) *est convergente alors la limite de* (u_n) *est solution de l'équation* $f^{-1}(x)=x$ *sur l'intervalle* $\left[0,\alpha\right]$*. Or :*

$$\begin{aligned}(\forall x\in[0,\alpha])\ f^{-1}(x)=x &\Leftrightarrow f(x)=x\\ &\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x=\alpha\end{aligned}$$

Donc On a ou bien $\lim_{n\to+\infty} u_n=0$ *ou bien* $\lim_{n\to+\infty} u_n=\alpha$ *, et comme* $(\forall n\in\mathbf{N})\ 0<u_n<\alpha$ $0<\alpha$ *et comme la suite* (u_n) *est strictement croissante alors* $\lim_{n\to+\infty} u_n=\alpha$ *.*

(en effet, du fait que (u_n) *est strictement croissante on déduit que* $(\forall n\in\mathbf{N}): u_n\geq u_0$ *puis que* $\lim_{n\to+\infty} u_n\geq u_0$ *et comme* $u_0>0$ *alors* $\lim_{n\to+\infty} u_n>0$ *).*

Troisième partie

On considère la fonction F *définie sur l'intervalle* $I=\left[0,+\infty\right[$ *par* $F(x)=\int_x^1 f(t)dt$.

1) a- *Etudions suivant les valeurs de* x *le signe de* $F(x)$.

Soit $x\in\left[0,+\infty\right[$, *on sait que* f *est continue sur* $I=\left[0,+\infty\right[$ *et que* $\left(\forall t\in\left[0,+\infty\right[\right)\ f(t)\geq 0$, *donc on a* $F(x)\geq 0$ *si* $x\leq 1$ *et* $F(x)\leq 0$ *si* $x\geq 1$.

b- *Montrons que* F *est dérivable sur* I *et déterminons* $F'(x)$ *pour tout* $x\in I$.

Remarquons d'abord que $F(x)=-\int_1^x f(t)dt$, *comme la fonction* f *est continue sur* I *et comme* $1\in I$ *alors la fonction :* $x\to\int_1^x f(t)dt$ *est la fonction primitive de* f *qui s'annule en 1 et on a :* $(\forall x\in I)\left(\int_1^x f(t)dt\right)'=f(x)$, *on en déduit que la fonction* F *est dérivable sur* I *et que* $(\forall x\in I)\ F'(x)=-f(x)$.

c- *Déduisons que la fonction* F *est strictement décroissante sur* I.

Comme $(\forall x\in I)\ F'(x)=-f(x)$ *et comme* $\left(\forall x\in\left]0,+\infty\right[\right)\ f(x)\rangle 0$ *alors* $\left(\forall x\in\left]0,+\infty\right[\right)\ F'(x)\langle 0$ *et par suite* F *est strictement décroissante sur* $I=\left[0,+\infty\right[$.

2) a- *Montrons que* $\left(\forall x\in\left[1,+\infty\right[\right): F(x)\leq(1-x)\ln 2$.

Soit $x\in\left[1,+\infty\right[$, *On a* $\left(\forall t\in[1,x]\right)\ f(1)\leq f(t)$ *et comme* $f(1)=\ln 2$ *alors* $\left(\forall t\in[1,x]\right)\ \ln 2\leq f(t)$ *et comme* $1\leq x$ *alors* $\int_1^x \ln 2dt\leq\int_1^x f(t)dt$

Donc $(x-1)\ln 2\leq\int_1^x f(t)dt$ *et par suite* $-\int_1^x f(t)dt\leq-(x-1)\ln 2$

c.à.d $F(x)\leq(1-x)\ln 2$.

b- *Comme d'après la question précédente :* $\left(\forall x\in\left[1,+\infty\right[\right): F(x)\leq(1-x)\ln 2$ *et comme* $\lim_{x\to+\infty}(1-x)\ln 2=-\infty$ ($\ln 2\rangle 0$) *alors* $\lim_{x\to+\infty}F(x)=-\infty$.

3) a- *Soit* $x\in\left]0,+\infty\right[$, *On a :*

$$F(x)=\int_x^1\left(\frac{1}{4}t^4\right)'\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)dt$$

$$=\left[\frac{1}{4}t^4\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)\right]_x^1--\int_x^1\frac{1}{4}t^4\left(\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)\right)'dt$$

$$=\left[\frac{1}{4}t^4\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)\right]_x^1-\int_x^1\frac{1}{4}t^4\left(\frac{-1}{t(t+1)}\right)dt$$

$$=\frac{1}{4}\ln(2)-\frac{4}{4}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{4}\int_x^1\frac{t^3}{+1}dt$$

D'où : $\left(\forall x\in\left]0,+\infty\right[\right)\ F(x)=\frac{\ln(2)}{4}-\frac{x^4}{4}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{4}\int_x^1\frac{t^3}{+1}dt$

b- Soit $x\in\left]0,+\infty\right[$*, calculons l'intégrale* $\int_x^1\frac{t^3}{t+1}dt$.

On a :

$$\int_x^1\frac{t^3}{t+1}dt=\int_x^1 t^2-t+1-\frac{1}{t+1}dt=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2+t-\ln(1+t)\right]_x^1$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+1-\ln 2-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x\ -x+\ln(1+x)$$

D'où $\forall x\in\left]0,+\infty\right[$ *:* $\int_x^1\frac{t^3}{t+1}dt=\frac{5}{6}-\ln 2-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-x+\ln\left(1+x\right)$.

c- D'après les deux questions 3) a et 3) b on déduit que

$$\forall x\in\left]0,+\infty\right[\ :\ F(x)=\frac{5}{24}-\frac{x^3}{12}+\frac{x^2}{8}-\frac{x}{4}+\frac{1}{4}\ln(1+x)-\frac{x^4}{4}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right).$$

d- Comme $\forall x\in\left]0,+\infty\right[\ :\ F(x)=\frac{5}{24}-\frac{x^3}{12}+\frac{x^2}{8}-\frac{x}{4}+\frac{1}{4}\ln(1+x)-\frac{x^4}{4}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

alors $\lim_{x\ 0^+}F(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{5}{24}-\frac{x^3}{12}+\frac{x^2}{8}-\frac{x}{4}+\frac{1}{4}\ln(1+x)-\frac{x}{4}.x^3\ln\left(1+\frac{1}{x}\right).$

Et comme $\lim_{x\to0^+}x^3\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to0^+}f(x)=0$ *et* $\lim_{x\to0^+}x^n=0$ *pour tout* $n\in\mathbf{N}^*$ *alors*

$\lim_{x\to0^+}F(x)=\frac{5}{24}$.

Comme $\left(\forall x\in I=\left[0,+\infty\right[\right):F(x)=\int_x^1 f(t)dt$ *et comme* $0\in I$ *alors* $F(0)=\int_0^1 f(t)dt$

Et comme F est continue à droite en 0 (car dérivable) alors $\lim_{x\to0^+}F(x)=F(0)$

Et comme $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x)=\frac{5}{24}$ *et comme la limite d'une fonction si elle existe est unique alors* $\int_0^1 f(t)dt=\frac{5}{24}$.

4) *Considérons la suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *définie par :* $v_n=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\left(F\left(\frac{2k+1}{2n}\right)-F\left(\frac{k}{n}\right)\right)$.

a- *Montrons que pour tout* $n\in\mathbb{N}^*$ *et pour tout* $k\in\{0,1,\ldots,n-1\}$, *on a :*

$$-\frac{1}{2n}f\left(\frac{2k+1}{2n}\right)\leq F\left(\frac{2k+1}{2n}\right)-F\left(\frac{k}{n}\right)\leq-\frac{1}{2n}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ *et soit* $k\in\{0,1,\ldots,n-1\}$, *appliquant le TAF à la fonction* F *sur L'intervalle* $\left[\frac{k}{n},\frac{2k+1}{2n}\right]$.

On a F *est dérivable sur* $[0,+\infty[$ *et comme* $\left[\frac{k}{n},\frac{2k+1}{2n}\right]\subset[0,+\infty[$ *alors elle est continue sur* $\left[\frac{k}{n},\frac{2k+1}{2n}\right]$ *et dérivable sur* $\left]\frac{k}{n},\frac{2k+1}{2n}\right[$, *donc d'après le TAF*

$\left(\exists c\in\left]\frac{k}{n},\frac{2k+1}{2n}\right[\right)$ *tel que* $F\left(\frac{2k+1}{2n}\right)-F\left(\frac{k}{n}\right)=F'(c)\left(\frac{2k+1}{2n}-\frac{k}{n}\right)=-f(c)\frac{1}{2n}$

Et comme f *est strictement croissante sur* $[0,+\infty[$ *et comme* $\frac{k}{n}\langle c\langle\frac{2k+1}{2n}$

alors $f\left(\frac{k}{n}\right)\langle f(c)\langle f\left(\frac{2k+1}{2n}\right)$ *et par suite* $-\frac{1}{2n}f\left(\frac{2k+1}{2n}\right)\langle F\left(\frac{2k+1}{2n}\right)-F\left(\frac{k}{n}\right)\langle-\frac{1}{2n}f\left(\frac{k}{n}\right)$

b- *Déduisons que* $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ -\frac{1}{2n}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\leq v_n\leq-\frac{1}{2n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)$

On a d'après la question précédente :

$(\forall n\in\mathbb{N}^*)(\forall k\in\{0,1,\ldots,n-1\})\ -\frac{1}{2n}f\left(\frac{2k+1}{2n}\right)\leq F\left(\frac{2k+1}{2n}\right)-F\left(\frac{k}{n}\right)\leq-\frac{1}{2n}f\left(\frac{k}{n}\right)$

Et en passant à la sommation on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n-1}-\frac{1}{2n}f\left(\frac{2k+1}{2n}\right)\leq\sum_{k=0}^{n-1}\left(F\left(\frac{2k+1}{2n}\right)-F\left(\frac{k}{n}\right)\right)\leq\sum_{k=0}^{n-1}-\frac{1}{2n}f\left(\frac{k}{n}\right)\quad (*)$$

On a : $(\forall k\in\{0,1,\ldots,n-1\})\ \frac{2k+1}{2n}\langle\frac{k+1}{n}$

Et comme f *est strictement croissante sur* $[0,+\infty[$ *alors*

$(\forall k\in\{0,1,\ldots,n-1\})\ f\left(\frac{2k+1}{2n}\right)\leq f\left(\frac{k+1}{n}\right)$ *donc* $(\forall k\in\{0,1,\ldots,n-1\})\ -f\left(\frac{k+1}{n}\right)\leq-f\left(\frac{2k+1}{2n}\right)$

Et donc $-\frac{1}{2n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k+1}{n}\right)\leq-\frac{1}{2n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{2k+1}{2n}\right)$ *et d'après (*) on obtient :*

$-\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq v_n \leq -\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$ *et comme* $\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ *alors*

$$-\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq v_n \leq -\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

c- D'après la question précédente on a : $\left(\forall n \in \mathbf{N}^*\right) : -\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq v_n \leq -\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$

et comme f *est continue sur l'intervalle* $[0,1]$ *alors les deux suites* $(s_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *et* $(S_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *définie par* $\left(\forall n \in \mathbf{N}^*\right)$ $s_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$ *et* $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ *sont convergentes et on a :* $\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 f(t)dt = \frac{5}{24}$

donc les deux suites $\left(-\frac{1}{2}s_n\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *et* $\left(-\frac{1}{2}S_n\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *sont convergentes et on a :*

$\lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{2}s_n = \lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{2}S_n = \frac{-5}{48}$ *et comme* $\left(\forall n \in \mathbf{N}^*\right) : -\frac{1}{2}S_n \leq v_n \leq -\frac{1}{2}s_n$ *alors la suite* $(v_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *est convergente et on a :* $\lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{-5}{48}$.

End