Exercice 1 (12 points)

Pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x)=\frac{-2e^x}{1+e^x}+nx$$

Soit (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. (On prendra $|\vec{i}|=\|\vec{j}\|=1\text{cm}$)

Partie I :

1 **a** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}(f_n(x)-nx+2)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu. **(0.5pt)**

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}(f_n(x)-nx+2)&=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-2e^x}{1+e^x}+nx-nx+2\right)\\&=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-2e^x}{1+e^x}+2\right)\\&=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{1+e^x}\right)\\&=0\end{aligned}$$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f_n(x)-nx+2\right)=0$

D'où : la courbe C_n admet une asymptote d'équation $y=nx-2$ au voisinage de $+\infty$.

b Montrer que la courbe (C_n) admet, en $-\infty$, une asymptote (Δ_n) dont on déterminera une équation cartésienne. **(0.5pt)**

- **Si** $n=0$**, alors :**

$$\lim_{x\to-\infty}f_0(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-2e^x}{1+e^x}\right)=\left(\frac{0}{1+0}\right)=0$$

D'où : la courbe C_n admet une asymptote (Δ_0) d'équation $y=0$ au voisinage de $-\infty$.

- **Si** $n\geq1$**, alors on a :**

$$\lim_{x\to-\infty}f_n(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-2e^x}{1+e^x}+nx\right)=\left(\frac{0}{1+0}+(-\infty)\right)=-\infty$$

On a :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f_n(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}\frac{-2e^x}{1+e^x}+n\right)=\left(0\times\frac{0}{1+0}+n\right)=n$$

On a :

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f_n(x)-nx\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-2e^x}{1+e^x}+nx-nx\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-2e^x}{1+e^x}\right)=0$$

D'où : la courbe C_n admet une asymptote (Δ_n) d'équation $y=nx$ au voisinage de $-\infty$.

2 (a) Montrer que la fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que : **(0.5pt)**

$$(\forall x \in \mathbb{R}); \quad f_n'(x) = \frac{-2e^x}{(1+e^x)^2} + n$$

On a : $x \mapsto -2e^x$, $x \mapsto 1+e^x$ et $x \mapsto nx$ sont des fonctions dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et produit des fonctions dérivable sur $\mathbb{R}$. Or $1+e^x \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$,

D'où : la fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme, produit et quotient des fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x de $\mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f'_n(x) &= \frac{-2e^x(1+e^x) + 2e^x e^x}{(1+e^x)^2} + n \\ &= \frac{-2e^x - 2e^{2x} + 2e^{2x}}{(1+e^x)^2} + n \\ &= \frac{-2e^x}{(1+e^x)^2} + n \end{aligned}$$

D'où : $\left(\forall x \in \mathbb{R}\right) \;;\; f_n'(x) = \dfrac{-2e^x}{(1+e^x)^2} + n$

(b) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) \;;\; \dfrac{4e^x}{(1+e^x)^2} \leq 1$ **(0.5pt)**

On a :

$$\begin{aligned} \frac{4e^x}{(1+e^x)^2} - 1 &= \frac{4e^x - (1+e^x)^2}{(1+e^x)^2} \\ &= \frac{4e^x - 1 - 2e^x + e^{2x}}{(1+e^x)^2} \\ &= \frac{-1 + 2e^x + e^{2x}}{(1+e^x)^2} \\ &= \frac{-(1-e^x)^2}{(1+e^x)^2} < 0 \end{aligned}$$

D'où : $\left(\forall x \in \mathbb{R}\right) \;;\; \dfrac{4e^x}{(1+e^x)^2} \leq 1$

(c) En déduire le sens de variation de la fonction f_n sur $\mathbb{R}$. **(0.5pt)**

(On distinguera les deux cas : $n = 0$ et $n \geq 1$)

- Si $n = 0$, alors : $\forall x \in \mathbb{R}$; $f_0'(x) = \dfrac{-2e^x}{(1+e^x)^2} < 0$,

  D'où : pour $n = 0$, la fonction f_0 est décroissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{4e^x}{(1+e^x)^2} \leq 1 &\Leftrightarrow \frac{-2e^x}{(1+e^x)^2} \geq \frac{-1}{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{-2e^x}{(1+e^x)^2} + n \geq \frac{-1}{2} + 1 \\ &\Leftrightarrow f'_n(x) \geq \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow f'_n(x) \geq 0 \end{aligned}$$

  D'où : pour tout entier $n \geq 1$, la fonction f_n est croissante sur $\mathbb{R}$.

3 ⓐ Déterminer l'équation de la tangente à la courbe (C_n) au point I d'abscisse 0 **(0.5pt)**

Soit (T) la tangente à la courbe (C_n) au point $I(0;-1)$, (car $f_n(0)=-1$), alors :

$$(T)\ :\ y = f'_n(0)(x-0)+f_n(0) \Leftrightarrow (T)\ :\ y=\left(\frac{-2}{4}+n\right)x-1$$
$$\Leftrightarrow (T)\ :\ y=\left(n-\frac{1}{2}\right)x-1$$

D'où : $\boxed{(T)\ :\ y=\left(n-\frac{1}{2}\right)x-1}$

ⓑ Montrer que le point I est le seul point d'inflexion de la courbe (C_n) **(0.5pt)**

La fonction f'_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x de $\mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned} f''_n(x) &= \frac{-2e^x(1+e^x)^2+2e^x\left(2\left(1+e^x\right)e^x\right)}{(1+e^x)^4} \\ &= \frac{-2e^x\left(1+e^x\right)+4e^{2x}}{(1+e^x)^3} = \frac{-2e^x-2e^{2x}+4e^{2x}}{(1+e^x)^3} \\ &= \frac{2e^x\left(e^x-1\right)}{(1+e^x)^3}\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} f''_n(x)=0 &\Leftrightarrow 2e^x\left(e^x-1\right)=0 \\ &\Leftrightarrow e^x-1=0 \\ &\Leftrightarrow e^x=1 \\ &\Leftrightarrow x=0\end{aligned}$$

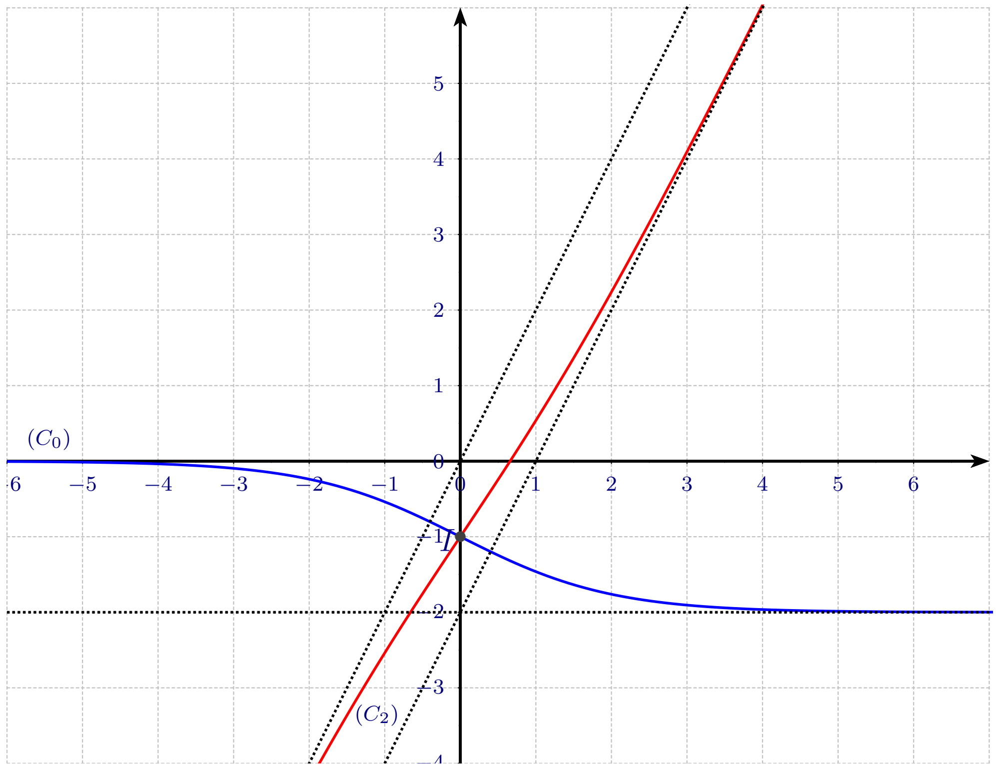
Si $x>0$, alors $e^x>1$, alors $e^x-1>0$, alors $\dfrac{2e^x(e^x-1)}{(1+e^x)^3}>0$, alors $f''_n(x)>0$

Si $x<0$, alors $e^x<1$, alors $e^x-1<0$, alors $\dfrac{2e^x(e^x-1)}{(1+e^x)^3}<0$, alors $f''_n(x)<0$

Donc $f''_n(x)$ change de signe au voisinage de 0.

D'où : $\boxed{\text{le point } I(0;-1) \text{ est le seul point d'inflexion de la courbe } (C_n).}$

4 Représenter graphiquement dans le même repère, les deux courbes (C_0) et (C_2). **(0.5pt)**



5 Pour tout réel $t > 0$, on pose $A(t)$ l'aire du domaine plan limité par (C_n) et les droites d'équations respectives : $y = nx - 2, x = 0$ et $x = t$

a Calculer $A(t)$ pour tout $t > 0$ **(0.5pt)**

$$\begin{aligned} A(t) &= \int_0^t f_n(x) - nx + 2dx \\ &= \int_0^t \frac{-2e^x}{1+e^x} + nx - nx + 2dx \\ &= \int_0^t \frac{-2e^x}{1+e^x} + 2dx = \Big[-2\ln(1+e^x) + 2x\Big]_0^t \\ &= -2\ln\left(1+e^t\right) + 2t + 2\ln(2) \\ &= 2t + 2\ln\left(\frac{2}{1+e^t}\right) \end{aligned}$$

D'où : $A(t) = 2t + 2\ln\left(\frac{2}{1+e^t}\right) \ cm^2$

www.elmaths.com

b Calculer $\lim\limits_{t\to+\infty} A(t)$ **(0.5pt)**

$$\begin{aligned} \lim_{t\to+\infty} A(t) &= \lim_{t\to+\infty} \left(-2\ln\left(1+e^t\right) + 2t + 2\ln 2\right) \\ &= \lim_{t\to+\infty} -2\left(\ln\left(1+e^t\right) - \ln\left(e^t\right)\right) + \ln 4 \\ &= \lim_{t\to+\infty} -2\ln\left(\frac{1+e^t}{e^t}\right) + \ln 4 \\ &= \lim_{t\to+\infty} -2\ln\left(1+\frac{1}{e^t}\right) + \ln 4 \\ &= -2\ln(1+0) + \ln 4 \\ &= \ln 4 \end{aligned}$$

D'où : $\lim\limits_{t\to+\infty} A(t) = \ln 4 \ cm^2$

Partie II : On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par : $u_0 = 0$ et $(\forall n \in \mathbb{N});\quad u_{n+1} = f_0(u_n)$

1 **a** Montrer que l'équation $f_0(x) = x$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ **(0.5pt)**

Pour tout x de $\mathbb{R}$, on considère la fonction : $g(x) = f_0(x) - x$. On a la fonction g est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$g'(x) = f_0'(x) - 1 = \frac{-2e^x}{(1+e^x)^2} - 1 < 0$$

Donc la fonction g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty > 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty < 0$, donc $0 \in]-\infty, +\infty[$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$, d'où : l'équation $f_0(x) = x$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$

b Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R});\quad \left|f_0'(x)\right| \leq \frac{1}{2}$ **(0.5pt)**

Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $f'_0(x) = \frac{-2e^x}{(1+e^x)^2}$, donc $\left|f'_0(x)\right| = \frac{2e^x}{(1+e^x)^2}$

D'après la question **I)2)b)**, on a pour tout x de $\mathbb{R}$

$$\frac{4e^x}{(1+e^x)^2} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{2e^x}{(1+e^x)^2} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left|f_0'(x)\right| \leq \frac{1}{2}$$

D'où : $\boxed{\left(\forall x \in \mathbb{R}\right); \quad \left|f_0'(x)\right| \leq \frac{1}{2}}$

2 (a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); \quad \left|u_{n+1} - \alpha\right| \leq \frac{1}{2}\left|u_n - \alpha\right|$ **(0.5pt)**

Posons : $m = \min\left\{\alpha, u_n\right\}$ et $M = \max\left\{\alpha, u_n\right\}$.

La fonction f_0 est continue sur $\left[m, M\right]$ et dérivable sur $\left]m, M\right[$, alors : $\left(\exists c \in \left]m, M\right[\right)$ tel que :

$$\left|f_0(u_n) - f_0(\alpha)\right| = \left|u_n - \alpha\right|\left|f_0{}'(c)\right|$$

Puisque : $\left|f_0'(c)\right| \leq \frac{1}{2}$, alors : $\left|f_0(u_n) - f_0(\alpha)\right| \leq \frac{1}{2}\left|u_n - \alpha\right|$

D'où : $\boxed{\left(\forall n \in \mathbb{N}\right); \quad \left|u_{n+1} - \alpha\right| \leq \frac{1}{2}\left|u_n - \alpha\right|}$

(b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}); |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |\alpha|$ **(0.5pt)**

Si $(\forall n \in \mathbb{N})$; $\quad u_n = \alpha$, alors : $|u_n - \alpha| = 0 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |\alpha|$

Supposons que $u_n \neq \alpha$ pour tout entier n. On a : $\quad (\forall n \in \mathbb{N})$; $\quad |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$, alors :

$$\left.\begin{array}{r}\cancel{|u_1 - \alpha|} \leq \frac{1}{2}|u_0 - \alpha| \\ \cancel{|u_2 - \alpha|} \leq \frac{1}{2}\cancel{|u_1 - \alpha|} \\ \vdots \\ \cancel{|u_{n-1} - \alpha|} \leq \frac{1}{2}\cancel{|u_{n-2} - \alpha|} \\ |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}\cancel{|u_{n-1} - \alpha|}\end{array}\right\} \otimes \Rightarrow |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha| \Rightarrow |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |\alpha|$$

Donc : $\boxed{\left(\forall n \in \mathbb{N}\right); \quad \left|u_n - \alpha\right| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \left|\alpha\right|}$

(c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers α **(0.5pt)**

Puisque : $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |\alpha|$, Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - \alpha| = 0$,

D'où : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \quad u_n = \alpha}$

Partie III : On suppose dans cette partie que $n \geq 2$

1 (a) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $\exists! \ x_n \in \mathbb{R}$ solution de l'équation $f_n(x) = 0$ **(0.5pt)**

Pour tout x de $\mathbb{R}$, la fonction f_n est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$f_n'(x) = \frac{-2e^x}{(1+e^x)^2} - n < 0 \quad \text{car } n \geq 2$$

Donc la fonction f_n est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty < 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty > 0$, donc $0 \in]-\infty, +\infty[$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires en déduire que :

l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution x_n dans $\mathbb{R}$.

b Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $\quad 0 < x_n < 1 \quad$ (On prendra $\dfrac{2e}{1+e} < 1.47$) **(0.5pt)**

On a :

$$f_n(0) = \frac{-2e^0}{1+e^0} + n \times 0 = \frac{-2}{2} = -1 < 0$$
$$f_n(1) = \frac{-2e^1}{1+e^1} + n \times 1 = \frac{-2e}{1+e} + n > -1.47 + 2 = 0.53 > 0$$

Donc : $f_n(0) \times f_n(1) < 0$, d'où : pour tout entier $n \geq 2$: $\quad 0 < x_n < 1$

2 **a** Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $\quad f_{n+1}(x_n) > 0$ **(0.5pt)**

On a :

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x_n) = \frac{-2e^{x_n}}{1+e^{x_n}} + (n+1)x_n &\Leftrightarrow f_{n+1}(x_n) = \frac{-2e^{x_n}}{1+e^{x_n}} + nx_n + x_n \\ &\Leftrightarrow f_{n+1}(x_n) = f_n(x_n) + x_n \\ &\Leftrightarrow f_{n+1}(x_n) = 0 + x_n \\ &\Leftrightarrow f_{n+1}(x_n) = x_n \end{aligned}$$

Puisque : $\forall n \geq 2, \quad x_n > 0$, alors : $\forall n \geq 2, \quad f_{n+1}(x_n) > 0$

b En déduire que la suite $(x_n)_{n\geq 2}$ est strictement décroissante. **(0.5pt)**

On a :

$$f_n(x_n) = 0 \Leftrightarrow f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$$

Donc :

$$f_{n+1}(x_{n+1}) - f_{n+1}(x_n) = 0 - f_{n+1}(x_n) = -f_{n+1}(x_n) < 0$$

Donc : $f_{n+1}(x_{n+1}) - f_{n+1}(x_n) < 0$, alors : $f_{n+1}(x_{n+1}) < f_{n+1}(x_n)$

Pour tout entier $n \geq 2$, la fonction f_n est croissante sur $\mathbb{R}$, alors : $x_{n+1} < x_n$

D'où : la suite $(x_n)_{n\geq 2}$ est strictement décroissante

c Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 2}$ est convergente. **(0.5pt)**

On a la suite $(x_n)_{n\geq 2}$ est décroissante et minoré par 0,

D'où : la suite $(x_n)_{n\geq 2}$ est convergente

3 **a** Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $\quad \dfrac{1}{n} < x_n < \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{2e}{1+e}\right)$ **(0.5pt)**

On a :

$$f_n(x_n) = 0 \Leftrightarrow \frac{-2e^{x_n}}{1+e^{x_n}} + nx_n = 0 \Leftrightarrow nx_n = \frac{2e^{x_n}}{1+e^{x_n}}$$

On considère la fonction $h(x) = \dfrac{2e^x}{1+e^x} = -f_0(x)$, alors h est continue dérivable et croissante sur $\mathbb{R}$, alors :

$$\begin{aligned} 0 < x_n < 1 &\Leftrightarrow h(0) < h(x_n) < h(1) \\ &\Leftrightarrow 1 < \frac{2e^{x_n}}{1+e^{x_n}} < \frac{2e}{1+e} \\ &\Leftrightarrow 1 < nx_n < \frac{2e}{1+e} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{n} < x_n < \frac{1}{n}\left(\frac{2e}{1+e}\right) \end{aligned}$$

D'où : $\left(\forall n \geq 2\right); \quad \dfrac{1}{n} < x_n < \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{2e}{1+e}\right)$

b En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$, puis montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} nx_n = 1$ **(0.5pt)**

Puisque : $\dfrac{1}{n} < x_n < \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{2e}{1+e}\right)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{n} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{2e}{1+e}\right) = 0$,

D'où : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} x_n = 0}$

On a : $nx_n = h(x_n)$, $h(x)$ est continue et x_n est convergente, alors :

$$\lim_{x\to+\infty} nx_n = \lim_{x\to+\infty} h(x_n) = h\left(\lim_{x\to+\infty} x_n\right) = h(0) = 1$$

D'où : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} nx_n = 1}$

4 **a** Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a : $x_n \leq x_2$ **(0.5pt)**

On a la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est décroissante.

D'où : $\boxed{\text{pour tout entier } n \geq 2, \text{ on a : } x_n \leq x_2}$

b En déduire $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n)^n$ **(0.5pt)**

On a :

$$\begin{aligned} 0 < x_n \leq x_2 &\Leftrightarrow 0 < x_n < \frac{1}{2}\left(\frac{2e}{1+e}\right) \\ &\Leftrightarrow 0 < (x_n)^n < \left(\frac{e}{1+e}\right)^n \end{aligned}$$

Puisque $\dfrac{e}{1+e} < 1$, alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{e}{1+e}\right)^n = 0$

D'où : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} x_n = 0}$

Exercice 2 (4 points)

Soient a, b et c trois nombres complexes non nuls tel que : $a+b \neq c$

1 **a** Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z ; **(0.5pt)**

$$(E) : z^2 - (a+b+c)z + c(a+b) = 0$$

Le discriminant Δ de l'équation (E) est :

$$\begin{aligned} \Delta &= (a+b+c)^2 - 4c(a+b) \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc - 4ac - 4bc \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc \\ &= (a+b-c)^2 \end{aligned}$$

Donc l'équation (E) admet deux solutions sont :

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{(a+b+c)+(a+b-c)}{2} = a+b \\ z_2 &= \frac{(a+b+c)-(a+b-c)}{2} = c \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E) est : $\boxed{S_E = \left\{a+b, c\right\}}$

b On suppose dans cette question que : $a = i$, $b = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $c = a - b$

Écrire les deux solutions de l'équation (E) sous forme exponentielle. **(0.5pt)**

On utilise la méthode suivante : dans une somme ou une différence de deux complexes de module 1, $e^{ix} \pm e^{iy}$, on met en facteur $e^{i\frac{x+y}{2}}$ puis on utilise les formules d'Euler.

On a : $\begin{cases} e^{ix} + e^{iy} = e^{i\frac{x+y}{2}}\left(e^{i\frac{x-y}{2}} + e^{i\frac{y-x}{2}}\right) = 2\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)e^{i\frac{x+y}{2}} \\ e^{ix} - e^{iy} = e^{i\frac{x+y}{2}}\left(e^{i\frac{x-y}{2}} - e^{i\frac{y-x}{2}}\right) = 2i\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)e^{i\frac{x+y}{2}} \end{cases}$ où $x, y \in [0, 2\pi[$

Donc :

$$\begin{aligned} z_1 &= a + b = i + e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i\frac{\pi}{2}} + e^{i\frac{\pi}{3}} \\ &= e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)}\left(e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)} + e^{i\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)}\right) \\ &= 2\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)} \\ &= 2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{i\left(\frac{5\pi}{12}\right)} \\ z_2 &= c = a - b = i - e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i\frac{\pi}{2}} - e^{i\frac{\pi}{3}} \\ &= e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)}\left(e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)} - e^{i\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)}\right) \\ &= 2i\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)} \\ &= 2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{i\frac{\pi}{2}}e^{i\left(\frac{5\pi}{12}\right)} \\ &= 2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{i\left(\frac{11\pi}{12}\right)} \end{aligned}$$

Or : $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0$, alors : $z_1 = 2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{i\left(\frac{5\pi}{12}\right)}$ et $z_2 = 2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{i\left(\frac{11\pi}{12}\right)}$

2 Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \bar{u}, v)$.

On considère les trois points $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ qu'on suppose non alignes.

Soient $P(p)$ le centre de la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ qui transforme B en A et $Q(q)$ le centre de la rotation d'angle $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ qui transforme C en A et $D(d)$ le milieu du segment $[BC]$

a Montrer que : $2p = b + a + (a-b)i$ et $2q = c + a + (c-a)i$. **(1pt)**

Soient R_1 la rotation de centre P et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et R_2 la rotation de centre Q et d'angle $\frac{-\pi}{2}$

On a :

$$\begin{cases} R_1(z) = e^{i\frac{\pi}{2}}(z-p) + p = i(z-p) + p \\ R_2(z) = e^{i\frac{-\pi}{2}}(z-q) + q = -i(z-q) + q \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{aligned} R_1(B) = A &\Leftrightarrow i(b-p) + p = a \Leftrightarrow ib - ip + p = a \Leftrightarrow p(1-i) = a - ib \\ &\Leftrightarrow p = \frac{a-ib}{1-i} \Leftrightarrow p = \frac{(a-ib)(1+i)}{2} \Leftrightarrow 2p = a + ai - ib + b \\ &\Leftrightarrow 2p = b + a + (a-b)i \end{aligned}$$

D'où : $2p = b + a + (a-b)i$

$$\begin{aligned} R_2(C) = A &\Leftrightarrow -i(c-q) + q = a \Leftrightarrow -ic + iq + q = a \Leftrightarrow q(1+i) = a + ic \\ &\Leftrightarrow q = \frac{a+ic}{1+i} \Leftrightarrow q = \frac{(a+ic)(1-i)}{2} \Leftrightarrow 2q = a - ai + ic + c \\ &\Leftrightarrow 2q = c + a + (c-a)i \end{aligned}$$

D'où : $2q = c + a + (c-a)i$

b Calculer : $\dfrac{p-d}{q-d}$ **(0.5pt)**

Puisque D est le milieu de $[BC]$, alors : $d = \dfrac{b+c}{2} = \dfrac{a}{2}$ et on a : $c = a - b$, alors :

$$\frac{p-d}{q-d} = \frac{2p-2d}{2q-2d} = \frac{b+a+(a-b)\,i-a}{c+a+(c-a)\,i-a} = \frac{b+ci}{c-bi} = \frac{i\,(c-ib)}{c-ib} = i$$

D'où : $\boxed{\dfrac{p-d}{q-d} = i}$

c En déduire la nature du triangle PDQ. **(0.5pt)**

On a :

$$\frac{p-d}{q-d} = i \Rightarrow \begin{cases} \left|\dfrac{p-d}{q-d}\right| = |i| = 1 \\ \left(\overrightarrow{QD}, \overrightarrow{DP}\right) \equiv \arg\left(\dfrac{p-d}{q-d}\right) [2\pi] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} PD = QD \\ \left(\overrightarrow{QD}, \overrightarrow{DP}\right) \equiv \arg(i)\,[2\pi] \equiv \dfrac{\pi}{2}\,[2\pi] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} PD = QD \\ (QD) \perp (DP) \end{cases}$$

Donc $(QD) \perp (DP)$, d'où : $\boxed{PDQ \text{ est un triangle rectangle et isocèle en } D.}$

3 Soient E le symétrique de B par rapport à P et F le symétrique de C par rapport à Q et K le milieu du segment $[EF]$

a Montrer que l'affixe de K est $k = a + \dfrac{i}{2}(c-b)$. **(0.5pt)**

Puisque P le milieu de $[EB]$, Q le milieu de $[FC]$ et K le milieu de $[EF]$, alors :

$$p = \frac{e+b}{2} \;;\; q = \frac{f+c}{2} \;;\; k = \frac{e+f}{2}$$

Donc :

$$\begin{aligned} k &= \frac{1}{2}\Big(2p - b + 2q - c\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\cancel{b} + a + (\cancel{a} - b)\,i - \cancel{b} + \cancel{c} + a + (c - \cancel{a})\,i - \cancel{c}\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(2a + (c-b)\,i\Big) \\ &= a + \frac{1}{2}\Big(c-b\Big)i \end{aligned}$$

D'où : $\boxed{k = a + \dfrac{1}{2}\Big(c-b\Big)i}$

b Montrer que les points K, P, Q et D sont cocycliques. **(0.5pt)**

Quatre points K, P, Q et D sont cocycliques ou alignés si et seulement si leur affixes complexes vérifient $\dfrac{z_P - z_D}{z_Q - z_D} \times \dfrac{z_Q - z_K}{z_P - z_K}$ est réel. On a :

$$\begin{aligned} \frac{z_P - z_D}{z_Q - z_D} \times \frac{z_Q - z_K}{z_P - z_K} &= \frac{p-d}{q-d} \times \frac{q-k}{p-k} = i \times \frac{2q-2k}{2p-2k} \\ &= i \times \frac{c+a+i\,(c-a) - 2a - i\,(c-b)}{b+a+i\,(a-b) - 2a - i\,(c-b)} = i \times \frac{c-a+i\,(b-a)}{b-a+i\,(a-c)} \\ &= i \times \frac{-b-ic}{-c+ib} = i \times \frac{i\,(-c+ib)}{-c+ib} = i \times i = -1 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

D'où : $\boxed{\text{les points } K, P, Q \text{ et } D \text{ sont cocycliques.}}$

Exercice 3 (4 points)

Partie I : On considère dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation $(E)\ :\ 47x-43y=1$

1. Vérifier que le couple $(11,12)$ est une solution particulière de l'équation (E). **(0.25pt)**

On a : $47\times 11-43\times 12=517-516=1$,

Donc : le couple $(11,12)$ est une solution particulière de l'équation (E).

2. Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation. **(0.75pt)**

On a : $\begin{cases}47x-43y=1\\ 47\times 11-43\times 12=1\end{cases} \Leftrightarrow 47(x-11)=43(y-12)$

Or : $47/43(y-12)$ et $47\wedge 43=1$, alors d'après le théorème de Gauss, $47/(y-12)$, donc il existe un entier relatif k tel que $y-12=47k$, alors :

$$\begin{aligned}47(x-11)=43(y-12) &\Leftrightarrow \begin{cases}47(x-11)=43(y-12)\\ y-12=47k\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}47(x-11)=43\times 47k\\ y-12=47k\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}x-11=43k\\ y-12=47k\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}x=43k+11\\ y=47k+12\end{cases}\end{aligned}$$

L'ensemble des solution dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ de l'équation (E) est : $S_E=\left\{\left(43k+11,47k+12\right)/k\in\mathbb{Z}\right\}$

Partie II : On considère dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation $(F)\ :\ x^{41}\equiv 4\,[43]$

1. Soit $x\in\mathbb{Z}$ une solution de l'équation (F).

a) Montrer que x et 43 sont premier entre eux, en déduire que : $x^{42}\equiv 1\,[43]$ **(0.5pt)**

- Posons : $d=x\wedge 43$, alors : $d/43$, donc $d=1$ ou $d=43$.
  Supposons que $d=43$, alors $43/x$, alors $x\equiv 0\,[43]$, alors $x^{41}\equiv 0\,[43]$ et puisque $x^{41}\equiv 4\,[43]$, alors $4\equiv 0\,[43]$, **absurde**, donc $d\neq 43$, d'où $d=1$, alors $x\wedge 43=1$,
  D'où : x et 43 sont premier entre eux.
- On a 43 est un nombre premier qui ne divise pas x. D'après le théorème de Fermat,

$$x^{43-1}\equiv 1\,[43]\ \Leftrightarrow\ x^{42}\equiv 1\,[43]$$

D'où : $x^{42}\equiv 1\,[43]$

b) Montrer que : $4x\equiv 1\,[43]$, en déduire que : $x\equiv 11\,[43]$ **(0.5pt)**

- On a :

$$\begin{cases}x^{41}\equiv 4\,[43]\\ x^{42}\equiv 1\,[43]\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x^{41}\times x\equiv 4\times x\,[43]\\ x^{42}\equiv 1\,[43]\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x^{42}\equiv 4x\,[43]\\ x^{42}\equiv 1\,[43]\end{cases} \Rightarrow 4x\equiv 1\,[43]$$

D'où : $4x\equiv 1\,[43]$

- On a :

$$\begin{cases}4x\equiv 1\,[43]\\ 44\equiv 1\,[43]\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}11\times 4x\equiv 11\times 1\,[43]\\ 44\times x\equiv 1\times x\,[43]\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}44x\equiv 11\,[43]\\ 44x\equiv x\,[43]\end{cases} \Rightarrow x\equiv 11\,[43]$$

D'où : $x\equiv 11\,[43]$

2 Donner l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}$ de l'équation (F). **(0.5pt)**

- **Si** $x^{41} \equiv 4\,[43]$, alors $x \equiv 11\,[43]$ $\Big($d'après la question **II)1)b)**$\Big)$
- **Si** $x \equiv 11\,[43]$, alors $x^{41} \equiv 11^{41}\,[43]$.
  Puisque 43 est premier et que $43 \wedge 11 = 1$, alors d'après le théorème de Fermat, $11^{42} \equiv 1\,[43]$,
  Donc, on a :

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ 11 \times 11^{41} \equiv 1\,[43] \Rightarrow 44 \times 11^{41} \equiv 4\,[43] \\ \bullet\ 44 \equiv 1\,[43] \Rightarrow 44 \times 11^{41} \equiv 11^{41}\,[43] \end{array}\right\} \Rightarrow 11^{41} \equiv 4\,[43] \Rightarrow x^{41} \equiv 4\,[43]$$

Finalement : $x^{41} \equiv 4\,[43] \;\Leftrightarrow\; x \equiv 11\,[43]$.

D'où l'ensemble des solution dans $\mathbb{Z}$ de l'équation (F) est : $S_F = \Big\{43k + 11 / k \in \mathbb{Z}\Big\}$

Partie III : On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ le système à deux équations suivant (S) : $\begin{cases} x^{41} \equiv 4\,[43] \\ x^{47} \equiv 10\,[47] \end{cases}$

1 Soit x une solution du système (S).

a Montrer que x est solution du système (S') : $\begin{cases} x \equiv 11\,[43] \\ x \equiv 10\,[47] \end{cases}$ **(0.5pt)**

- On a x est solution de (S), alors $x^{41} \equiv 4[43]$, alors $x \equiv 11[43]$.$\Big($d'après la question **II)1)b)**$\Big)$
- On a x est solution de (S), alors $x^{47} \equiv 10\,[47]$, alors $x \wedge 47 = 1$, et puisque 47 est premier, alors d'après le théorème de Fermat,

$$x^{47-1} \equiv 1\,[47] \;\Leftrightarrow\; x^{46} \equiv 1\,[47] \Rightarrow x^{47} \equiv x\,[47] \Rightarrow x \equiv 10\,[47]$$

Finalement : $\begin{cases} x \equiv 11\,[43] \\ x \equiv 10\,[47] \end{cases}$. D'où : x est solution du système (S')

b En déduire que : $x \equiv 527[2021]$ (On pourra utiliser la partie I) **(0.5pt)**

On a :

$$(S) \Rightarrow \begin{cases} x \equiv 11\,[43] \\ x \equiv 10\,[47] \end{cases} \Leftrightarrow \left(\exists (k,k') \in \mathbb{Z}^2\right); \begin{cases} x - 11 = 43k \\ x - 10 = 47k' \end{cases}$$
$$\Rightarrow 47k' - 43k = (x-10) - (x-11)$$
$$\Rightarrow 47k' - 43k = 1$$

D'après la question **I)2)**, on a : $k' = 47k'' + 12$, avec k'' dans $\mathbb{Z}$, alors $x - 11 = 43(47k'' + 12)$
Donc : $x = 2021k'' + 527$, d'où : $x \equiv 527\,[2021]$

2 Donner l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}$ du système (S). **(0.5pt)**

- **Si** $x \equiv 527\,[2021]$, alors : $\begin{cases} x \equiv 527\,[43] \\ x \equiv 527\,[47] \end{cases}$ (car $2021 = 43 \times 47$), et puisque $\begin{cases} 527 \equiv 11\,[43] \\ 527 \equiv 10\,[47] \end{cases}$
  Alors : $\begin{cases} x \equiv 11\,[43] \\ x \equiv 10\,[47] \end{cases}$, d'où x solution de (S').
- **Si** $\begin{cases} x \equiv 11\,[43] \\ x \equiv 10\,[47] \end{cases}$ alors : $\begin{cases} x^{41} \equiv 11^{41}\,[43] \\ x^{47} \equiv 10^{47}\,[47] \end{cases}$ Comme : $\begin{cases} 11^{41} \equiv 4\,[43] & \textbf{(Q.II)2))} \\ 10^{47} \equiv 10\,[47] & \textbf{(Fermat. Q.III)1)a))} \end{cases}$
  Alors : $\begin{cases} x^{41} \equiv 4\,[43] \\ x^{47} \equiv 10\,[47] \end{cases}$, d'où x solution de (S)

Finalement $(S) \Leftrightarrow (S') \Leftrightarrow x \equiv 527\,[2021]$

D'où l'ensemble des solution dans $\mathbb{Z}$ du système (S) est : $S_S = \Big\{2021k + 527 / k \in \mathbb{Z}\Big\}$