

إستنتاج أن $x - y - z + 1 = 0$ معادله ديكارتية للمستوى (ABC)

لدينا $\vec{AB} \wedge \vec{AC} \neq 0$ و هي منظمية على كل من المتجهتين $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ ، إذن هي منظمية على المستوى (ABC) إذن معادلة (ABC) الدكارتية تكتب على الشكل

$$x - y - z + d = 0$$

لتحديد d نفوض إحداثيات A أو B أو C في هذه المعادلة

$$0 - 0 - 1 + d = 0$$

$$\Rightarrow d = 1$$

إذن معادلة (ABC) ديكارتية للمستوى هي $x - y - z + 1 = 0$

(ب) نحسب $d(\mathcal{R}, (ABC))$

$$d(\mathcal{R}, (ABC)) = \frac{|1 - (-1) - (0) + 1|}{\sqrt{(1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2}}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$$

إذن $d(\mathcal{R}, (ABC)) = \sqrt{3} = R_{\mathcal{C}}$ وبما أن النقطة

$A \in (ABC)$ و $A \in (\mathcal{S})$

فإن المستوى (ABC) مماس للكرة (S) في النقطة A

(ج) لدينا $\Delta \perp (ABC)$ إذن المتجه

$\vec{AB} \wedge \vec{AC} (1, -1, -1)$ هي موجهة لـ

وبما أن Δ مار $\mathcal{R}$ فالتشيل البارامتري لـ Δ هو

$$\Delta: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - t \\ z = -t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

بسم الله الرحمن الرحيم

(1) نثبت أن $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 1 = 0$ هي معادلة ديكارتية للكرة (S)

لدينا $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 1 = 0$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + y^2 + 2y + z^2 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow (x - \frac{2}{2})^2 - (\frac{2}{2})^2 + (y + \frac{2}{2})^2 - (\frac{2}{2})^2 + (z - 0)^2 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 0)^2 - 3 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 0)^2 = 3$$

وبالتالي $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 1 = 0$ هي معادلة للكرة (S)

نتحقق أن $A \in (\mathcal{S})$

نفوض إحداثيات A في المعادلة الدكارتية للكرة (S)

$$(0 - 1)^2 + (0 + 1)^2 + (1 - 0)^2 = 1 + 1 + 1 = 3$$

وبما أن إحداثيات النقطة A تحقق المعادلة

الدكارتية للكرة (S) إذن $A \in (\mathcal{S})$

(2) لا نثبت أن $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$

$$\vec{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{AB} \begin{pmatrix} 1 - 0 \\ 1 - 0 \\ 1 - 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AC} \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \\ z_C - z_A \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{AC} \begin{pmatrix} 2 - 0 \\ 1 - 0 \\ 2 - 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= (1 \times 1 - 0 \times 1) \vec{i} - (1 \times 1 - 0 \times 2) \vec{j} + (1 \times 1 - 1 \times 2) \vec{k}$$

$$= 1\vec{i} - 1\vec{j} - 1\vec{k}$$

$$= \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$$

إذاً حل المعادلة $z^2 - 8z + 25 = 0$ هما

$$4 + 3i \quad \text{و} \quad 4 - 3i$$

(ف) نبيذ أن لحق النقطة D صورة A

بالإضافة T هو $d = 10 + 9i$

لدينا $\vec{BC}$ هي متجهة الإضافة و D صورة A بهذه الإضافة، إذن هذه العبارة تحقق المتسوية التالية

$$\vec{BC} = \vec{AD} \Rightarrow c - b = d - a$$

$$\Rightarrow d = c - b + a$$

$$= 10 + 3i - 4 + 3i + 4 + 3i$$

$$= 10 + 9i$$

(ب) نتحقق ما أن $\frac{b-a}{d-a} = -\frac{1}{2}(1+i)$

$$\frac{b-a}{d-a} = \frac{4+3i - 4-3i}{10+9i - 4-3i} = \frac{-6i}{6+6i}$$

$$= \frac{-6i(6-6i)}{(6+6i)(6-6i)} = \frac{-36i+36}{36+36}$$

$$= \frac{-36i+36}{72} = \frac{(-i+1)36}{2 \times 36} = \frac{-1-i}{2}$$

$$\frac{b-a}{d-a} = -\frac{1}{2}(1+i)$$

كتابة $-\frac{1}{2}(1+i)$ على الشكل المثلثي

$$|-\frac{1}{2}(1+i)| = |-\frac{1}{2}| \times |1+i|$$

$$= \frac{1}{2} \times \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Arg}\left(-\frac{1}{2}(1+i)\right) = \text{Arg}\left(-\frac{1}{2}\right) + \text{Arg}(1+i)$$

$$-\frac{1}{2} \in \mathbb{R}^- \quad \text{و} \quad \text{Arg}\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi$$

(ب) استنتاج مثلثي إحداثيات نقطتي تقاطع (S) مع (A)

لدينا $z^2 - 8z + 25 = 0$ هي المعادلة الكارتية للنقطة (S) و

هو التمثيل البارامتري للمستقيم $\begin{cases} x = 1+t \\ y = -1-t \\ z = -t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$

نعوض هذا التمثيل البارامتري في المعادلة الكارتية لـ (S) وذلك لنحصل

$$(1+t)^2 + (-1-t)^2 + (-t)^2 = 3$$

$$t^2 + t^2 + t^2 = 3 \Rightarrow 3t^2 = 3$$

$$\Rightarrow t^2 = 1$$

يعني أن $t = 1$ أو $t = -1$

إذاً مثلثي إحداثيات نقطتي تقاطع (A) مع النقطة (S) هو كالآتي

$$\begin{pmatrix} 1+1 \\ -1-1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{pmatrix} 1+(-1) \\ -1-(-1) \\ -(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

التحريث الثاني (الاعداد العقدية)

حل في المعادلة $z^2 - 8z + 25 = 0$

نحسب أول المميز Δ

$$\Delta = (-8)^2 - 4(1)(25) = 64 - 100 = -36$$

لدينا $\Delta = -36 < 0$ إذن للمعادلة حلان عقد z_1 و z_2 مختلفان

$$z_1 = \frac{8 + i\sqrt{36}}{2} = \frac{8 + 6i}{2} = 4 + 3i$$

$$z_2 = \frac{8 - i\sqrt{36}}{2} = \frac{8 - 6i}{2} = 4 - 3i$$

إذاً حسب البرهان بالترجع $U_n > 1$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{5}U_n + \frac{4}{5} - U_n \quad (6)$$

$$= U_n \left(\frac{1}{5} - 1 \right) + \frac{4}{5} = -\frac{4}{5}U_n + \frac{4}{5}$$

$$= -\frac{4}{5}(U_n - 1)$$

$$U_n - 1 > 0 \Leftrightarrow U_n > 1 \text{ لدينا}$$

و بالتالي $-\frac{4}{5}(U_n - 1) < 0$ إذاً U_n متناقص
متناقص

(ج) بما أن U_n متناقصتنا و متناهية حسب

السؤال السابق

و U_n مصغرة بـ 1 حسب السؤال (أ)
إذاً هي متقاربة

$$V_n = U_n - 1 \quad (7) \quad (8)$$

$$\Rightarrow V_{n+1} = U_{n+1} - 1 = \frac{1}{5}(U_n - 1)$$

$$V_{n+1} = \frac{1}{5}(U_n - 1)$$

$$V_{n+1} = \frac{1}{5}V_n \quad \text{إذاً}$$

و بالتالي V_n هندسية أساسها $\frac{1}{5}$

$$V_n = q^{n-p} V_p = \left(\frac{1}{5} \right)^n \times V_0$$

$$V_0 = U_0 - 1 = 2 - 1 = 1$$

$$V_n = \left(\frac{1}{5} \right)^n \quad \text{إذاً}$$

$$V_n = U_n - 1 \quad \text{لدينا} \quad (9)$$

$$\Rightarrow V_{n+1} = U_{n+1} - 1$$

$$V_n = \left(\frac{1}{5} \right)^n + 1$$

ليكن θ هو عتبة العدد العقدي $(1+i)$

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{و} \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} \quad \text{إذاً}$$

$$\text{Arg} \left(-\frac{1}{2}(1+i) \right) = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$$

و بالتالي الشكل المثلثي للعدد $-\frac{1}{2}(1+i)$ هو

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)$$

$$(ج) \text{ نبين أن } (\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AB}) = \frac{5\pi}{4} [2\pi) \quad (2\pi)$$

$$(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AB}) = \text{Arg} \left(\frac{z_B - z_A}{z_O - z_A} \right) = \text{Arg} \left(\frac{b-a}{a-a} \right)$$

و حسب السؤال السابق $\frac{5\pi}{4}$

$$(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AB}) = \frac{5\pi}{4} [2\pi)$$

التعريف الثالث (المتتالية العددية)

$$U_{n+1} - 1 = \frac{1}{5}U_n + \frac{4}{5} - 1 \quad (1)$$

$$= \frac{1}{5}U_n + \frac{4}{5} - \frac{5}{5} = \frac{1}{5}U_n - \frac{1}{5}$$

$$= \frac{1}{5}(U_n - 1)$$

(2) من أجل $n=0$ لدينا $U_0 = 2 > 1$

عبارة صحيحة من أجل $n=0$

نفتري أن $U_n > 1$ ونبرهن أن $U_{n+1} > 1$

$$\text{لدينا} \quad U_n > 1 \Leftrightarrow \frac{1}{5}U_n > \frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{5}U_n + \frac{4}{5} > \frac{1}{5} + \frac{4}{5} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{5}U_n + \frac{4}{5} > 1 \Leftrightarrow$$

$$U_{n+1} > 1 \Leftrightarrow$$

التقريب الخاص (الو) (1)

$$(2n+1)(n-1) = 2n^2 - 2n + n - 1 = 2n^2 - n - 1 \quad (1)$$

$$g'(x) = (2x^2 - x - 1 - \ln(x))' = (2x^2)' - (x)' - (\ln(x))' = 4x - 1 - \frac{1}{x} = \frac{4x^2 - x - 1}{x}$$

إشارة $g'(x)$ هي إشارة $2x^2 - x - 1$ (ب) $(\forall x \in]0, +\infty[- x > 0)$

إشارة $2x^2 - x - 1$ هي إشارة $x-1$ $2x^2 - x - 1 = (2x+1)(x-1)$ (ب)

	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		-	+

مع جدول إشارة $g'(x)$ (ب)
 بـ g تناقص على $[0, 1]$ و g تزايد على $[1, +\infty[$
 (2) نضع جدول تغيرات g

x	0	1	$+\infty$
$g(x)$			

بيان 0 قيمة دنيا لـ g $g(x) \geq 0$ (ب)

$$f(x) = x^2 - 1 - (\ln(x))^2 \quad (1) \quad (1) \quad (II)$$

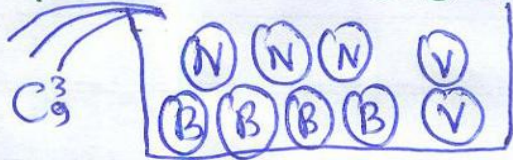
$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 - 1 - (\ln(x))^2 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} -\ln(x)^2 = -\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n + 1 = 1$$

$$(-1 < \frac{1}{5} < 1) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$$

التقريب الرابع (حساب الاحتمال)



$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{C_4^3 + C_3^3}{C_8^3} = \frac{4+1}{56} \quad (1)$$

$$P(A) = \frac{5}{56}$$

$$P(B) = \frac{\text{card}(B)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{C_4^1 \times C_3^1 \times C_2^1}{C_8^3} = \frac{4 \times 3 \times 2}{56}$$

$$P(B) = \frac{24}{56} = \frac{3}{7}$$

(2) لدينا 3 بيوتات سوداء و 5 بيوتات حمراء

$$NNN \quad N\bar{N}\bar{N}\bar{N} \quad N\bar{N}\bar{N} \quad \bar{N}\bar{N}\bar{N}$$

$$P(X=1) = \frac{C_3^1 \times C_5^2}{C_8^3} = \frac{3 \times 10}{56} = \frac{15}{28} \quad (1)$$

$$P(X=1) = \frac{15}{28}$$

$$P(X=2) = \frac{C_3^2 \times C_5^1}{C_8^3} = \frac{3 \times 5}{56} = \frac{15}{56}$$

$$P(X=2) = \frac{15}{56} = \frac{3}{11.2}$$

(3) قانون احتمال

x	0	1	2	3	Σ
$P(X)$	$\frac{5}{56}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{1}{56}$	1

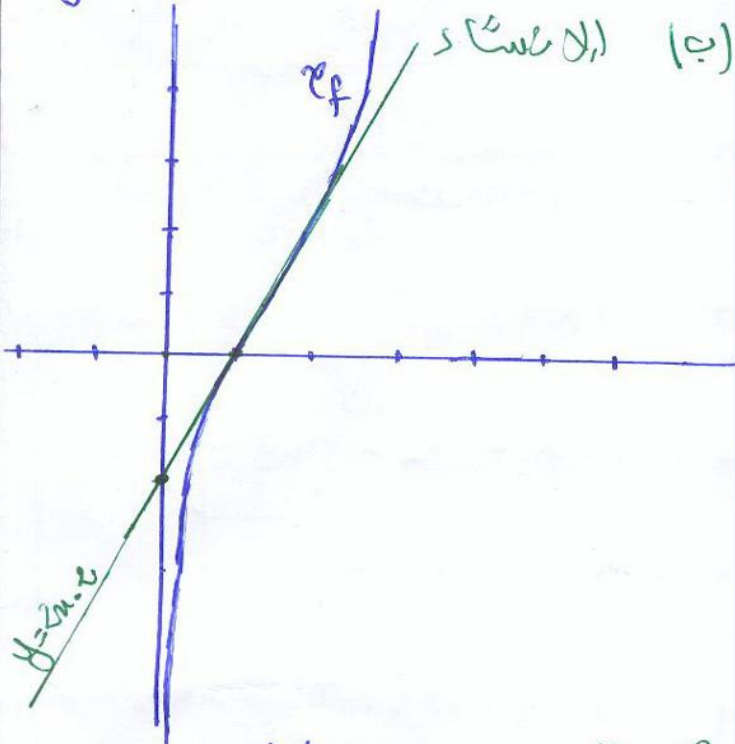
$$P(X=0) = \frac{C_5^3}{C_8^3} =$$

$$P(X=3) = \frac{C_3^3}{C_8^3} = \frac{1}{56}$$

(3) (1) معادلة المماس عند النقطة $A(1,0)$

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$y = 2(x - 1) + 0 = 2x - 2$$



$$x(h(x) - 1)' = (x)'(h(x) - 1) + x(h(x) - 1)'$$

$$= h(x) - 1 + x \times \frac{1}{x}$$

$$= h(x) - 1 + 1 = h(x)$$

و بالتالي $\int_1^e h(x) dx = [x(h(x) - 1)]_1^e$

$$\int_1^e h(x) dx = [x(h(x) - 1)]_1^e$$

$$= e(h(e) - 1) - 1(h(1) - 1)$$

$$= e \times 0 - 1 \times -1 = 1$$

$$u'(x) = \frac{1}{x} \Leftrightarrow u(x) = h(x) \quad \text{ب) (3)}$$

$$v(x) = x(h(x) - 1) \quad v'(x) = h(x) \quad \text{و}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

كذلك $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 1 - (h(x))^2 \quad \text{ب) (3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2} - \left(\frac{h(x)}{x} \right)^2 \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{h(x)}{x} \right)^2 = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{و!}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1 - h(x)^2}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \frac{1}{x} - \frac{h(x)^2}{x} = +\infty$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{h(x)}{x} \right)^2 = 0 \right) \quad \text{ب) (3)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{و!}$$

$$f'(x) = (x^2 - 1 - (h(x))^2)' \quad \text{ب) (3)}$$

$$= 2x - 2 \times \frac{1}{x} \times h(x) = 2x - 2 \frac{h(x)}{x}$$

$$= 2 \left(x - \frac{h(x)}{x} \right) = 2 \left(\frac{x^2 - h(x)}{x} \right)$$

$$\frac{g(x)}{x} + 1 = \frac{x^2 - x - h(x)}{x} + 1 \quad \text{ب) (3)}$$

$$= \frac{x^2 - x - h(x) + x^2 - h(x)}{x} = \frac{x^2 - h(x)}{x}$$

لدينا $g(x) \geq 0$ و ذلك حسب السؤال 2 و 3

$\forall x \in]0, +\infty[\quad \text{و} \quad x > 0$
ومنه $f'(x) \geq 0$ على $]0, +\infty[$

$$= \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_1^e - \left[x \right]_1^e - e + 2 \text{ cm}^2$$

$$= \frac{1}{3} e^3 - \frac{1}{3} - (e - 1) - e + 2 \text{ cm}^2$$

$$= \frac{1}{3} e^3 - \frac{1}{3} - e + 1 - e + 2 \text{ cm}^2$$

$$= \frac{1}{3} e^3 - 2e - \frac{1}{3} + 3 \text{ cm}^2$$

$$= \frac{1}{3} e^3 - 2e - \frac{1+9}{3} \text{ cm}^2$$

$$= \frac{1}{3} e^3 - 2e + \frac{8}{3}$$

$$= \frac{1}{3} (e^3 - 6e + 8) \text{ cm}^2$$

تم التصحيح بواسطة
القاضي عبد الحميد

للتواصل: OULKADIWEB@GMAIL.COM
WWW.FB.COM / OAH208

الهاتف: +212 6 03 67 30 01

$$\int_1^e (h(x))^2 dx$$

$$= \left[h(x) \times x(h(x)-1) \right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \times (h(x)-1) dx$$

$$= \left[x h(x)^2 - x h(x) \right]_1^e - \int_1^e h(x) - 1 dx$$

$$= \left[x h(x)^2 - x h(x) \right]_1^e - \left(\int_1^e h(x) dx - \int_1^e 1 dx \right)$$

$$= e - e - 0 - (1 - [x]_1^e)$$

$$= 0 - (1 - (e - 1))$$

$$= - (1 - e + 1) = e - 2$$

ج) مساحة الحيز المقصور بين $y = f(x)$

و $x = 1$ و $x = e$ و $y = 0$ ، المقام

$$\int_1^e |f(x)| dx = \int_1^e f(x) dx \text{ cm}^2$$

(ن) $f(x)$ فوق محور السينات
في المجال $[1, e]$

$$\int_1^e f(x) dx = \int_1^e x^2 - 1 - h(x)^2 dx \text{ cm}^2$$

$$= \int_1^e x^2 dx - \int_1^e 1 dx - \int_1^e h(x)^2 dx \text{ cm}^2$$