تصحيح التمرين الأول :

1)

✓ لدينا $\overrightarrow{AB}(1,0,-2)$ و $\overrightarrow{AC}(-3,1,4)$

إذن : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \vec{k}$

و منه : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$

✓ لدينا : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(2,2,1)$ متجهة منظمية للمستوى (ABC) إذن معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) تكتب على شكل : $(2)x + (2)y + (1)z + d = 0$

و بما أن $A(0,-2,-2) \in (ABC)$ فإن $(2)(0) + (2)(-2) + (1)(-2) + d = 0$ أي $d = 6$

وبالتالي : $2x + 2y + z + 6 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC)

2)

$$M(x,y,z) \in (S) \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z - 23 = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 + z^2 - 2z = 23$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + z^2 - 2z + 1 = 23 + 1 + 1$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 25$$
$$\Leftrightarrow (x-(1))^2 + (y-(0))^2 + (z-(1))^2 = (5)^2$$

إذن مركز الفلكة (S) هو النقطة $\Omega(1,0,1)$ و أن شعاعها هو $R = 5$

3) أ-

لنحدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (Δ) المار من $\Omega(1,0,1)$ و العمودي على المستوى (ABC)

بما أن $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(2,2,1)$ متجهة منظمية للمستوى (ABC) و بما أن (Δ) عمودي على المستوى (ABC)

فإن $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(2,2,1)$ هي متجهة موجهة للمستقيم (Δ)

و لدينا $\Omega(1,0,1) \in (\Delta)$

إذن تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ) هو : $(t \in \mathbb{R})$ $\begin{cases} x = (1) + t(2) \\ y = (0) + t(2) \\ z = 1 + t(1) \end{cases}$

أي : $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2t \\ z=1+t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$

ب-

$$H(x_H,y_H,z_H)\in(\Delta)\cap(ABC) \Leftrightarrow \begin{cases} x_H=1+2t \\ y_H=2t \\ z_H=1+t \\ 2x_H+2y_H+z_H+6=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_H=1+2t \\ y_H-1+2t \\ z_H=t \\ 2(1+2t)+2(2t)+(1+t)+6=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_H=1+2t \\ y_H=2t \\ z_H=1+t \\ t=-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_H=-1 \\ y_H=-2 \\ z_H=0 \end{cases}$$

(4

✓ لدينا : $d(\Omega,(ABC))=\dfrac{|2(1)+2(0)+(1)+6|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=\dfrac{9}{\sqrt{9}}=\dfrac{9}{3}=3$

بما أن $d(\Omega,(ABC))<R$ ($R=5$ شعاع الفلكة (S))

فإن : المستوى (ABC) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة شعاعها :

$$r=\sqrt{R^2-(d(\Omega,(ABC)))^2}=\sqrt{5^2-3^2}=\sqrt{16}=4$$

و مركزها (هو المسقط العمودي للنقطة Ω على المستوى (ABC)) نقطة تقاطع (Δ) و (ABC)

أي النقطة $H(-1,-2,0)$

تصحيح التمرين الثاني :

1) لنحل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $2z^2+2z+5=0$

لدينا : $\Delta=(2)^2-4(2)(5)=-36$

بما أن $\Delta<0$ فإن المعادلة تقبل حلين عقديين مترافقين :

$$z=\frac{-(2)-i\sqrt{36}}{2(2)} \quad \text{أو} \quad z=\frac{-(2)+i\sqrt{36}}{2(2)}$$

$$z=\frac{-2-6i}{4} \quad \text{أو} \quad z=\frac{-2+6i}{4}$$

$$z=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i \quad \text{أو} \quad z=-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$$

إذن : $S=\left\{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i,-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\right\}$

2) أ- لنكتب على الشكل المثلثي العدد العقدي : $d=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

لدينا : $d=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)$

إذن : $d=1.\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

ب- لدينا : R هو الدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{2\pi}{3}$

إذن الكتابة العقدية للدوران R هي : $z'-0=e^{i\frac{2\pi}{3}}(z-0)$ أي : $\boxed{z'=d.z}$

بما أن $B(b)$ صورة النقطة $A(a)$ بالدوران R

فإن : $b=d.a$

3) أ-

✓ لدينا : t الإزاحة التي متجهتها $\overrightarrow{OA}$

إذن الكتابة العقدية للإزاحة t هي : $z'=z+z_{\overrightarrow{OA}}=z+a-0$ أي : $\boxed{z'=z+a}$

بما أن $C(c)$ صورة النقطة $B(b)$ بالإزاحة t

فإن : $c=b+a$

✓ $c=b+a=a\left(\frac{b}{a}+1\right)=a(d+1)=a\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i+1\right)=a\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

(حسب السؤال 2) ب- لدينا : $b = d.a$ إذن $\frac{b}{a} = d$)

ب-

✓ لدينا $c = a\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ إذن $\frac{c}{a} = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$

إذن $\arg\left(\frac{c}{a}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

✓ لدينا : $\left|\frac{c}{a}\right| = \left|\frac{c-0}{a-0}\right| = 1$ إذن $\frac{OC}{OA} = 1$ و منه $\boxed{OC = OA}$

و لدينا : $\arg\left(\frac{c}{a}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ إذن $\arg\left(\frac{c-0}{a-0}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ و منه $\boxed{\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]}$

و بالتالي : المثلث OAC متساوي الأضلاع .

تصحيح التمرين الثالث :

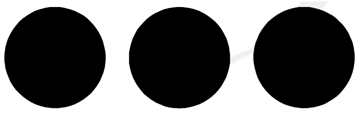
1) التجربة : " نسحب عشوائيا و تآنيا 3 كرات من الصندوق"

ليكن Ω كون إمكانيات هذه التجربة

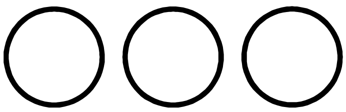
$$card\Omega = C_9^3 = 84$$

✓

A :"الكرات الثلاث المسحوبة لها نفس اللون"



أو

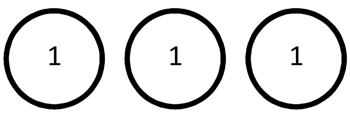


$$cardA = C_4^3 + C_5^3 = 4 + 10 = 14$$

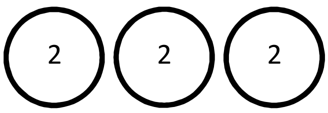
$$p(A) = \frac{cardA}{card\Omega} = \frac{14}{84} = \frac{1}{6}$$

✓

B :"الكرات الثلاث المسحوبة تحمل نفس العدد "



أو

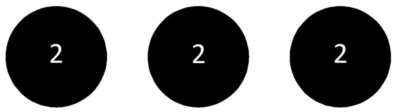


$$cardB = C_3^3 + C_6^3 = 1 + 20 = 21$$

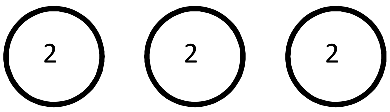
$$p(B) = \frac{cardB}{card\Omega} = \frac{21}{84} = \frac{1}{4}$$

✓

C: "الكرات الثلاث المسحوبة لها نفس اللون و تحمل نفس العدد"



أو



$$cardC = C_3^3 + C_3^3 = 1 + 1 = 2$$

$$p(C) = \frac{cardC}{card\Omega} = \frac{2}{84} = \frac{1}{42}$$

2) نكرر التجربة السابقة 3 مرات مع إعادة الكرات الثلاث المسحوبة إلى الصندوق بعد كل سحبة ، و نعتبر المتغير العشوائي X الذي يساوي عدد المرات التي يتحقق فيها الحدث A

أ- لدينا X متغير عشوائي حداني وسيطاه n و p

حيث : n هو عدد مرات تكرار التجربة أي $n = 3$

و p هو احتمال تحقق الحدث A أي : $p = p(A) = \dfrac{1}{6}$

ب-
$$p(X=1) = C_3^1\left(\frac{1}{6}\right)^1 \times \left(1-\frac{1}{6}\right)^{3-1} = 3\times\frac{1}{6}\times\frac{25}{36} = \frac{25}{72}$$

$$p(X=2) = C_3^2\left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(1-\frac{1}{6}\right)^{3-2} = 3\times\frac{1}{36}\times\frac{5}{6} = \frac{5}{72}$$

تصحيح المسألة :

I. لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = e^x - x^2 + 3x - 1$

1) $g(0) = e^0 - 0^2 + 3(0) - 1 = 1 - 0 + 0 - 1 = 0$

2)

✓ على المجال $]-\infty,0]$:

لدينا $x \le 0$ و انطلاقا من جدول تغيرات الدالة g لدينا : g تزايدية

إذن : $g(x) \le g(0)$ و منه $g(x) \le 0$

✓ على المجال $[0,+\infty[$:

لدينا $x \ge 0$ و انطلاقا من جدول تغيرات الدالة g لدينا : g تزايدية

إذن : $g(x) \ge g(0)$ و منه $g(x) \ge 0$

.II لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x)=(x^2-x)e^{-x}+x$

1) أ-

✓ ليكن $x\in\mathbb{R}$:

لدينا :

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2-x)e^{-x}+x \\ &= (x^2-x)\times\frac{1}{e^x}+x \\ &= \frac{x^2}{e^x}-\frac{x}{e^x}+x \end{aligned}$$

إذن $f(x)=\frac{x^2}{e^x}-\frac{x}{e^x}+x$ لكل x من $\mathbb{R}$

✓ $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}-\frac{x}{e^x}+x=+\infty$

لأن $\begin{cases} \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=0^+ & \left(\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}=+\infty\right) \\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0^+ & \left(\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty\right) \\ \lim_{x\to+\infty} x=+\infty & \end{cases}$

ب- لدينا : $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}-\frac{x}{e^x}=0$

إذن : المنحنى (C) يقبل مقاربا مائلا (D) بجوار $+\infty$ معادلته $y=x$

ج-

✓ ليكن $x\in\mathbb{R}$:

لدينا : $f(x)=\frac{x^2}{e^x}-\frac{x}{e^x}+x=\frac{x^2-x+xe^x}{e^x}$

إذن : $f(x)=\frac{x^2-x+xe^x}{e^x}$ لكل x من $\mathbb{R}$

✓ $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x+xe^x}{e^x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{e^x}\times\left(x^2-x+xe^x\right)=+\infty$

لأن : $\lim_{x\to-\infty} x^2-x=\lim_{x\to-\infty} x^2=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} xe^x=0^-$ $\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\left(x^2-x+xe^x\right)=+\infty$

و : $\lim_{x\to-\infty} e^x=0^+$

د-

✓ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-x+xe^x}{xe^x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{xe^x}\times\left(x^2-x+xe^x\right)=-\infty$

: $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2-x=\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0^-$ $\Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2-x+xe^x\right)=+\infty$

و : $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0^-$

✓ لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-\infty$

إذن : المنحنى (C) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب بجوار $-\infty$

2) أ- ليكن $x\in\mathbb{R}$:

لدينا : $f(x)-x=\left(x^2-x\right)e^{-x}$

بما أن $e^{-x}>0$

فإن $f(x)-x$ و x^2-x لهما نفس الإشارة لكل x من $\mathbb{R}$

ب- لدينا : $f(x)-x$ و x^2-x لهما نفس الإشارة لكل x من $\mathbb{R}$

لندرس إشارة x^2-x :

x	$-\infty$ 0 1 $+\infty$
$x2-x$	+ 0 − 0 +

✓ على المجالين $]-\infty,0]$ و $[1,+\infty[$:

لدينا $x^2-x\geq 0$

إذن $f(x)-x\geq 0$

و منه (C) يوجد فوق (D)

✓ على المجال $[0,1]$:

لدينا $x^2-x\leq 0$

إذن $f(x)-x\leq 0$

و منه (C) يوجد تحت (D)

3) أ- الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

ليكن $x\in\mathbb{R}$:

لدينا :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\left(x^2-x\right)e^{-x}+x\right)' \\
&= \left(x^2-x\right)'e^{-x}+\left(x^2-x\right)\left(e^{-x}\right)'+1 \\
&= (2x-1)e^{-x}-\left(x^2-x\right)e^{-x}+1 \\
&= e^{-x}\left(2x-1-x^2+x+e^x\right) \\
&= e^{-x}\left(e^x-x^2+3x-1\right) \\
&= e^{-x}g(x)
\end{aligned}$$

إذن لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا $f'(x)=g(x)e^{-x}$

ب- لدينا لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا $f'(x)=g(x)e^{-x}$ و نعلم أن لكل x من $\mathbb{R}$ $e^{-x}>0$

إذن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$

✓ <u>على المجال $]-\infty,0]$:</u>

لدينا $g(x)\leq 0$ إذن $f'(x)\leq 0$

و منه الدالة f تناقصية على $]-\infty,0]$

✓ <u>على المجال $[0,+\infty[$:</u>

لدينا $g(x)\geq 0$ إذن $f'(x)\geq 0$

و منه الدالة f تزايدية على $[0,+\infty[$

ج- جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4) أ- لدينا : f' قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

ليكن $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(e^{-x}g(x)\right)' \\ &= \left(e^{-x}\right)' \times g(x) + e^{-x} \times g'(x) \\ &= -e^{-x}\left(e^{x} - x^{2} + 3x - 1\right) + e^{-x}\left(e^{x} - 2x + 3\right) \\ &= e^{-x}\left(-e^{x} + x^{2} - 3x + 1 + e^{x} - 2x + 3\right) \\ &= e^{-x}\left(x^{2} - 5x + 4\right) \end{aligned}$$

إذن : $f''(x) = \left(x^{2} - 5x + 4\right)e^{-x}$ لكل x من $\mathbb{R}$

ب- لدينا $f''(x) = \left(x^{2} - 5x + 4\right)e^{-x}$ لكل x من $\mathbb{R}$ و نعلم أن لكل x من $\mathbb{R}$ $e^{-x} > 0$

إذن إشارة $f''(x)$ هي إشارة $x^{2} - 5x + 4$

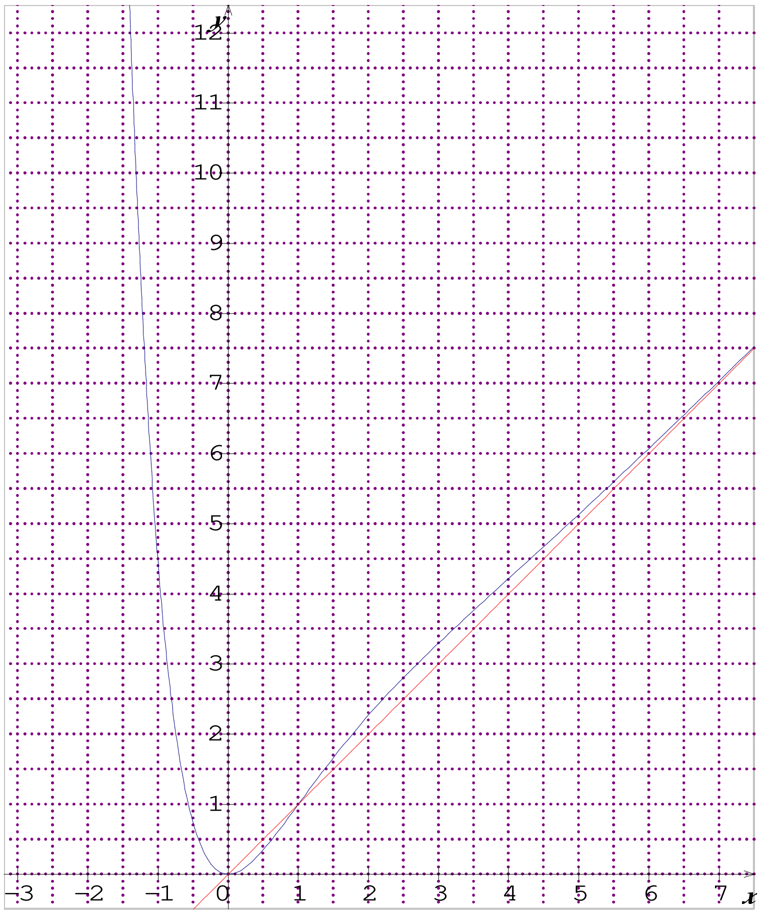
$$\begin{aligned} f''(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x^{2} - 5x + 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = 1 \quad \text{أو} \quad x = 4 \end{aligned}$$

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

- ✓ f'' تنعدم و تغير إشارتها عند العدد 1 إذن (C) نقطة انعطاف أفصولها 1
- ✓ f'' تنعدم و تغير إشارتها عند العدد 4 إذن (C) نقطة انعطاف أفصولها 4

و منه المنحنى (C) يقبل نقطتي انعطاف أفصولاهما على التوالي هما 1 و 4

(5



6) أ- لنبين أن الدالة $H : x \mapsto (x^2+2x+2)e^{-x}$ دالة أصلية للدالة $h : x \mapsto -x^2e^{-x}$ على $\mathbb{R}$

✓ لدينا : $H : x \mapsto (x^2+2x+2)e^{-x}$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

✓ ليكن $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} H'(x) &= \left((x^2+2x+2)e^{-x}\right)' \\ &= (x^2+2x+2)'e^{-x} + (x^2+2x+2)(e^{-x})' \\ &= (2x+2)e^{-x} - (x^2+2x+2)e^{-x} \\ &= (2x+2-x^2-2x-2)e^{-x} \\ &= -x^2e^{-x} \\ &= h(x) \end{aligned}$$

إذن $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad H'(x) = h(x)$

✓ و منه الدالة $H : x \mapsto (x^2+2x+2)e^{-x}$ دالة أصلية للدالة $h : x \mapsto -x^2e^{-x}$ على $\mathbb{R}$

- $\int_0^1 x^2e^{-x}dx = \int_0^1 -h(x)dx = [-H(x)]_0^1 = \left[-(x^2+2x+2)e^{-x}\right]_0^1 = \left(\frac{-5}{e}\right)-(-2) = 2-\frac{5}{e} = \frac{2e-5}{e}$

ب-

$$\begin{cases} u(x)=x \\ v'(x)=e^{-x} \end{cases} \searrow \begin{cases} u'(x)=1 \\ v(x)=-e^{-x} \end{cases} \downarrow$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 xe^{-x}dx &= \left[-xe^{-x}\right]_0^1 - \int_0^1 -e^{-x}dx \\
&= \left(\left(-\frac{1}{e}\right)-(0)\right)-\left[e^{-x}\right]_0^1 \\
&= -\frac{1}{e}-\left(\frac{1}{e}-1\right) \\
&= \frac{-2}{e}+1 \\
&= \frac{e-2}{e}
\end{aligned}$$

ج- مساحة حيز المستوى المحصور بين (C) و (D) و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=0$ و $x=1$

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^1 |f(x)-x|dx \times \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| \\
&= \int_0^1 (x-f(x))dx \times 1cm \times 1cm \\
&= \int_0^1 (-x^2+x)e^{-x}dx \\
&= \left(\int_0^1 -x^2e^{-x}dx + \int_0^1 xe^{-x}dx\right)cm^2 \\
&= \left(\left(\frac{5-2e}{e}\right)+\left(\frac{e-2}{e}\right)\right)cm^2 \\
&= \left(\frac{3-e}{e}\right)cm^2
\end{aligned}$$

.III لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة كما يلي : $u_0 = \frac{1}{2}$ و $u_{n+1} = f(u_n)$ لكل n من $\mathbb{N}$

1) لنبين بالترجع : $0 \leq u_n \leq 1$ لكل n من $\mathbb{N}$

- ✓ من أجل $n = 0$:

لدينا : $u_0 = \frac{1}{2}$

إذن : $0 \leq u_0 \leq 1$

- ✓ ليكن $n \in \mathbb{N}$

- ▪ نفترض أن : $0 \leq u_n \leq 1$
- ▪ و نبين أن : $0 \leq u_{n+1} \leq 1$ ؟

لدينا حسب الإفتراض : $0 \leq u_n \leq 1$ و حسب نتيجة *السؤال* $II - 3$) ب- لدينا f تزايدية على $[0,1]$

إذن : $f(0) \leq f(u_n) \leq f(1)$

إذن : $0 \leq u_{n+1} \leq 1$

- ✓ نستنتج أن : $0 \leq u_n \leq 1$ لكل n من $\mathbb{N}$

2) ليكن $n \in \mathbb{N}$:

لدينا $f(x) - x \leq 0 \quad (\forall x \in [0,1])$

و بما أن $0 \leq u_n \leq 1$

فإن : $f(u_n) - u_n \leq 0$

و منه $u_{n+1} - u_n \leq 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

و بالتالي المتتالية (u_n) تناقصية

3)

- ✓ بما أن (u_n) تناقصية و مصغورة (بالعدد 0) فإنها متقاربة
- ✓ لدينا :

$u_0 = \frac{1}{2} \in [0,1]$ و $u_{n+1} = f(u_n)$ لكل n من $\mathbb{N}$

- ▪ لدينا : f متصلة على $[0,1]$
- ▪ $f([0,1]) = [f(0), f(1)] = [0,1]$
- ▪ (u_n) متقاربة

إذن نهاية المتتالية (u_n) هي حل للمعادلة : $f(x) = x$

$f(x) = x \Leftrightarrow x = 0$ *أو* $x = 1$

بما أن $\left(u_n\right)$ تناقصية فإن $u_n \leq u_0 \quad \left(\forall n \in \mathbb{N}\right)$

إذن $u_n \leq \frac{1}{2} \quad \left(\forall n \in \mathbb{N}\right)$

إذن $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \leq \frac{1}{2}$

و منه $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$