الثانية علوم تجريبية
وطني 2018 - الدورة الاستدراكية

التمرين الأول : (3 نقط)

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر الفلكة (S) التي مركزها $\Omega(2,1,2)$ و شعاعها
يساوي 3 و المستوى (P) المار من النقطة $A(-1,0,3)$ و $\vec{u}(4,0,-3)$ متجهة منظمية عليه

1) بين أن معادلة للفلكة (S) هي : $x^2+y^2+z^2-4x-2y-4z=0$	0,5
2) تحقق من أن معادلة ديكارتية للمستوى (P) هي : $4x-3z+13=0$	0,5
3) أ. تحقق من أن : $(t\in\mathbb{R})$ $\begin{cases}x=2+4t\\ y=1\\ z=2-3t\end{cases}$ هو تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ) المار من Ω و العمودي على (P)	0,5
ب. حدد إحداثيات النقطة H تقاطع المستقيم (Δ) و المستوى (P)	0,5
4) أ. أحسب $d(\Omega,(P))$	0,25
ب. بين أن المستوى (P) مماس للفلكة (S) في نقطة يتم تحديدها	0,75

التمرين الثاني : (3 نقط)

1) حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-2\sqrt{2}z+4=0$	0,75
2) في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقطة A التي لحقها $a=\sqrt{2}(1-i)$ و R الدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{3}$	
أ. أكتب على الشكل المثلثي العدد a	0,25
ب. تحقق من أن لحق النقطة B صورة النقطة A بالدوران R هو $b=2(\cos(\frac{\pi}{12})+i\sin(\frac{\pi}{12}))$	0,5
3) أ. نعتبر النقطة C التي لحقها $c=1+i$. بين أن $b^2-c^2=2\sqrt{3}$	0,5
ب. لتكن t الإزاحة التي متجهتها $\overrightarrow{OC}$ ، و النقطة D هي صورة B بالإزاحة t . بين أن $OD=\lvert b+c\rvert$	0,5
ج. استنتج أن $OD\times BC=2\sqrt{3}$	0,5

التمرين الثالث : (3 نقط)

يحتوي صندوق على 12 كرة لا يمكن التمييز بينها باللمس موزعة كما يلي : 3 كرات حمراء تحمل كل واحدة منها العدد 1
و 3 كرات حمراء تحمل كل واحدة منها العدد 2 و 6 كرات خضراء تحمل كل واحدة منها العدد 2
نسحب عشوائيا و تآنيا كرتين من الصندوق ، و نعتبر الأحداث التالية :
A" الحصول على كرتين تحملان نفس العدد " و B" الحصول على كرتين مختلفتي اللون "
و C" الحصول على كرتين تحملان عددين مجموعهما يساوي 3 "

1) بين أن $p(A)=\frac{13}{22}$ و $p(B)=\frac{6}{11}$ ثم أحسب $p(C)$	1,5
2) أ. بين أن $p(A\cap B)=\frac{3}{11}$	0,5
ب. هل الحدثان A و B مستقلان ؟ علل جوابك .	0,5
3) علما أن الحدث B محقق ، أحسب احتمال الحصول على كرتين تحملان نفس العدد .	0,5

التمرين الرابع : (نقطتان)

1) أ. بين أن الدالة $H : x \mapsto xe^{x}$ دالة أصلية للدالة $h : x \mapsto (x+1)e^{x}$ على $\mathbb{R}$	0,5
ب. استنتج أن : $\int_0^1 (x+1)e^{x}dx = e$	0,5
2) باستعمال مكاملة بالأجزاء ، أحسب $\int_0^1 \left(x^2+2x-1\right)e^{x}dx$	1

المسألة : (9 نقط)

I. لتكن g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بما يلي : $g(x)=x^3-1-2\ln^2(x)+2\ln(x)$

الجدول جانبه هو جدول تغيرات الدالة g على المجال $]0,+\infty[$

x	0 $\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

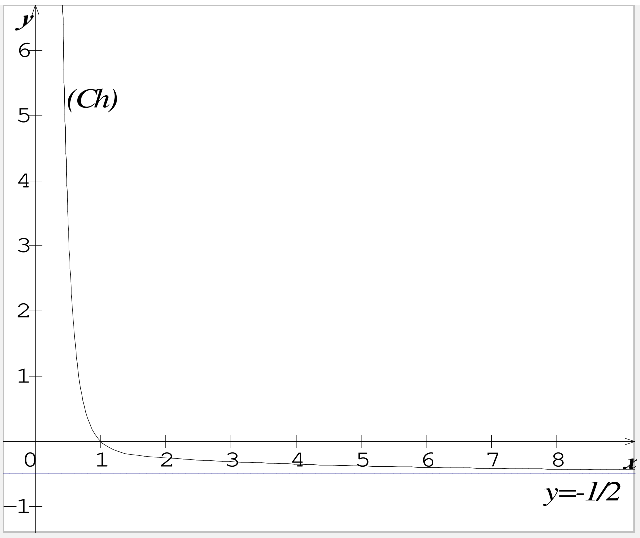
1) أحسب $g(1)$	0,25
2) من خلال هذا الجدول حدد إشارة $g(x)$ على كل من $]0,1]$ و $[1,+\infty[$	0,5

II. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بما يلي :

$$f(x)=x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2x^2}+\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^2$$

و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) أ. تحقق من أن : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$	0,5
ب. بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y=x-\frac{1}{2}$ مقارب للمنحنى (C) بجوار $+\infty$	0,5
ج. حدد الوضع النسبي للمستقيم (D) و المنحنى (C)	0,25
2) بين أن $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty$ و أول هندسيا النتيجة	0,75
3) أ. بين أن $f'(x)=\frac{g(x)}{x^3}$ لكل x من $]0,+\infty[$	1
ب. بين أن الدالة f تناقصية على المجال $]0,1]$ و تزايدية على المجال $[1,+\infty[$	0,5
ج. ضع جدول تغيرات الدالة f على المجال $]0,+\infty[$	0,5
4) أنشئ في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ المستقيم (D) و المنحنى (C) (الوحدة : $1cm$)	



III. نعتبر الدالة العددية h المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $h(x)=f(x)-x$

1) أ. تحقق من أن $h(1)=0$ — $0,25$

ب. في الشكل جانبه (C_h) هو التمثيل المبياني للدالة h. — $0,75$

حدد إشارة $h(x)$ على كل من $]0,1]$ و $[1,+\infty[$ ثم استنتج أنه لكل x من المجال $[1,+\infty[$ لدينا $f(x)\leq x$

2) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0=e$ و $u_{n+1}=f(u_n)$ لكل n من $\mathbb{N}$

1) بين بالترجع أن : $1\leq u_n\leq e$ لكل n من $\mathbb{N}$ — $0,75$

2) بين أن المتتالية (u_n) تناقصية . (يمكنك استعمال نتيجة السؤال III) 1) ب).) — $0,75$

ج. استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم حدد نهايتها . — $0,75$

تصحيح التمرين الأول :

1) لنبين أن معادلة للفلكة (S) هي : $x^2+y^2+z^2-4x-2y-4z=0$

$$\begin{aligned} M(x,y,z)\in(S) &\Leftrightarrow (x-2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=(3)^2 \\ &\Leftrightarrow x^2-4x+4+y^2-2y+1+z^2-4z+4=9 \\ &\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-4x-2y-4z=0 \end{aligned}$$

2) لدينا $\vec{u}(4,0,-3)$ متجهة منظمية على المستوى (P)

إذن معادلة ديكارتية للمستوى (P) تكتب على شكل : $4.x+0.y+(-3).z+d=0$

و لدينا $A(-1,0,3)\in(P)$ إذن : $4.(-1)+0.(0)+(-3).(3)+d=0$ أي : $d=13$

و بالتالي معادلة ديكارتية للمستوى (P) هي : $4x-3z+13=0$

3) أ. لدينا $\vec{u}(4,0,-3)$ متجهة منظمية على المستوى (P) و لدينا (Δ) عمودي على (P)

إذن $\vec{u}(4,0,-3)$ متجهة موجهة للمستقيم (Δ)

و لدينا $\Omega(2,1,2)\in(\Delta)$

إذن تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ) يكتب على شكل : $(t\in\mathbb{R})$ $\begin{cases} x=(2)+(4)t \\ y=(1)+(0)t \\ z=(2)+(-3)t \end{cases}$

و منه : $(t \in \mathbb{R})$ $\begin{cases} x = 2+4t \\ y = 1 \\ z = 2-3t \end{cases}$ هو تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ) المار من Ω و العمودي على (P)

ب.

$$H(x_H, y_H, z_H) \in (\Delta) \cap (P) \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = 2+4t \\ y_H = 1 \\ z_H = 2-3t \\ 4x-3z+13=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_H = 2+4t \\ y_H = 1 \\ z_H = 2-3t \\ 4(2+4t)-3(2-3t)+13=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_H = 2+4t \\ y_H = 1 \\ z_H = 2-3t \\ t = \dfrac{-3}{5} \end{cases}$$

و منه النقطة $H(\frac{-2}{5}, 1, \frac{19}{5})$ هي نقطة تقاطع المستقيم (Δ) و المستوى (P)

4) أ.

$$d(\Omega, (P)) = \frac{|4(2)+0(1)+(-3)(2)+13|}{\sqrt{(4)^2+(0)^2+(-3)^2}} = \frac{15}{5} = 3$$

ب. بما أن $d(\Omega,(P)) = R$ (حيث R هو شعاع الفلكة (S)) فإن المستوى (P) مماس للفلكة (S)
و نقطة التماس هي المسقط العمودي للنقطة Ω على المستوى (P) أي نقطة تقاطع المستقيم (Δ) و المستوى (P)

و بالتالي نقطة التماس هي $H(\frac{-2}{5}, 1, \frac{19}{5})$

تصحيح التمرين الثاني :

1) لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0$
لدينا : $\Delta = (-2\sqrt{2})^2 - 4(1)(4) = -8$
بما أن $\Delta < 0$ فإن للمعادلة حلين عقديين مترافقين

$z=\frac{2\sqrt{2}+i\sqrt{8}}{2}=\frac{2\sqrt{2}+i2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ أو $z=\frac{2\sqrt{2}-i\sqrt{8}}{2}=\frac{2\sqrt{2}-i2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}-i\sqrt{2}$

و منه : $S=\left\{\sqrt{2}-i\sqrt{2};\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right\}$

2) أ. لدينا $a=\sqrt{2}(1-i)=\sqrt{2}-i\sqrt{2}$

معيار العدد a : $|a|=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(-\sqrt{2})^2}=\sqrt{4}=2$

لنكتب على الشكل المثلثي العدد a :

$$a=\sqrt{2}-i\sqrt{2}=2(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2})=2(\cos(\frac{\pi}{4})-i\sin(\frac{\pi}{4}))=2(\cos(\frac{-\pi}{4})+i\sin(\frac{-\pi}{4}))$$

ب. لدينا النقطة $B(b)$ صورة النقطة $A(a)$

إذن : $b-0=e^{i\frac{\pi}{3}}.(a-0)$

إذن : $b=e^{i\frac{\pi}{3}}.2e^{i\frac{-\pi}{4}}=2e^{i(\frac{\pi}{3}+\frac{-\pi}{4})}=2e^{i\frac{\pi}{12}}$

و منه : $b=2(\cos(\frac{\pi}{12})+i\sin(\frac{\pi}{12}))$

3) أ. لدينا باستعمال علاقة موافر :

$$b^2=(2(\cos(\frac{\pi}{12})+i\sin(\frac{\pi}{12})))^2=2^2(\cos(2\frac{\pi}{12})+i\sin(2\frac{\pi}{12}))=4(\cos(\frac{\pi}{6})+i\sin(\frac{\pi}{6}))=4(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2})=2\sqrt{3}+2i$$

و لدينا : $c^2=(1+i)^2=1+2i+i^2=2i$

و منه : $b^2-c^2=2\sqrt{3}$

ب. لدينا النقطة $D(d)$ هي صورة $B(b)$ بالإزاحة t التي متجهتها $\overrightarrow{OC}$

إذن : $d=b+z_{\overrightarrow{OC}}=b+c-0=b+c$

و منه : $OD=|d-0|=|d|=|b+c|$

ج. $OD\times BC=|b+c|\times|b-c|=|(b+c)(b-c)|=|b^2-c^2|=|2\sqrt{3}|=2\sqrt{3}$

تصحيح التمرين الثالث :

التجربة : نسحب عشوائيا و تآنيا كرتين من الصندوق

ليكن Ω كون إمكانيات هذه التجربة

لدينا : $card\Omega=C_{12}^{2}=66$

1) A " الحصول على كرتين تحملان نفس العدد "

1 1 أو 2 2

لدينا $cardA = C_3^2 + C_9^2 = 3 + 36 = 39$

إذن : $p(A) = \dfrac{cardA}{card\Omega} = \dfrac{39}{66} = \dfrac{13}{22}$

B "الحصول على كرتين مختلفتي اللون "

لدينا $cardB = C_6^1 \times C_6^1 = 6 \times 6 = 36$

إذن : $p(B) = \dfrac{cardB}{card\Omega} = \dfrac{36}{66} = \dfrac{6}{11}$

C "الحصول على كرتين تحملان عددين مجموعهما يساوي 3 "

1 و 2

لدينا $cardC = C_3^1 \times C_9^1 = 3 \times 9 = 27$

إذن : $p(C) = \dfrac{cardC}{card\Omega} = \dfrac{27}{66} = \dfrac{9}{22}$

(2 أ. $A \cap B$ "الحصول على كرتين مختلفتي اللون و تحملان نفس العدد "

2 و 2

لدينا $card\left(A \cap B\right) = C_3^1 \times C_6^1 = 3 \times 6 = 18$

إذن $p(A \cap B) = \dfrac{card\left(A \cap B\right)}{card\Omega} = \dfrac{18}{66} = \dfrac{3}{11}$

ب. لدينا $p\left(A \cap B\right) = \dfrac{3}{11}$ و $p\left(A\right) \times p(B) = \dfrac{13}{22} \times \dfrac{6}{11} = \dfrac{39}{121}$

بما أن $p(A \cap B) \neq p\left(A\right) \times p(B)$ فإن الحدثين غير مستقلين

(3 $p_B\left(A\right) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)} = \dfrac{\frac{3}{11}}{\frac{6}{11}} = \dfrac{1}{2}$

تصحيح التمرين الرابع :

1) أ.

- $H : x \mapsto xe^x$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ كجداء دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}$
- ليكن $x \in \mathbb{R}$

لدينا : $H'(x) = (xe^x)' = (x)'e^x + x(e^x)' = 1.e^x + x.e^x = (x+1).e^x$

إذن : $\forall x \in \mathbb{R} \quad H'(x) = h(x)$

و منه الدالة $H : x \mapsto xe^x$ دالة أصلية للدالة $h : x \mapsto (x+1)e^x$ على $\mathbb{R}$

ب. $\int_0^1 (x+1)e^x dx = \int_0^1 h(x)dx = [H(x)]_0^1 = [xe^x]_0^1 = 1.e^1 - 0.e^0 = e$

2) لنحسب $\int_0^1 (x^2+2x-1)e^x dx$

$$\begin{cases} U(x) = x^2+2x-1 \\ V'(x) = e^x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} U'(x) = 2x+2 \\ V(x) = e^x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x^2+2x-1)e^x dx &= \left[(x^2+2x-1)e^x\right]_0^1 - \int_0^1 (2x+2)e^x dx \\ &= \left[(x^2+2x-1)e^x\right]_0^1 - 2\int_0^1 (x+1)e^x dx \\ &= (2e) - (-1) - 2(e) = 1 \end{aligned}$$

تصحيح المسألة :

I.

1) $g(1) = (1)^3 - 1 - 2\ln^2(1) + 2\ln(1) = 1 - 1 - 2(0) + 2(0) = 0$

2)

- على المجال $]0,1]$:

لدينا $0 < x \leq 1$ و g تزايدية على $]0,1]$

إذن : $g(x) \leq g(1)$

و منه : $g(x) \leq 0$

- على المجال $[1,+\infty[$:

لدينا $x \geq 1$ و g تزايدية على $[1,+\infty[$

إذن : $g(x) \geq g(1)$

و منه : $g(x) \geq 0$

.II

1) أ.
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2x^2}+\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^2=+\infty$$

لأن :
$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} x-\frac{1}{2}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2x^2}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0\end{cases}$$

ب. لدينا :
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-(x-\frac{1}{2})=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x^2}+\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^2=0$$

لأن :
$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2x^2}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0\end{cases}$$

إذن المستقيم (D) الذي معادلته $y=x-\frac{1}{2}$ مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $+\infty$

ج. ليكن $x\in]0,+\infty[$

لدينا :
$$f(x)-(x-\frac{1}{2})=\frac{1}{2x^2}+\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^2$$

من الواضح أن : $\frac{1}{2x^2}+\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^2>0$

إذن : $(\forall x\in]0,+\infty[)\quad f(x)-(x-\frac{1}{2})>0$

و منه االمنحنى (C) يوجد فوق المستقيم (D)

2)
$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2x^2}+\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^2=+\infty$$

لأن :
$$\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x-\frac{1}{2}=\frac{-1}{2}\\ \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1}{2x^2}=+\infty\\ \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^2=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(\frac{1}{x}\times\ln(x)\right)^2=+\infty\qquad \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1}{x}=+\infty\qquad \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\ln(x)=-\infty\end{cases}$$

بما أن $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)=+\infty$ فإن المنحنى (C) يقبل مقاربا عموديا معادلته $x=0$

3) أ. الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$

ليكن $x\in]0,+\infty[$:

لدينا :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2x^2}+\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^2\right)' \\
&= 1-\frac{(2x^2)'}{(2x^2)^2}+2\times\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)'\times\frac{\ln(x)}{x} \\
&= 1-\frac{4x}{4x^4}+2\times\frac{\frac{1}{x}\times x-\ln(x)}{x^2}\times\frac{\ln(x)}{x} \\
&= 1-\frac{1}{x^3}+2\times\frac{1-\ln(x)}{x^2}\times\frac{\ln(x)}{x} \\
&= \frac{x^3-1+2\ln(x)-2(\ln(x))^2}{x^3} \\
&= \frac{g(x)}{x^3}
\end{aligned}$$

إذن : $f'(x)=\frac{g(x)}{x^3}$ لكل x من $]0,+\infty[$

ب. ليكن $x\in]0,+\infty[$:

لدينا $f'(x)=\frac{g(x)}{x^3}$

بما أن $x>0$ فإن $x^3>0$

و منه إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$

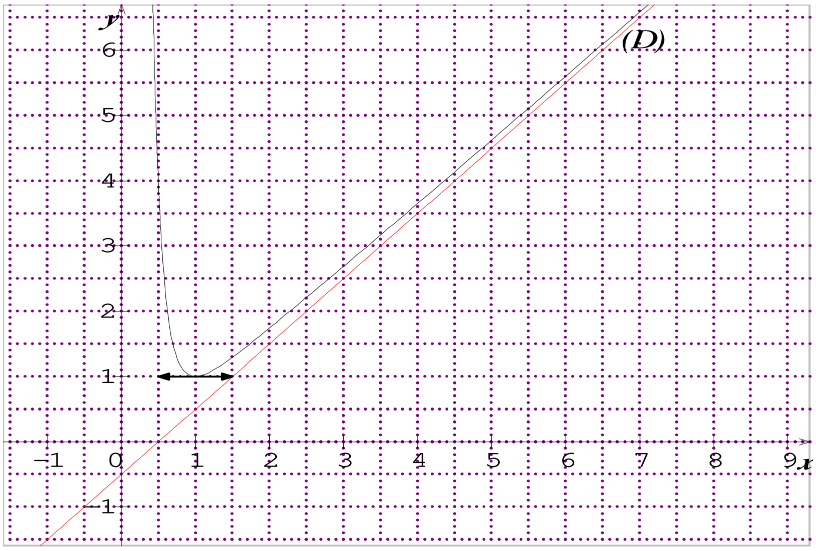
و حسب نتيجة الجزء الأول : السؤال 2)

- على المجال $]0,1]$: لدينا $g(x)\leq 0$ إذن $f'(x)\leq 0$ و منه f تناقصية
- و على المجال $[1,+\infty[$: لدينا $g(x)\geq 0$ إذن $f'(x)\geq 0$ و منه f تزايدية

ج. جدول تغيرات الدالة f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

(4



.III

1) أ. $h(1)=f(1)-1=1-1=0$

ب. انطلاقا من مبيان الدالة h :

- على المجال $]0,1]$: (C_h) يوجد فوق محور الأفاصيل إذن : $h(x)\geq 0$

و على المجال $[1,+\infty[$: (C_h) يوجد تحت محور الأفاصيل إذن : $h(x)\leq 0$

- الاستنتاج :

بما أن $h(x)\leq 0$ على المجال $[1,+\infty[$

فإن $f(x)-x\leq 0$ على المجال $[1,+\infty[$

و منه لكل x من المجال $[1,+\infty[$ لدينا $f(x)\leq x$

2) أ. لنبين بين بالترجع أن : $1\leq u_n\leq e$ لكل n من $\mathbb{N}$

- من أجل $n=0$:

لدينا : $u_0=e$

إذن : $1\leq u_0\leq e$

- ليكن $n\in\mathbb{N}$

▷ نفترض أن : $1\leq u_n\leq e$

▷ و نبين أن : $1\leq u_{n+1}\leq e$

حسب الافتراض لدينا $1\leq u_n\leq e$

و بما أن الدالة f تزايدية على المجال $[1,e]$

فإن : $f(1)\leq f(u_n)\leq f(e)$

وبما أن $f(1)=1$ و $u_{n+1}=f(u_n)$ و $f(e)\leq e$ (لأن لكل x من المجال $[1,+\infty[$ لدينا $f(x)\leq x$)

فإن : $1\leq u_{n+1}\leq e$

- نستنتج أن : $1 \leq u_n \leq e$ لكل n من $\mathbb{N}$

ب. لنبين أن المتتالية (u_n) تناقصية

ليكن $n \in \mathbb{N}$

بما أن $1 \leq u_n \leq e$ لكل n من $\mathbb{N}$ و لكل x من المجال $[1,+\infty[$ لدينا $f(x) \leq x$

فإن $f(u_n) \leq u_n$

و منه $u_{n+1} \leq u_n$ لكل n من $\mathbb{N}$

و بالتالي المتتالية (u_n) تناقصية

ج. بما أن (u_n) تناقصية و مصغورة بالعدد 1 فإن المتتالية (u_n) متقاربة

<u>لنحدد نهاية (u_n)</u>

لدينا : $u_0 \in [1,e]$ و $u_{n+1} = f(u_n)$ لكل n من $\mathbb{N}$

- f متصلة على المجال $[1,e]$
- $f([1,e]) \subset [1,e]$
- المتتالية (u_n) متقاربة

إذن نهاية (u_n) هي حل للمعادلة $f(x) = x$

$$f(x) = x \quad \Leftrightarrow \quad h(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$$

و منه : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$

つづく