تمرين 1 (3.5 نقط)

ليكن α عددا عقديا غير منعدم.

الجزء الأول : نعتبر في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $E_\alpha \;:\; z^2 - i\alpha\sqrt{3}z - \alpha^2 = 0$

1) أ) مميز المعادلة E_α هو :

$$\Delta = \left(i\alpha\sqrt{3}\right)^2 - 4\times1\times\left(-\alpha^2\right) = -3\alpha^2 + 4\alpha^2 = \boxed{\alpha^2}$$

ب) بما أن مميز المعدلة هو $\Delta = \alpha^2 \neq 0$ فإن للمعادلة E_α حلين مختلفين هما :

$$z_1 = \frac{i\alpha\sqrt{3}+\alpha}{2} = \boxed{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\alpha}$$

$$z_2 = \frac{i\alpha\sqrt{3}-\alpha}{2} = \boxed{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\alpha}$$

2) علما أن : $\alpha = |\alpha|\, e^{i\lambda}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ يمكن كتابة حلي المعادلة E_α على الشكل الاسي التالي :

$$z_1 = |\alpha|\, e^{i\lambda}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = |\alpha|\, e^{i\lambda} e^{i\frac{\pi}{3}} = |\alpha|\, e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\lambda\right)}$$

$$z_2 = |\alpha|\, e^{i\lambda}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = |\alpha|\, e^{i\lambda} e^{i\frac{2\pi}{3}} = |\alpha|\, e^{i\left(\frac{2\pi}{3}+\lambda\right)}$$

الجزء الثاني : نفترض أن المستوى العقدي منسوب الى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{u};\vec{v})$. نعتبر النقط Ω و M_1 و M_2 ذات الألحاق على التوالي α و $z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\alpha$ و $z_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\alpha$ وليكن R الدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

1) أ) لنبين أن $R(\Omega) = M_1$ وأن $R(M_1) = M_2$.

لدينا : $R(z) = e^{i\frac{\pi}{3}}(z - z_O) + z_O$

ومنه : $\boxed{R(z) = ze^{i\frac{\pi}{3}}}$

اذن :

$$\begin{aligned} R(z_\Omega) &= z_\Omega e^{i\frac{\pi}{3}} \\ &= \alpha e^{i\frac{\pi}{3}} \\ &= \alpha\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\ &= z_1 \end{aligned}$$

ومنه : $\boxed{R(\Omega) = M_1}$

$$\begin{aligned} R(z_{M_1}) &= z_{M_1} e^{i\frac{\pi}{3}} \\ &= \alpha e^{i\frac{\pi}{3}} e^{i\frac{\pi}{3}} \\ &= \alpha e^{i\frac{2\pi}{3}} \\ &= z_2 \end{aligned}$$

ومنه : $\boxed{R(M_1) = M_2}$

ب) لدينا : $R(\Omega) = M_1$ و $R(M_1) = M_2$

يعني أن : $\begin{cases} \overline{\left(\overrightarrow{O\Omega};\overrightarrow{OM_1}\right)} \equiv \frac{\pi}{3}\,[2\pi] \\ O\Omega = OM_1 \end{cases}$

و أن : $\begin{cases} \overline{\left(\overrightarrow{OM_1};\overrightarrow{OM_2}\right)} \equiv \frac{\pi}{3}\,[2\pi] \\ OM_1 = OM_2 \end{cases}$

يعني أن :

$\begin{cases} \widehat{\Omega OM_1} = 60^\circ \\ O\Omega = OM_1 \end{cases}$ و $\begin{cases} \widehat{M_1OM_2} = 60^\circ \\ OM_1 = OM_2 \end{cases}$

يعني أن المثلثين ΩOM_1 و OM_1M_2 متساويا الساقين ولهما زاوية قياسها 60°. وهذا يعني أن :

المثلثين ΩOM_1 و OM_1M_2 متساويا الأضلاع.

2) أ) لنتحقق أن : $z_1 - z_2 = \alpha$.

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\alpha - \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\alpha \\ &= \frac{1}{2}\alpha + \cancel{\frac{i\sqrt{3}}{2}\alpha} + \frac{1}{2}\alpha - \cancel{\frac{i\sqrt{3}}{2}\alpha} \\ &= \boxed{\alpha} \end{aligned}$$

ب) لدينا :

$$\begin{aligned} \frac{z_{M_2} - z_\Omega}{z_{M_1} - z_O} &= \frac{z_2 - \alpha}{z_1} \\ &= \frac{z_1 - 2\alpha}{z_1} \\ &= 1 - \frac{2\alpha}{z_1} \\ &= 1 - 2\alpha\frac{2}{\alpha\left(1+i\sqrt{3}\right)} \\ &= 1 - 4\frac{1-i\sqrt{3}}{4} \\ &= i\sqrt{3} \end{aligned}$$

ومنه : $\frac{z_{M_2} - z_\Omega}{z_{M_1} - z_O} \in i\mathbb{R}$

وبالتالي : $\boxed{(\Omega M_2) \perp (OM_1)}$

ج) لدينا $O\Omega M_1$ مثلث متساوي الأضلاع،

يعني أن : $O\Omega = OM_1 = \Omega M_1$

ولدينا OM_1M_2 مثلث متساوي الأضلاع،

يعني أن : $OM_1 = OM_1 = M_1M_2$

ومنه : $O\Omega = \Omega M_1 = M_1M_2 = OM_2$

وبالتالي : $\boxed{O\Omega M_1M_2 \text{ معين}}$

د) **طريقة 1 :** لدينا :

$$\overline{z_1} = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\overline{\alpha} = -\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\overline{\alpha} = -\frac{z_2}{\alpha}\overline{\alpha}$$

وبالتالي : $\frac{\overline{z_1}}{\overline{\alpha}} = -\frac{z_2}{\alpha}$ وكذلك : $\frac{\overline{z_2}}{\overline{\alpha}} = -\frac{z_1}{\alpha}$

ولدينا : $|z_1|^2 = z_1\overline{z_1} = |\alpha|^2$ و $|z_2|^2 = z_2\overline{z_2} = |\alpha|^2$

وبالتالي : $\overline{z_1} = \frac{|\alpha|^2}{z_1}$ و $\overline{z_2} = \frac{|\alpha|^2}{z_2}$

وبما أن z_1 و z_2 حلي المعادلة E_α فإن : $z_1z_2 = -\alpha$

وبالتالي لدينا :

$$\begin{aligned}
\overline{Z} &= \overline{\left(\frac{z_2-\alpha}{z_1-\alpha} \div \frac{z_2-|\alpha|e^{i\theta}}{z_1-|\alpha|e^{i\theta}}\right)} \\
&= \frac{\overline{z_2}-\overline{\alpha}}{\overline{z_1}-\overline{\alpha}} \div \frac{\overline{z_2}-|\alpha|e^{-i\theta}}{\overline{z_1}-|\alpha|e^{-i\theta}} \\
&= \frac{\overline{\alpha}\left(\frac{\overline{z_2}}{\overline{\alpha}}-1\right)}{\overline{\alpha}\left(\frac{\overline{z_1}}{\overline{\alpha}}-1\right)} \div \frac{e^{-i\theta}\left(\overline{z_2}e^{i\theta}-|\alpha|\right)}{e^{-i\theta}\left(\overline{z_1}e^{i\theta}-|\alpha|\right)} \\
&= \frac{-\frac{z_1}{\alpha}-1}{-\frac{z_2}{\alpha}-1} \div \frac{\frac{|\alpha|^2}{z_2}e^{i\theta}-|\alpha|}{\frac{|\alpha|^2}{z_1}e^{i\theta}-|\alpha|} \\
&= \frac{z_1+1}{z_2+1} \div \frac{\frac{|\alpha|}{z_2}e^{i\theta}-1}{\frac{|\alpha|}{z_1}e^{i\theta}-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{Z} &= \frac{z_1+1}{z_2+1} \div \frac{\left(\frac{|\alpha|e^{i\theta}-z_2}{z_2}\right)}{\left(\frac{|\alpha|e^{i\theta}-z_1}{z_1}\right)} \\
&= \frac{z_1+1}{z_2+1} \div \frac{z_1\left(|\alpha|e^{i\theta}-z_2\right)}{z_2\left(|\alpha|e^{i\theta}-z_1\right)} \\
&= \frac{z_2(z_1+1)}{z_1(z_2+1)} \div \frac{|\alpha|e^{i\theta}-z_2}{|\alpha|e^{i\theta}-z_1} \\
&= \frac{z_2+z_2z_1}{z_1+z_2z_1} \div \frac{z_2-|\alpha|e^{i\theta}}{z_1-|\alpha|e^{i\theta}} \\
&= \frac{z_2-\alpha}{z_1-\alpha} \div \frac{z_2-|\alpha|e^{i\theta}}{z_1-|\alpha|e^{i\theta}} \\
&= Z
\end{aligned}$$

اذن $\overline{Z} = Z$ يعني أن : $\boxed{Z \text{ عددحقيقي}}$

طريقة 2 : نعتبر النقطة M ذات اللحق $z_M = |\alpha|e^{i\theta}$،

لدينا : $|OM| = |\alpha|$ حسب ما سبق نستنتج أن :

$$O\Omega = OM_1 = OM_2 = OM = |\alpha|$$

يعني أن النقط Ω و M_1 و M_2 و M تنتمي الى نفس الدائرة التي مركزها O وشعاعها $|\alpha|$

يعني أن : $\left(\frac{z_{M_2}-z_\Omega}{z_{M_1}-z_\Omega}\right) \times \left(\frac{z_{M_1}-z_M}{z_{M_2}-z_M}\right) \in \mathbb{R}$

يعني أن : $\left(\frac{z_{M_2}-z_\Omega}{z_{M_1}-z_\Omega}\right) \div \left(\frac{z_{M_2}-z_M}{z_{M_1}-z_M}\right) \in \mathbb{R}$

يعني أن : $\left(\frac{z_2-\alpha}{z_1-\alpha}\right) \div \left(\frac{z_2-|\alpha|e^{i\theta}}{z_1-|\alpha|e^{i\theta}}\right) \in \mathbb{R}$

تمرين 2 (3 نقط)

عدد الامكانيات لسحب n كرة بالتتباع وبدون احلال من اصل n كرة هو:

$$card(\Omega) = A_n^n = n!$$

1) ليكن الحدث A : " الحصول على الكرات 1 و 2 و 3 بالتتابع وفي هذا الترتيب "

لكي يتحقق الحدث A يجب ان تظهر الكرة 1 في السحبات 1 الى $n-2$، وعدد امكانيات ترتيب الكرات المتبقية هو $(n-3)!$

اذن لدينا : $card(A) = (n-2)(n-3)!$ ومنه :

$$\boxed{P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{(n-2)(n-3)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}}$$

2) ليكن الحدث B : " الحصول على الكرات 1 و 2 و 3 في هذا الترتيب "

n	$n-1$	$n-2$	....	2	1
○	○	○	....	○	○

عدد امكانيات اختيار ثلاث خانات لوضع الكرات 1 و 2 و 3 في هذا الترتيب من اصل n خانة هو C_n^3، وعدد امكانيات ترتيب الكرات المتبقية هو $(n-3)!$

ومنه : $\boxed{P(B) = \frac{card(B)}{card(\Omega)} = \frac{C_n^3(n-3)!}{n!} = \frac{1}{6}}$

3) نعتبر المتغير العشوائي X_n الذي يساوي العدد الضلروري من السحبات للحصول على الكرات 1 و 2 و 3

اذن نحتاج 3 سحبات على الأقل للحصول على الكرات الثلاث ومنه $X_n(\Omega) = \{3, 4, ..., n\}$

خانة $(n-k)$			خانة $(k-1)$		
n	.....	k	.....	1	رقم السحبة
○	○	○	○	○	الكرات

في السحبة رقم k يجب ان تكون الكرة تحمل الرقم 1 او 2 او 3 يعني لدينا 3 امكانيات،

وعدد امكانيات اختيار خانتين لوضع الكرتين المتبقيتين في $(k-1)$ خانة هو

$$A_{k-1}^2 = \frac{(k-1)!}{(k-3)!} = (k-2)(k-1)$$

وعدد امكانيات ترتيب $(n-3)$ كرة على $(n-3)$ خانة متبقة هو $(n-3)!$ وحسب المبدأ العام للتعداد لدينا :

$$card(X_n = k) = 3 \times A_{k-1}^2 \times (n-3)!$$

ومنه :

$$P(X_n=k)=\frac{card(X_n=k)}{card(\Omega)}=\frac{3A_{k-1}^2(n-3)!}{n!}=\frac{3(k-2)(k-1)(n-3)!}{n!}=\frac{3(k-2)(k-1)(n-3)!}{(n-3)!(n-2)(n-1)n}=\boxed{\frac{3(k-1)(k-2)}{n(n-1)(n-2)}}$$

التحقق من أن : $\sum_{k=3}^{n}P(X_n=k)=1$

$$\sum_{k=3}^{n}P(X_n=k)=\sum_{k=3}^{n}\frac{3(k-1)(k-2)}{n(n-1)(n-2)}=\frac{3\sum_{k=3}^{n}(k-1)^2-(k-1)}{n(n-1)(n-2)}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=3}^{n}P(X_n=k)&=\frac{3\left(\sum_{k=3}^{n}(k-1)^2-(k-1)\right)}{n(n-1)(n-2)}\\&=\frac{3\left(\frac{(n-1)n(2(n-1)+1)}{6}-\frac{(n-1)n}{2}\right)}{n(n-1)(n-2)}\\&=\frac{3\left(\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}-\frac{3n(n-1)}{6}\right)}{n(n-1)(n-2)}\\&=\frac{3n(n-1)(2n-1-3)}{6n(n-1)(n-2)}\\&=\frac{n(n-1)(2n-4)}{2n(n-1)(n-2)}\\&=\frac{2n(n-1)(n-2)}{2n(n-1)(n-2)}\\&=1\end{aligned}$$

تمرين 3 (3.5 نقط)

1 (أ) لدينا :

$$\det(\vec{e_1},\vec{e_2})=\begin{vmatrix}1/2 & 1/2\\ 1/2 & -1/2\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\times\frac{-1}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{-1}{2}\neq 0$$

ومنه : $(\vec{e_1},\vec{e_2})$ أساس للفضاء V_2

(ب) لدينا :

$$\vec{e_1}*\vec{e_1}=\left(\frac{1}{2}\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j}\right)*\left(\frac{1}{2}\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j}\right)=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)\vec{i}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)\vec{j}=\frac{1}{2}\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j}=\boxed{\vec{e_1}}$$

$$\vec{e_2}*\vec{e_2}=\left(\frac{1}{2}\vec{i}-\frac{1}{2}\vec{j}\right)*\left(\frac{1}{2}\vec{i}-\frac{1}{2}\vec{j}\right)=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)\vec{i}+\left(\frac{-1}{4}+\frac{-1}{4}\right)\vec{j}=\frac{1}{2}\vec{i}-\frac{1}{2}\vec{j}=\boxed{\vec{e_2}}$$

$$\vec{e_1}*\vec{e_2}=\left(\frac{1}{2}\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j}\right)*\left(\frac{1}{2}\vec{i}-\frac{1}{2}\vec{j}\right)=\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)\vec{i}+\left(\frac{-1}{4}+\frac{1}{4}\right)\vec{j}=0\vec{i}+0\vec{j}=\boxed{\vec{0}}$$

$$\vec{e_2}*\vec{e_1}=\left(\frac{1}{2}\vec{i}-\frac{1}{2}\vec{j}\right)*\left(\frac{1}{2}\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j}\right)=\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)\vec{i}+\left(\frac{1}{4}+\frac{-1}{4}\right)\vec{j}=0\vec{i}+0\vec{j}=\boxed{\vec{0}}$$

(ج) لكل X و Y و X' و Y' من $\mathbb{R}$ لدينا : (للتبسيط نضع $x\vec{i}+y\vec{j}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$)

$$\begin{aligned}(X\vec{e_1}+Y\vec{e_2})*(X'\vec{e_1}+Y'\vec{e_2})&=\left(X\begin{pmatrix}1/2\\1/2\end{pmatrix}+Y\begin{pmatrix}1/2\\-1/2\end{pmatrix}\right)*\left(X'\begin{pmatrix}1/2\\1/2\end{pmatrix}+Y'\begin{pmatrix}1/2\\-1/2\end{pmatrix}\right)\\&=\begin{pmatrix}\frac{X+Y}{2}\\\frac{X-Y}{2}\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}\frac{X'+Y'}{2}\\\frac{X'-Y'}{2}\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\frac{(X+Y)(X'+Y')+(X-Y)(X'-Y')}{4}\\\frac{(X+Y)(X'-Y')+(X-Y)(X'+Y')}{4}\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\frac{2XX'+2YY'}{4}\\\frac{2XX'-2YY'}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{XX'+YY'}{2}\\\frac{XX'-YY'}{2}\end{pmatrix}\\&=\frac{XX'+YY'}{2}\vec{i}+\frac{XX'-YY'}{2}\vec{j}\end{aligned}$$

$$(X\vec{e_1}+Y\vec{e_2})*(X'\vec{e_1}+Y'\vec{e_2}) = XX'\left(\frac{1}{2}\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j}\right)+YY'\left(\frac{1}{2}\vec{i}-\frac{1}{2}\vec{j}\right) = \boxed{XX'\vec{e_1}+YY'\vec{e_2}}$$

2 (أ) ليكن (x,y) و (x',y') عنصرين من V_2. لدينا :

$$\left(x\vec{i}+y\vec{j}\right)*\left(x'\vec{i}+y'\vec{j}\right) = (xx'+yy')\vec{i}+(xy'+yx')\vec{j} = (x'x+y'y)\vec{i}+(x'y+y'x)\vec{j} = \left(x'\vec{i}+y'\vec{j}\right)*\left(x\vec{i}+y\vec{j}\right)$$

ومنه : $\boxed{\text{القانون } * \text{ تبادلي}}$

(ب) لتكن $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ عناصر من V_2. لدينا :

$$\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\right)*\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}xx'+yy'\\xy'+yx'\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a(xx'+yy')+b(xy'+yx')\\b(xx'+yy')+a(xy'+yx')\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}axx'+ayy'+bxy'+byx'\\bxx'+byy'+axy'+ayx'\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}*\left(\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}ax'+by'\\bx'+ay'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x(ax'+by')+y(bx'+ay')\\x(bx'+ay')+y(ax'+by')\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}axx'+ayy'+bxy'+byx'\\bxx'+byy'+axy'+ayx'\end{pmatrix}$$

ومنه : $\boxed{\text{القانون } * \text{ تجميعي}}$

(ج) نلاحظ أن : $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\times 1+y\times 0\\x\times 0+y\times 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ وبما أن * تبادلي فإن : $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

ومنه : $\boxed{\text{القانون } * \text{ يقبل عنصرا محايدا هو } e=\vec{i}}$.

(د) لدينا + قانون تركيب داخلي في V_2 وتجميعي، وتبادلي، وله عنصر محايد $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ وكل عنصر $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ من V_2 يقبل عنصرا محايدا وحيدا هو $\begin{pmatrix}-a\\-b\end{pmatrix}$ ومنه $(V_2,+)$ زمرة تبادلية. ولكل $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix}e\\f\end{pmatrix}$ من V_2 لدينا :

$$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}*\left[\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}e\\f\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}c+e\\d+f\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a(c+e)+b(d+f)\\a(d+f)+b(c+e)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}ac+ae+bd+bf\\ad+af+bc+be\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}e\\f\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}ac+bd\\ad+bc\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}ae+bf\\af+be\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}ac+bd+ae+bf\\ad+bc+af+be\end{pmatrix}$$

ومنه : $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}*\left[\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}e\\f\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}e\\f\end{pmatrix}$ ومنه * توزيعي على + في V_2

ولدينا ايضا حسب السؤالين 2)أ) و 2)ب) و 2)ج) القانون * تجميعي وتبادلي وله عنصرا محايدا في V_2

وبالتالي : $\boxed{(V_2,+,*) \text{ حلقة تبادلية واحدية}}$

3 (أ) لدينا $E_{\vec{u}} \neq \emptyset$ لان $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \in E_{\vec{u}}$. واذا كان $\vec{x} \in E_{\vec{u}}$ فإنه يجد عدد حقيقي λ بحيث $\vec{x} = \lambda\vec{u}$ يعني أن : $\vec{x} \in V_2$

لأن $(V_2,+,.)$ فضاء متجهي، يعني أن : $E_{\vec{u}} \subset V_2$.

ليكن $\vec{x}$ و $\vec{y}$ عنصران من $E_{\vec{u}}$ اذن يوجد عددين λ و α بحيث : $\vec{x} = \lambda\vec{u}$ و $\vec{y} = \alpha\vec{u}$

لدينا : $\vec{x}-\vec{y} = \lambda\vec{u}-\alpha\vec{u} = (\lambda-\alpha)\vec{u}$ وبمأن $(\lambda-\alpha)\in\mathbb{R}$ فإن : $\vec{x}-\vec{y}\in E_{\vec{u}}$

ومنه : $\boxed{(E_{\vec{u}},+) \text{ زمرة جزئية للزمرة } (V_2,+)}$

ب) ليكن $\overrightarrow{x}$ و $\overrightarrow{y}$ عنصران من $E_{\overrightarrow{u}}$ يعني انه يوجد عددين حقيقيين λ و λ' بحيث : $\overrightarrow{x}=\lambda\overrightarrow{u}$ و $\overrightarrow{y}=\lambda'\overrightarrow{u}$
ليكن α عددا حقيقيا، لدينا :

$$\alpha\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}=\alpha\lambda\overrightarrow{u}+\lambda'\overrightarrow{u}=(\alpha\lambda+\lambda')\overrightarrow{u}\in E_{\overrightarrow{u}}$$

لأن : $(\alpha\lambda+\lambda')\in\mathbb{R}$. ومنه : $\boxed{(E_{\overrightarrow{u}},+,.) \text{ فضاء متجهي جزئي للفضاء } (V_2,+,.)}$

ج) ليكن $\overrightarrow{u}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\in V_2\backslash\left\{\overrightarrow{0}\right\}$ بحيث $(a;b)\in\mathbb{R}^2$.
وليكن $\overrightarrow{x}=\alpha\overrightarrow{u}$ و $\overrightarrow{y}=\beta\overrightarrow{u}$ عنصران من $E_{\overrightarrow{u}}$ بحيث $(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2$
لدينا : $\overrightarrow{u}*\overrightarrow{u}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2+b^2\\2ab\end{pmatrix}$

- اذا كان $E_{\overrightarrow{u}}$ مستقر بالنسبة للقانون $*$ يعني أن لكل $\overrightarrow{x}$ و $\overrightarrow{y}$ عنصران من $E_{\overrightarrow{u}}$ لدينا : $\overrightarrow{x}*\overrightarrow{y}\in E_{\overrightarrow{u}}$

يعني انه يوجد $\lambda\in\mathbb{R}$ بحيث : $\alpha\overrightarrow{u}*\beta\overrightarrow{u}=\lambda\overrightarrow{u}$ يعني : $\begin{pmatrix}\alpha a\\\alpha b\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}\beta a\\\beta b\end{pmatrix}=\lambda\overrightarrow{u}$

يعني : $\begin{pmatrix}\alpha\beta a^2+\alpha\beta b^2\\\alpha\beta ab+\alpha\beta ab\end{pmatrix}=\lambda\overrightarrow{u}$ يعني : $\alpha\beta\begin{pmatrix}a^2+b^2\\2ab\end{pmatrix}=\lambda\overrightarrow{u}$ يعني : $\alpha\beta(\overrightarrow{u}*\overrightarrow{u})=\lambda\overrightarrow{u}$

يعني: $\alpha\beta(\overrightarrow{u}*\overrightarrow{u})-\lambda\overrightarrow{u}=\overrightarrow{0}$. وهذا يعني أن : $\boxed{\text{الأسرة } (\overrightarrow{u}*\overrightarrow{u},\overrightarrow{u}) \text{ مقيدة}}$

- اذا كانت الأسرة $(\overrightarrow{u}*\overrightarrow{u},\overrightarrow{u})$ مقيدة يعني انه يوجد $\lambda\in\mathbb{R}$ بحيث : $\alpha_1(\overrightarrow{u}*\overrightarrow{u})+\alpha_2\overrightarrow{u}=\overrightarrow{0}$ مع $(\alpha_1,\alpha_2)\neq(0,0)$

يعني : $\alpha_1\begin{pmatrix}a^2+b^2\\2ab\end{pmatrix}=-\alpha_2\overrightarrow{u}$ يعني : $\begin{pmatrix}a^2+b^2\\2ab\end{pmatrix}=-\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}\overrightarrow{u}$

ولدينا لكل $\overrightarrow{x}$ و $\overrightarrow{y}$ عنصران من $E_{\overrightarrow{u}}$: $\overrightarrow{x}*\overrightarrow{y}=\alpha\beta\begin{pmatrix}a^2+b^2\\2ab\end{pmatrix}$ يعني : $\overrightarrow{x}*\overrightarrow{y}=\alpha\beta\left(-\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}\overrightarrow{u}\right)$

يعني : $\overrightarrow{x}*\overrightarrow{y}=-\dfrac{\alpha\beta\alpha_2}{\alpha_1}\overrightarrow{u}$ يعني : $\overrightarrow{x}*\overrightarrow{y}=\theta\overrightarrow{u}\in E_{\overrightarrow{u}}$ مع $\theta=-\dfrac{\alpha\beta\alpha_2}{\alpha_1}\in\mathbb{R}$

وهذا يعني أن $E_{\overrightarrow{u}}$ مستقر بالنسبة للقانون $*$. وبالتالي : $\boxed{E_{\overrightarrow{u}} \text{ مستقر بالنسبة للقانون } * \quad\Leftrightarrow\quad \text{الأسرة } (\overrightarrow{u}*\overrightarrow{u},\overrightarrow{u}) \text{ مقيدة}}$

4 ا) نفترض أن : $\overrightarrow{u}*\overrightarrow{u}=\alpha\overrightarrow{u}$; $(\exists\alpha\in\mathbb{R}^*)$ نعتبر التطبيق : $\varphi:\begin{cases}R\to E_{\overrightarrow{u}}\\x\mapsto\dfrac{x}{\alpha}\overrightarrow{u}\end{cases}$

لدينا لكل x و y من $\mathbb{R}^*$:

$$\begin{aligned}\varphi(x)*\varphi(y)&=\frac{x}{\alpha}\overrightarrow{u}*\frac{y}{\alpha}\overrightarrow{u}\\&=\frac{xy}{\alpha^2}(\overrightarrow{u}*\overrightarrow{u})\\&=\frac{xy}{\alpha^2}.\alpha\overrightarrow{u}\\&=\frac{xy}{\alpha}\overrightarrow{u}\\&=\varphi(xy)\end{aligned}$$

اذن φ تشاكل من $(\mathbb{R}^*,\times)$ نحوى $(E_{\overrightarrow{u}},*)$
ولدينا φ تبايني لأن : $\varphi(x)=\varphi(y)\Rightarrow\dfrac{x}{\alpha}\overrightarrow{u}=\dfrac{y}{\alpha}\overrightarrow{u}\Rightarrow\dfrac{x}{\alpha}=\dfrac{y}{\alpha}\Rightarrow x=y$
ولدينا φ شمولي لأن : $\varphi(x)=\lambda\overrightarrow{u}\;:\;(\exists x=\lambda\alpha\in\mathbb{R}^*)\,(\forall\lambda\overrightarrow{u}\in E_{\overrightarrow{u}})$. اذن φ تقابل.
وبالتالي : $\boxed{\varphi \text{ تشاكل تقابلي من } (\mathbb{R}^*,\times) \text{ نحوى } (E_{\overrightarrow{u}},*)}$

ب)
- لدينا حسب السؤال 3)أ) : $(E_{\overrightarrow{u}},+)$ زمرة جزئية للزمرة $(V_2,+)$
- نعلم أن : $(\mathbb{R}^*,\times)$ زمرة، اذن $\varphi(R^*,\times)$ هي كذلك زمرة، لأن φ تشاكل تقابلي.
- ولدينا $\varphi(\mathbb{R}^*,\times)=(\varphi(\mathbb{R}^*),*)=\left(E_{\overrightarrow{u}}\backslash\left\{\overrightarrow{0}\right\},*\right)$ يعني أن $\left(E_{\overrightarrow{u}}\backslash\left\{\overrightarrow{0}\right\},*\right)$ زمرة
- لدينا القانون $*$ توزيعي على $+$
- ولدينا $*$ تبادلي في $E_{\overrightarrow{u}}$

وبالتالي : $\boxed{(E_{\overrightarrow{u}},+,*) \text{ جسم تبادلي.}}$

تمرين 4 (10 نقط)

الجزء الأول : نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $I=]-1,+\infty[$ بما يلي : $g(x)=1+x^2-2x(1+x)\ln(1+x)$

1 أ لدينا :

$$\lim_{x\to-1^+}(1+x)\ln(1+x)=\lim_{u\to0^+}u\ln u=0$$

ومنه :

$$\lim_{x\to-1^+}g(x)=\lim_{x\to-1^+}1+x^2-2x(1+x)\ln(1+x)$$
$$=1+(-1)^2-2\times(-1)\times0$$
$$=2$$

ومنه : $\boxed{\lim_{x\to-1^+}g(x)=2}$

ب لدينا :

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(1+x^2-2x(1+x)\ln(1+x)\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}x^2\left(\frac{1+x^2}{x^2}-2\frac{1+x}{x}\ln(1+x)\right)$$

لدينا : $\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x^2}{x^2}=1$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x}{x}=1$

و $\lim_{x\to+\infty}\ln(1+x)=+\infty$ إذن :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x^2}{x^2}-2\frac{1+x}{x}\ln(1+x)=-\infty$$

وبما أن : $\lim_{x\to+\infty}x^2=+\infty$

فإن : $\boxed{\lim_{x\to+\infty}g(x)=-\infty}$

2 لدينا الدالة : $x\mapsto1+x^2$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

والدالة : $x\mapsto2x(1+x)$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

والدالة : $x\mapsto\ln(1+x)$ قابلة للاشتقاق على I

ومنه الدالة : g قابلة للاشتقاق على I ولدينا لكل x من I :

$$g'(x)=2x-2(1+2x)\ln(x+1)-\frac{2x(1+x)}{(1+x)}$$
$$=2x-2(1+2x)\ln(x+1)-2x$$
$$=-2(1+2x)\ln(x+1)$$

ومنه : $\boxed{(\forall x\in I)\ ;\ g'(x)=-2(1+2x)\ln(x+1)}$

3 أ حسب جدول تغيرات الدالة g لدينا g متصلة وتناقصية قطعا على المجال $[0,+\infty[$

اذن g تقابل من $[0,+\infty[$ نحو $]-\infty,1]$

وبما أن $g(0)=1>0$ و $\lim_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$

يعني أنه يوجد عدد حقيقي $A>0$ بحيث $f(A)<0$

يعني أن : $f(0)\times f(A)<0$

اذن حسب مبرهنة القيم الوسيطة :

$\boxed{\text{يوجد عدد وحيد } \alpha \text{ موجب قطعا بحيث : } g(\alpha)=0}$

ب لدينا : $g(0)=1$

و $g(1)=2-4\ln2\approx-0.77<0$

اذن : $f(0)\times f(1)<0$

اذن حسب مبرهنة القيم الوسيطة : $\boxed{0<\alpha<1}$

ج انطلاقا من جدول تغيرات الدالة لدينا :

$$\min_{x\in]-1,0]}g(x)=\frac{5}{4}-\frac{\ln2}{2}\approx0.9>0$$

اذن لكل x من $]-1,0]$ لدينا

$$\min_{x\in]-1,0]}g(x)<g(x)$$

اذن : $0<g(x)$ لكل x من $]-1,0]$

اذا كان : $0<x<\alpha$ فإن : $g(0)>g(x)>g(\alpha)$

لأن الدالة g تناقصية على المجال $[0,\alpha[$

ومنه : $1>g(x)>0$ لأن $g(\alpha)=0$

وبالتالي : $\boxed{0<g(x) \text{ لكل } x \text{ من }]-1,\alpha[}$

اذا كان : $\alpha<x$ فإن : $g(\alpha)>g(x)$

لأن الدالة g تناقصية على المجال $[\alpha,+\infty[$

ومنه : $0>g(x)$ لأن : $g(\alpha)=0$

وبالتالي : $\boxed{g(x)<0 \text{ لكل } x \text{ من }]\alpha,+\infty[}$

الجزء الثاني : نعتبر الدالة المعرفة على $I=]-1,+\infty[$ بما يلي : $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{1+x^2}$ وليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1 أ لدينا :

$$\lim_{x\to-1^+}f(x)=\lim_{x\to-1^+}\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}$$
$$=\lim_{x\to-1^+}\frac{\ln(1+x)}{2}$$
$$=\boxed{-\infty}$$

اذن : $\boxed{\text{المستقيم } x=-1 \text{ مقارب عمودي للمنحنى } (C)}$

ب لدينا :

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x}{1+x^2}\,\frac{\ln(1+x)}{1+x}$$
$$=0\times0$$
$$=\boxed{0}$$

اذن : $\boxed{\text{محور الأفاصيل مقارب افقي للمنحنى } (C) \text{ بجوار } +\infty}$

2 أ لدينا الدالة : $x\mapsto1+x^2$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

ولكل x من $\mathbb{R}$ لدينا : $1+x^2\neq0$

والدالة $x\mapsto\ln(1+x)$ قابلة للاشتقاق على I (مركب دالتين)

اذن $\boxed{\text{الدالة } f \text{ قابلة للاشتقاق على } I}$

ولكل x من I لدينا :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{(1+x^2)^2}\left(\frac{1+x^2}{1+x} - 2x\ln(1+x)\right) \\ &= \frac{1}{(1+x^2)^2}\left(\frac{1+x^2-2x(1+x)\ln(1+x)}{1+x}\right) \\ &= \frac{1+x^2-2x(1+x)\ln(1+x)}{(1+x)(1+x^2)^2} \\ &= \frac{g(x)}{(1+x)(1+x^2)^2} \end{aligned}$$

ومنه : $\boxed{\forall x \in I \ ; \ f'(x) = \dfrac{g(x)}{(1+x)(1+x^2)^2}}$

ب لدينا لكل x من $\mathbb{R}$: $(1+x^2)^2 > 0$

ولكل x من I : $x+1>0$

ومنه لكل x من I : $(1+x)(1+x^2)^2 > 0$

اذن اشارة f' هي اشارة الدالة g

يعني أن : $f'(x) > 0$ لكل x من $]-1,\alpha[$

و $f'(x) < 0$ لكل x من $]\alpha,+\infty[$ ومنه :

x	-1		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{2\alpha(1+\alpha)}$	$\searrow$	0

ج لدينا :

$$\begin{aligned} g(\alpha) = 0 &\Leftrightarrow 1+\alpha^2 - 2\alpha(1+\alpha)\ln(1+\alpha) = 0 \\ &\Leftrightarrow \ln(1+\alpha) = \frac{1+\alpha^2}{2\alpha(1+\alpha)} \\ &\Leftrightarrow \frac{\ln(1+\alpha)}{1+\alpha^2} = \frac{1}{2\alpha(1+\alpha)} \end{aligned}$$

وبالتالي : $\boxed{f(\alpha) = \dfrac{\ln(1+\alpha)}{1+\alpha^2} = \dfrac{1}{2\alpha(1+\alpha)}}$

انطلاقا من جدول تغيرات الدالة f لدينا :

$$\max_{x\in I} f(x) = f(\alpha)$$

ومنه لكل x من I لدينا : $f(x) \le \max_{x\in I} f(x)$

يعني أن : $f(x) \le f(\alpha)$

يعني أن : $\boxed{f(x) \le \dfrac{1}{2\alpha(1+\alpha)}}$

3 ا ليكن (T) مماس للمنحنى (C) في $x_0 = 0$

اذن : $(T): \ y = (x-0)f'(0) + f(0)$

ومنه : $\boxed{(T): \ y = x}$

ب نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي : $h(x) = \ln(1+x) - x$

لدينا الدالة h متصلة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^+$ ولدينا :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^+) \ \ h'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x} \le 0$$

اذن الدالة h تناقصية على $\mathbb{R}^+$

ومنه اذا كان $x>0$ فإن : $h(x) < h(0)$

اذن : $(\forall x > 0) \ ; \ \ln(1+x) - \ln(x) < 0$

ومنه : $\boxed{(\forall x > 0) \ \ \ln(1+x) < x}$

ج لدينا لكل x من $\mathbb{R}_+^*$: $\ln(1+x) < x$ و $1+x^2 > 0$

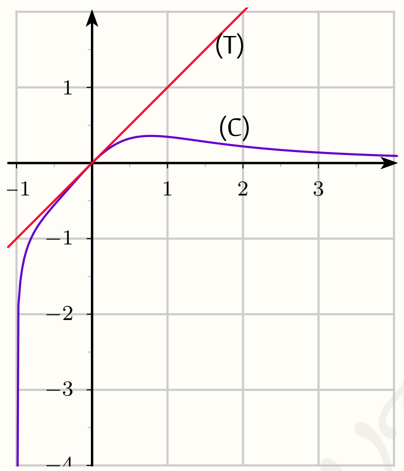
اذن : $\dfrac{\ln(1+x)}{1+x^2} < \dfrac{x}{1+x^2}$ ، ولدينا :

$$\begin{aligned} x > 0 &\Rightarrow x^2 \ge 0 \Rightarrow 1+x^2 > 1 \\ &\Rightarrow \frac{1}{1+x^2} < 1 \Rightarrow \frac{x}{1+x^2} < x \end{aligned}$$

ومنه : $\dfrac{\ln(1+x)}{1+x^2} < x$

وبالتالي : $\boxed{(\forall x > 0) \ ; \ f(x) < x}$

د الشكل :



الجزء الثالث : نضع : $J = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$

1 ا نضع : $t = \dfrac{1-x}{1+x}$ ومنه : $x = \dfrac{1-t}{1+t}$ اذن

لدينا :

$$\left(\begin{array}{l} x \to 0 \Leftrightarrow t \to 1 \\ x \to 1 \Leftrightarrow t \to 0 \end{array}\right)$$

ولدينا :

$$\begin{aligned} dx &= \frac{-(1+t)-(1-t)}{(1+t)^2}dt \\ dx &= \frac{-2}{(1+t)^2}dt \end{aligned}$$

ومنه : $J = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$

ومنه :

$$J=\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$$

$$=\int_1^0 \frac{\ln\left(1+\dfrac{1-t}{1+t}\right)}{1+\left(\dfrac{1-t}{1+t}\right)^2}\frac{-2}{(1+t)^2}dt$$

$$=2\int_0^1 \frac{\ln\left(\dfrac{2}{1+t}\right)}{(1+t)^2+(1-t)^2}dt$$

$$=2\int_0^1 \frac{\ln 2-\ln(1+t)}{2+2t^2}dt$$

$$=\int_0^1 \frac{\ln 2-\ln(1+t)}{1+t^2}dt$$

$$=\int_0^1 \frac{\ln 2}{1+t^2}dt-\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{1+t^2}dt$$

$$=\ln 2\Big[\arctan t\Big]_0^1-J$$

$$=\ln 2\left(\frac{\pi}{4}-0\right)-J$$

$$=\frac{\pi\ln 2}{4}-J$$

ومنه :

$$J=\frac{\pi\ln 2}{4}-J$$

$$2J=\frac{\pi\ln 2}{4}$$

$$J=\frac{\pi\ln 2}{8}$$

وبالتالي : $\boxed{J=\dfrac{\pi\ln 2}{8}}$

ب مساحة الحيز المستوي المحصور بين المنحنى (C) والمستقيمات (T) و $x=0$ و $x=1$ هي :

$$\mathcal{A}=\int_0^1\Big|f(x)-x\Big|dx\left\|\vec{i}\right\|\times\left\|\vec{j}\right\|$$

$$=4\int_0^1\Big(x-f(x)\Big)dx$$

لأن لكل $0\leq x$ لدينا : $f(x)\leq x$

ولدينا : $\left\|\vec{i}\right\|\times\left\|\vec{j}\right\|=2\times 2=4cm^2$

ومنه :

$$\mathcal{A}=4\left(\int_0^1 x\,dx-\int_0^1 f(x)\,dx\right)$$

$$=4\left(\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1-\frac{\pi\ln 2}{8}\right)$$

$$=4\left(\frac{1}{2}-\frac{\pi\ln 2}{8}\right)$$

$$=\left(2-\frac{\pi\ln 2}{2}\right)$$

وبالتالي : $\boxed{\mathcal{A}=\left(2-\dfrac{\pi\ln 2}{2}\right)cm^2}$

2 باستعمال المكاملة بالأجزاء لدينا :

$$K=\int_0^1\frac{\arctan x}{1+x}dx$$

$$=\int_0^1 \ln'(1+x)\arctan x\,dx$$

$$=\Big[\ln(1+x)\arctan x\Big]_0^1-\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$$

$$=\ln 2\arctan 1-J$$

$$=\frac{\pi\ln 2}{4}-\frac{\pi\ln 2}{8}$$

$$=\frac{\pi\ln 2}{8}$$

ومنه : $\boxed{K=\dfrac{\pi\ln 2}{8}}$