التمرين الأول

1- $p(R_U)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$ و $P(B_U)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

www.SalmiMath.com

2- أ) $P(B_V / R_U)=\frac{4}{7}$

ب) $P(B_V / B_U)=\frac{2}{3}$

3- باستعمال صيغة الاحتمالات الكلية نجد :

$$\begin{aligned}P(B_V)&=P\left(B_V\cap\left(R_U\cup B_U\right)\right)\\&=P\left(\left(B_V\cap R_U\right)\cup\left(B_V\cap B_U\right)\right)\\&=P(B_V\cap R_U)+P\left(B_V\cap B_U\right)\\&=P\left(B_V / R_U\right)\times P\left(R_U\right)+P\left(B_V / B_U\right)\times P\left(B_U\right)\\&=\frac{4}{7}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\\&=\frac{2}{7}+\frac{1}{3}=\frac{13}{21}\end{aligned}$$

4- $P\left(R_V\right)=P\left(\overline{B_V}\right)=1-P\left(B_V\right)=1-\frac{13}{21}=\frac{8}{21}$ حيث هو $\overline{B_V}$ الحدث المضاد ل B_V

خلاصة

$P(B_V / B_U)=\frac{2}{3}$	$P(B_V / R_U)=\frac{4}{7}$	$p\left(R_U\right)=\frac{1}{2}$	$P\left(B_U\right)=\frac{1}{2}$
$P\left(R_V\right)=\frac{8}{13}$	$P\left(B_V\right)=\frac{13}{21}$		

التمرين الثاني

1- ليكن $\left(z,z',z''\right)\in\mathbb{C}^3$ لدينا

$$\begin{aligned}\left[M\left(z\right)*M\left(z'\right)\right]*M\left(z''\right)&=\left[M\left(z\right)+M\left(z'\right)-M\left(0\right)\right]*M\left(z''\right)\\&=M\left(z\right)+M\left(z'\right)-M\left(0\right)+M\left(z''\right)-M\left(0\right)\\&=M\left(z\right)+\left[M\left(z'\right)+M\left(z''\right)-M\left(0\right)\right]-M\left(0\right)\\&=M\left(z\right)+\left[M\left(z'\right)*M\left(z''\right)\right]-M\left(0\right)\\&=M\left(z\right)*\left[M\left(z'\right)*M\left(z''\right)\right]\end{aligned}$$

إذن * تجميعي في E

www.SalmiMath.com

ليكن $(z,z',)\in\mathbb{C}^2$ لدينا

$$\begin{aligned}M(z)*M(z')&=M(z)+M(z')-M(0)\\&=M(z')+M(z)-M(0)\\&=M(z')*M(z)\end{aligned}$$

www.SalmiMath.com

إذن * تبادلي في E

ليكن $z\in E$ لدينا

$$M(z)*M(0)=M(z)+M(0)-M(0)=M(z)$$

و * تبادلي في E

إذن ل * عنصر محايد في E هو $M(0)$

ليكن $z\in\mathbb{C}$ لنحل في E المعادلة $M(z)*M(z')=M(0)$ حيث $M(z')$ هو المجهول

لدينا

$$\begin{aligned}M(z)*M(z')=M(0)&\Leftrightarrow M(z)+M(z')-M(0)=M(0)\\&\Leftrightarrow M(z')=2.M(0)-M(z)\end{aligned}$$

و * تبادلي في E

إذن لكل عنصر $M(z)$ من E مماثل بالنسبة ل * و $(M(z))'=2.M(0)-M(z)$

نستنتج مما سبق أن $(E,*)$ زمرة تبادلية

2- أ) لنبين أن φ تشاكل من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو $(E,\times)$

$$\forall(z,z')\in\mathbb{C}^2;\exists(x,y,x',y')\in\mathbb{R}^4\ /\begin{cases}z=x+iy\\z'=x'+iy'\end{cases}$$

$$\varphi(z\times z')=M(zz')=M\left(xx'-yy'+i(xy'+x'y)\right)$$

و

$$\varphi(z)\times\varphi(z')=M(z)\times M(z')$$

$$=\begin{pmatrix}x+2y&0&5y\\0&1&0\\-y&0&x-2y\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}x'+2y'&0&5y'\\0&1&0\\-y'&0&x'-2y'\end{pmatrix}$$

www.SalmiMath.com

$$=\begin{pmatrix}xx'+2xy'+2x'y+4yy'-5yy'&0&-5xy'+10yy'+5yx'-10yy'\\0&1&0\\-yx'-2yy'-xy'+2yy'&0&-5yy'+xx'-2yx'-2xy'+4yy'\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}xx'-yy'+2(xy'+x'y)&0&-5(yx'+xy')\\0&1&0\\-(yx'+xy')&1&xx'-yy'-2(xy'+x'y)\end{pmatrix}$$

$$=M\left(xx'-yy'+i\left(xy'+x'y\right)\right)$$

$$=\varphi\left(z\times z'\right)$$

نستنتج أن $\left(\forall\left(z,z'\right)\in\mathbb{C}^2\right);\varphi\left(z\times z'\right)=\varphi\left(z\right)+\varphi\left(z'\right)$

www.SalmiMath.com

φ تشاكل من $\left(\mathbb{C}^*,\times\right)$ نحو $\left(E,\times\right)$

ب) بما أن φ تشاكل من $\left(\mathbb{C}^*,\times\right)$ نحو $\left(E,\times\right)$ و $\left(\mathbb{C}^*,\times\right)$ زمرة تبادلية فإن $\left(\varphi\left(\mathbb{C}^*\right),\times\right)$ زمرة تبادلية

و بما أن $\varphi\left(\mathbb{C}^*\right)=\varphi\left(\mathbb{C}\right)-\left\{\varphi\left(0\right)\right\}=E-\left\{M\left(0\right)\right\}$

فإن $\left(E-\left\{M\left(0\right)\right\},\times\right)$ زمرة تبادلية

3- لدينا $\left(E,*\right)$ زمرة تبادلية

و $\left(\varphi\left(E-\left\{M\left(0\right)\right\}\right),\times\right)$ زمرة تبادلية

بقي أن نبين أن الضرب توزيعي بالنسبة ل *

ليكن $\left(z,z',z''\right)\in\mathbb{C}^3$ لدينا :

$$M\left(z\right)\times\left(M\left(z'\right)*M\left(z''\right)\right)=M\left(z\right)\times\left(M\left(z'\right)+M\left(z''\right)-M\left(0\right)\right)$$

$$=M\left(z\right)\times M\left(z'\right)+M\left(z\right)\times M\left(z''\right)-M\left(z\right)\times M\left(0\right)$$
$$=M\left(zz'\right)+M\left(zz''\right)-M\left(0\right)$$
$$=M\left(zz'\right)*M\left(zz''\right)$$
$$=\left(M\left(z\right)\times M\left(z'\right)\right)*\left(M\left(z\right)\times M\left(z''\right)\right)$$

إذن $\forall\left(z,z',z''\right)\in\mathbb{C}^3;M\left(z\right)\times\left(M\left(z'\right)*M\left(z''\right)\right)=\left(M\left(z\right)\times M\left(z'\right)\right)*\left(M\left(z\right)\times M\left(z''\right)\right)$

و الضرب تبادلي في E

إذن الضرب توزيعي بالنسبة ل * في E

نستنتج مما سبق أن $\left(E,*,\times\right)$ جسم تبادلي

التمرين الثالث

1- أ)

$$\Delta=\left(\left(1+\sqrt{3}\right)\left(1+i\right)\right)^2-16i$$
$$=\left(4+2\sqrt{3}\right)2i-16i$$
$$=\left(-4+2\sqrt{3}\right)2i \quad =-2i\left(4-2\sqrt{3}\right)=\left(\left(1-\sqrt{3}\right)\left(1-i\right)\right)^2$$

www.SalmiMath.com

www.SalmiMath.com

إذن $\Delta = =\left(\left(1-\sqrt{3}\right)(1-i)\right)^2$

ب) $\Delta \neq 0$ إذن للمعادلة (E) حلين هما

$$z_1=\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)(1+i)+\left(1-\sqrt{3}\right)(1-i)}{2}=\frac{2+2i\sqrt{3}}{2}=1+i\sqrt{3}=\left[2,\frac{\pi}{3}\right]$$

$$z_2=\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)(1+i)-\left(1-\sqrt{3}\right)(1-i)}{2}=\frac{2\sqrt{3}+2i}{2}=\sqrt{3}+i=\left[2,\frac{\pi}{6}\right]$$

و منه

حلا المعادلة (E) هما $\left[2,\frac{\pi}{3}\right]$ و $\left[2,\frac{\pi}{6}\right]$

2- أ) نضع $z=x+iy\,/\,(x,y)\in\mathbb{R}^2$ و لتكن M صورة z في المستوى العقدي

$$M\in(D)\Leftrightarrow z=\frac{1}{2}a\bar{z}\Leftrightarrow x+iy=\frac{1}{2}\left(1+i\sqrt{3}\right)(x-iy)$$

$$\Leftrightarrow 2x+2iy=x+y\sqrt{3}+i\left(x\sqrt{3}-y\right)$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x=x+y\sqrt{3}\\2y=x\sqrt{3}-y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-y\sqrt{3}=0\\x\sqrt{3}-3y=0\end{cases}\Leftrightarrow x-y\sqrt{3}=0$$

إذن

معادلة المستقيم (D) هي $x-y\sqrt{3}=0$

النقطة $B\left(\sqrt{3},1\right)$ تحقق معادلة (D) إذن $B\in(D)$

ب) لدينا $\frac{2}{|z-b|^2}=\frac{2}{(\bar{z}-\bar{b})(z-b)}$

www.SalmiMath.com

لنبين أن $\frac{2}{\bar{z}-\bar{b}}=\frac{b^2}{z'-b}$

لدينا $2\left(z'-b\right)-b^2\left(\bar{z}-\bar{b}\right)=2\left(a\bar{z}-b\right)-b^2\bar{z}-b^2\bar{b}=\left(2a-b^2\right)\bar{z}-b\left(2-b\bar{b}\right)$

و $b\bar{b}=|b|^2=2\Rightarrow 2-b\bar{b}=0$ و $2a-b^2=2+2i\sqrt{3}-\left(3+2i\sqrt{3}-1\right)=0$

إذن $\frac{2}{\bar{z}-\bar{b}}=\frac{b^2}{z'-b}$ و بضرب طرفي المعادلة في $\frac{1}{z-b}$ نحصل على $\frac{2}{\bar{z}-\bar{b}}\times\frac{1}{z-b}=\frac{b^2}{z'-b}\times\frac{1}{z-b}$

و منه

$$\frac{2}{|z-b|^2}=\frac{b^2}{(z'-b)(z-b)}$$

ج) ليكن $z \in \mathbb{C}-\{b\}$ لدينا

$$\frac{2}{|z-b|^2}=\frac{b^2}{(z'-b)(z-b)} \Rightarrow \frac{2}{|z-b|^2}\times\frac{z-b}{b}=\frac{b}{(z'-b)}$$

www.SalmiMath.com

$$\Rightarrow \arg\left(\frac{2}{|z-b|^2}\times\frac{z-b}{b}\right)\equiv \arg\left(\frac{b}{(z'-b)}\right)[2\pi]$$

$$\Rightarrow \arg\overbrace{\left(\frac{2}{|z-b|^2}\right)}^{\in\mathbb{R}_*^+}+\arg\left(\frac{z-b}{b}\right)\equiv \arg\left(\frac{b}{(z'-b)}\right)[2\pi]$$

$$\Rightarrow \arg\left(\frac{z-b}{b}\right)\equiv \arg\left(\frac{b}{(z'-b)}\right)[2\pi]$$

$$\Rightarrow \left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{BM}\right)\equiv\left(\overrightarrow{BM'},\overrightarrow{OB}\right)[2\pi]$$

و بما أن O و B نقطتين مختلفتين من (D) نستنتج أن :

المستقيم (D) هو منصف الزاوية $\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BM'}\right)$

التمرين الرابع

1- أ) $\lim\limits_{x\to 0^+} f_n(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\ln(x)-\frac{n}{x}=-\infty$ إذن محور الأراتيب مقارب ل (C_n)

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)-\frac{n}{x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f_n(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}-\frac{n}{x^2}=0$

إذن ل (C_n) فرع شلجمي في اتجاه محور الأفاصيل بجوار $+\infty$

ب) الدالة f_n قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و $(\forall x\in]0,+\infty[); f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{n}{x^2}=\frac{x+n}{x^2}$

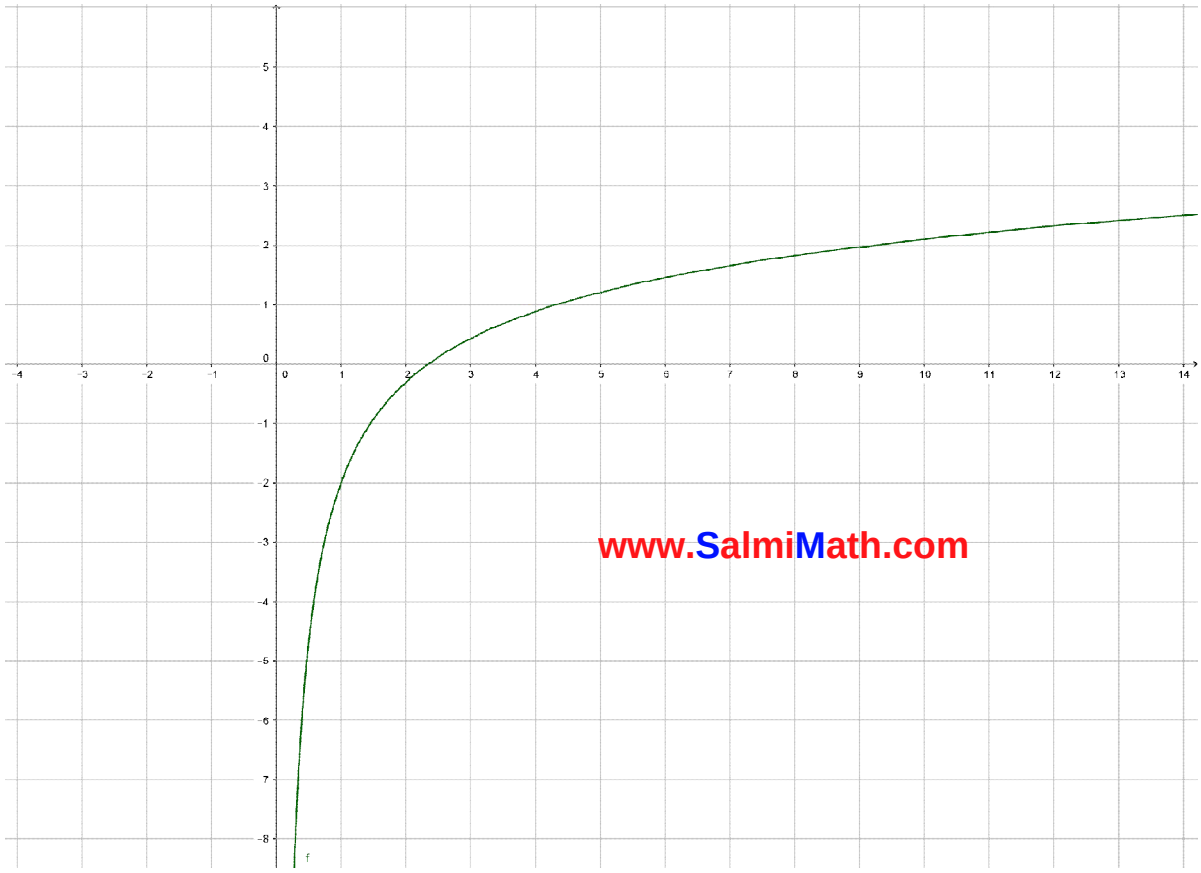
n و x موجبين قطعا إذن f_n تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$

و منه جدول تغيرات f_n كما يلي

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

www.SalmiMath.com

ج) (C_2) مبيان f_2



2- f_n متصلة و تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$ إذن f_n تقابل من $]0,+\infty[$ نحو $f_n(]0,+\infty[)$

و لدينا $f_n(]0,+\infty[)=\left]\lim\limits_{x\to 0^+} f_n(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)\right[=]-\infty,+\infty[=\mathbb{R}$

و منه $\boxed{f_n \text{ تقابل من }]0,+\infty[\text{ نحو } \mathbb{R}}$

3- - أ) بما أن f_n تقابل من $]0,+\infty[$ نحو $\mathbb{R}$ و $0\in\mathbb{R}$ فإن ل 0 سابق وحيد α_n ب f_n من المجال $]0,+\infty[$

4-

إذن $\boxed{(\forall n\in\mathbb{N}^*);\exists!\alpha_n\in]0,+\infty[\ / \ f_n(\alpha_n)=0}$

ب) لدينا

$(\forall x\in]0,+\infty[)$

$$f_{n+1}(x)-f_n(x)=\ln(x)-\frac{n+1}{x}-\ln(x)+\frac{n}{x}=-\frac{1}{x}$$

إذن $\boxed{(\forall x\in]0,+\infty[);f_{n+1}(x)<f_n(x)}$

ج) $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right),\alpha_n\in\left]0,+\infty\right[$

إذن حسب السؤال 3- ب) $f_n\left(\alpha_{n+1}\right)>f_{n+1}\left(\alpha_{n+1}\right)$

وبما أن $f_n\left(\alpha_n\right)=f_{n+1}\left(\alpha_{n+1}\right)=0$ و f_n تزايدية قطعا على $\left]0,+\infty\right[$

فإن $f_n\left(\alpha_{n+1}\right)>f_{n+1}\left(\alpha_{n+1}\right)\Rightarrow f_n\left(\alpha_{n+1}\right)>f_n\left(\alpha_n\right)\Rightarrow\alpha_{n+1}>\alpha_n$

نستنتج أن $\boxed{\text{المتتالية } \left(\alpha_n\right)_{n\geq 1} \text{ تزايدية قطعا}}$

www.SalmiMath.com

5- أ) نضع $\lambda(x)=x-\ln x$

$$\left(\forall x\in\left]0,+\infty\right[\right);\lambda'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$$

إذن λ تزايدية قطعا على $\left[1,+\infty\right[$ و تناقصية قطعا على $\left]0,1\right]$

منه $0<x\leq 1\Rightarrow\lambda(x)\geq\lambda(1)$ و $x\geq 1\Rightarrow\lambda(x)\geq\lambda(1)$

و بما أن $\lambda(1)=1$ فإن $\left(\forall x\in\left]0,+\infty\right[\right);\lambda(x)\geq 1$ و منه $\left(\forall x\in\left]0,+\infty\right[\right);\lambda(x)>0$

نستنتج أن $\boxed{\left(\forall x\in\left]0,+\infty\right[\right);x>\ln x}$

ب) ليكن $n\in\mathbb{N}^*$ لدينا $f_n\left(\alpha_n\right)=0\Rightarrow\ln\left(\alpha_n\right)=\frac{n}{\alpha_n}$

و بما أن $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right);\alpha_n>0\Rightarrow\ln\alpha_n<\alpha_n$ فإن $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right);\alpha_n>\frac{n}{\alpha_n}$ ومنه $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right);\alpha_n>\sqrt{n}$

لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}=+\infty$ إذن $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n=+\infty}$

6- أ) لدينا f_n متصلة على $\left]0,+\infty\right[$ و $\left[\alpha_n,\alpha_{n+1}\right]\subset\left]0,+\infty\right[$ إذن f_n متصلة على $\left[\alpha_n,\alpha_{n+1}\right]$

ومنه حسب مبرهنة المتوسط يوجد c_n من $\left[\alpha_n,\alpha_{n+1}\right]$ بحيث $\frac{1}{\alpha_{n+1}-\alpha_n}\int_{\alpha_n}^{\alpha_{n+1}}f_n(x)dx=f_n\left(c_n\right)$

نستنتج أن $\boxed{\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right);I_n=f_n\left(c_n\right)}$

ب) لدينا

$\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right);$

$\alpha_n\leq c_n\leq\alpha_{n+1}\Rightarrow f_n\left(\alpha_n\right)\leq f_n\left(c_n\right)\leq f_n\left(\alpha_{n+1}\right)$

$\Rightarrow 0\leq I_n\leq\ln\left(\alpha_{n+1}\right)-\frac{n}{\alpha_{n+1}}$ $\left(f_{n+1}\left(\alpha_{n+1}\right)=0\Rightarrow\ln\left(\alpha_{n+1}\right)=\frac{n+1}{\alpha_{n+1}}\right)$

$\Rightarrow 0\leq I_n\leq\frac{n+1}{\alpha_{n+1}}-\frac{n}{\alpha_{n+1}}$

$\Rightarrow 0\leq I_n\leq\frac{1}{\alpha_{n+1}}$

ومنه

$$\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right);0\le I_n\le\frac{1}{\alpha_{n+1}}$$

ج) بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_{n+1}=+\infty$

فإن

$$\lim_{n\to+\infty}I_n$$

التمرين الخامس

1) أ) الدالة $t\to\frac{1}{\ln t}$ متصلة على $[n,+\infty[$ و g_n هي أصليتها التي تنعدم عند n

نستنتج أن g_n

$$\left(\forall x\in[n,+\infty[\right);g_n'(x)=\frac{1}{\ln x}\text{ و }[n,+\infty[\text{ قابلة للاشتقاق على}$$

ب) لكل x من $[n,+\infty[$ لدينا $\ln x>0$ و منه $\left(\forall x\in[n,+\infty[\right);g_n'(x)>0$

إذن

$$\text{الدالة } g_n \text{ تزايدية قطعا على } [n,+\infty[$$

2) أ) لدينا $\left(\forall x\in\mathbb{R}^+\right);\ln(1+x)\le x$

إذن بوضع $x+1=t$ نحصل على $\left(\forall t\in[1,+\infty[\right);\ln(t)\le t-1$

ليكن t من $[n,+\infty[$

لدينا

$$\begin{aligned}
t\ge n\Rightarrow t>1&\\
\Rightarrow\ln(t)&\le t-1\\
\Rightarrow\frac{1}{\ln(t)}&\ge\frac{1}{t-1}\\
\Rightarrow\int_n^x\frac{1}{\ln(t)}dt&\ge\int_n^x\frac{1}{t-1}dt\\
\Rightarrow g_{n,}(x)&\ge\left[\ln(t-1)\right]_n^x\\
\Rightarrow g_{n,}(x)&\ge\ln(\frac{x-1}{n-1})
\end{aligned}$$

www.SalmiMath.com

و منه

$$\left(\forall x\ge n\right);g_n(x)\ge\ln\left(\frac{x-1}{n-1}\right)$$

ب) لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{x-1}{n-1}\right)=+\infty$ و $(\forall x\geq n);g_n(x)\geq\ln\left(\dfrac{x-1}{n-1}\right)$ إذن حسب خاصيات النهايات و الترتيب

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}g_n(x)=+\infty}$$

3) أ) g_n قابلة للاشتقاق على $[n,+\infty[$ حسب 1) أ) إذن فهي متصلة على $[n,+\infty[$

و g_n تزايدية قطعا على $[n,+\infty[$

إذن g_n تقابل من $[n,+\infty[$ نحو $g_n([n,+\infty[)$

و لدينا $g_n([n,+\infty[)=\left[g_n(n),\lim\limits_{x\to+\infty}g_n(x)\right[=[0,+\infty[$

نستنتج أن $\boxed{g_n \text{ تقابل من } [n,+\infty[\text{ نحو } [0,+\infty[}$

ب) بما أن g_n تقابل من $[n,+\infty[$ نحو $[0,+\infty[$ و $1\in[0,+\infty[$ فإن ل 1 سابق وحيد ب g_n في $[n,+\infty[$ نرمز له ب u_n

نستنتج أن $(\forall n\geq 2);\exists!u_n\geq n:g_n(u_n)=1$ أي

$$\boxed{(\forall n\geq 2);\exists!u_n\geq n:\int_n^{u_n}\frac{1}{\ln t}=1}$$

4) أ) ليكن $n\geq 2$ لدينا

$$\int_{u_n}^{u_{n+1}}\frac{1}{\ln t}dt=\int_{u_n}^{n}\frac{1}{\ln t}dt+\int_{n}^{n+1}\frac{1}{\ln t}dt+\int_{n+1}^{u_{n+1}}\frac{1}{\ln t}dt$$

$$=-1+\int_n^{n+1}\frac{1}{\ln t}dt+1$$

www.SalmiMath.com

$$=\int_n^{n+1}\frac{1}{\ln t}dt$$

إذن $\boxed{(\forall n\geq 2);\int_{u_n}^{u_{n+1}}\frac{1}{\ln t}dt=\int_n^{n+1}\frac{1}{\ln t}dt}$

ب) لدينا

$$(\forall n\geq 2);g_n(u_{n+1})-g_n(u_n)=\int_n^{u_{n+1}}\frac{1}{\ln t}dt-\int_n^{u_n}\frac{1}{\ln t}dt$$

$$=\int_n^{u_{n+1}}\frac{1}{\ln t}dt+\int_{u_n}^{n}\frac{1}{\ln t}dt$$

$$=\int_{u_n}^{u_{n+1}}\frac{1}{\ln t}dt$$

$$=\int_n^{n+1}\frac{1}{\ln t}dt$$

لكل $t \geq n$ لدينا $\frac{1}{\ln t} > 0$ إذن $\int_n^{n+1} \frac{1}{\ln t} dt > 0$ ومنه $(\forall n \geq 2); g_n(u_{n+1}) - g_n(u_n) > 0$

وبما أن g_n تزايدية قطعا على $[n, +\infty[$ فإن

المتتالية $(u_n)_{n\geq 2}$ تزايدية قطعا

ج) لدينا $(\forall n \geq 2); u_n \geq n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$

إذن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

www.SalmiMath.com

www.SalmiMath.com