التمرين 1:

1- حساب u_1.

لدينا: $u_0 = \frac{3}{2}$ و $u_1 = \frac{2u_0}{2u_0+5}$

$$= \frac{2\times 3/2}{2\times 3/2+5}$$

$$= \frac{3}{8}$$

2- لنبين بالترجع أن: $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n>0$.

من أجل $n=0$ لدينا: $u_0=\frac{3}{2}$ ومنه $u_0>0$ (العلاقة صحيحة)

نفترض أن: $u_n>0$ من أجل n من $\mathbb{N}$

ولنبين أن: $u_{n+1}>0$

لدينا: $u_n>0$ ومنه $2u_n>0$

و $2u_n+5>0$ وبالتالي:

$$u_{n+1} = \frac{2u_n}{2u_n+5} > 0$$

إذن حسب مبدأ الترجع:

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n>0$$

3-أ)- لنبين أن: $\forall n\in\mathbb{N},\ 0<u_{n+1}\leq \frac{2}{5}u_n$

لدينا: $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{2u_n}{2u_n+5}$

و $\forall n\in\mathbb{N},\ 2u_n+5>5$

ومنه $\forall n\in\mathbb{N},\ \frac{1}{2u_n+5} < \frac{1}{5}$

وبما أن: $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n>0$

فإن: $\forall n\in\mathbb{N},\ \frac{2u_n}{2u_n+5} < \frac{2}{5}u_n$

من جهة ثانية لدينا: $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n>0$

ومنه: $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}>0$

وبالتالي:

$$\forall n\in\mathbb{N},\ 0<u_{n+1}<\frac{2}{5}u_n$$

لنستنتج أن:

$$\forall n\in\mathbb{N},\ 0<u_n\leq \frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n$$

لدينا: $\forall n\in\mathbb{N},\ 0<u_{n+1}<\frac{2}{5}u_n$

ومنه: $0<\cancel{u_1}<\frac{2}{5}u_0$

$\times\quad 0<u_2<\frac{2}{5}\cancel{u_1}$

$\times\quad \vdots$

$\times\quad 0<u_n<\frac{2}{5}\cancel{u_n}$

$$0<u_n<\left(\frac{2}{5}\right)^n\times\frac{3}{2}$$

ب)- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

لأن: $\lim \left(\frac{3}{2}\right)\times\left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$

(لأن $-1<\frac{2}{5}<1$)

و $\forall n\in\mathbb{N},\ 0<u_n\leq\frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n$

-4)

4)- لنبين أن (v_n) هندسية:

لدينا: $\forall n\in\mathbb{N},\ v_n=\dfrac{4u_n}{2u_n+3}$

ومنه: $\forall n\in\mathbb{N},\ v_{n+1}=\dfrac{4u_{n+1}}{2u_{n+1}+3}$

$$=\frac{4\left(\frac{2u_n}{2u_n+5}\right)}{2\left(\frac{2u_n}{2u_n+5}\right)+3}$$

$$=\frac{\frac{8u_n}{2u_n+5}}{\frac{4u_n+6u_n+15}{2u_n+5}}$$

$$=\frac{8u_n}{10u_n+15}$$

$$=\frac{2}{5}\,\frac{4u_n}{2u_n+3}$$

$$=\frac{2}{5}v_n$$

وبالتالي (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{2}{5}$ وحدها الأول $v_0=1$

ب)- v_n بدلالة n.

لدينا: $\forall n\in\mathbb{N},\ v_n=v_0\times q^n$

أي أن $\forall n\in\mathbb{N},\ v_n=1\times\left(\frac{2}{5}\right)^n$

وبالتالي: $\forall n\in\mathbb{N},\ v_n=\left(\frac{2}{5}\right)^n$

u_n بدلالة n:

لدينا: $\forall n\in\mathbb{N},\ v_n=\dfrac{4u_n}{2u_n+3}$

ومنه: $\forall n\in\mathbb{N},\ v_n(2u_n+3)=4u_n$

أي أن: $\forall n\in\mathbb{N},\ 2u_nv_n+3v_n=4u_n$

وبالتالي: $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n(2v_n-4)=-3v_n$

ومنه: $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\dfrac{3v_n}{4-2v_n}$

أي أن: $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\dfrac{3\times\left(\frac{2}{5}\right)^n}{4-2\left(\frac{2}{5}\right)^n}$

التمرين الثاني:

$(E):z^2-2(\sqrt{2}+\sqrt{6})z+16=0$

$$\Delta=\left(-2(\sqrt{2}+\sqrt{6})\right)^2-4\times1\times16$$

$$=4\left((\sqrt{2})^2+2\sqrt{2}\sqrt{6}+6\right)-4\times16$$

$$=-4\left(16-8-2\sqrt{2}\sqrt{6}\right)$$

$$=-4\left(6-2\sqrt{2}\times\sqrt{6}+2\right)$$

$$=-4\left((\sqrt{6})^2-2\sqrt{2}\times\sqrt{6}+(\sqrt{2})^2\right)$$

$$=-4\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2$$

ب)- استنتاج حلول (E)

$$z_1 = \frac{2(\sqrt{2}+\sqrt{6}) - i2(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{2}$$

$$z_1 = \sqrt{2}+\sqrt{6} - (\sqrt{6}-\sqrt{2})i$$

و $$z_2 = \sqrt{2}+\sqrt{6} + (\sqrt{6}-\sqrt{2})i$$

2)- أ- لنتحقق أن: $b\overline{c} = a$

لدينا:

$$b\overline{c} = (1+i\sqrt{3})\overline{(\sqrt{2}+i\sqrt{2})}$$

$$= (1+i\sqrt{3})(\sqrt{2}-i\sqrt{2})$$

$$= \sqrt{2}-i\sqrt{2}+i\sqrt{6}+\sqrt{6}$$

$$= \sqrt{2}+\sqrt{6}+i(\sqrt{6}-\sqrt{2})$$

$$= a$$

لنستنتج أن: $ac = 4b$

لدينا:

$$b\overline{c} = a$$

ومنه $$b\overline{c}\times c = ac$$

أي أن: $$b\times|c|^2 = ac$$

وبما أن: $$c = \sqrt{2}+i\sqrt{2}$$

فإن: $$|c|^2 = (\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2 = 4$$

إذن: $$\boxed{ac = 4b}$$

ب)- لدينا:

$$b = 1+i\sqrt{3} \Rightarrow |b| = \sqrt{1^2+3} = 2$$

$$b = 2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$c = \sqrt{2}+i\sqrt{2} \Rightarrow |c| = 2$$

$$c = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$c = 2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

ج)-

$$a = 4\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

لدينا:

$$a = b\overline{c}$$

$$= \left[2,\frac{\pi}{3}\right]\times\left[2,\frac{-\pi}{4}\right]$$

$$= \left[4,\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right]$$

$$= \left[4,\frac{\pi}{12}\right]$$

3)- أ)-

لنتحقق أن: $z' = \frac{1}{4}az$

لدينا: $$R(M)=M' \Leftrightarrow (z'-0) = e^{i\frac{\pi}{12}}(z-0)$$

$$\Leftrightarrow z' = z\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

$$\Leftrightarrow z' = \frac{1}{4}az.$$

ب)- $R(C) = ?$

لدينا:

$$z' = \frac{1}{4}ac$$

$$= \frac{1}{4}\times 4b$$

$$= b$$

ومنه: $R(C) = B$.

ج)- طبيعة المثلث OBC.

لدينا: $R(C) = B$

ومنه $OC = OB$ ومنه المثلث OBC متساوي الساقين في O.

التمرين 3: (تتمة 4)

1) -أ- لدينا $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, g(x) = 2\sqrt{x} - 2 - \ln x$

ومنه $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, g'(x) = \frac{2 \times 1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x}$

أي: $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, g'(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{x}$

ب)- g ↑ على المجال $[1, +\infty[$.

لدينا: $\forall x \in [1, +\infty[, \sqrt{x} \geq 1$

ومنه $\forall x \in [1, +\infty[, \sqrt{x} \geq 1$

إذن: $\forall x \in [1, +\infty[, \frac{\sqrt{x} - 1}{x} \geq 0$

وبالتالي $\forall x \in [1, +\infty[, g'(x) \geq 0$

إذن الدالة g ↑ على المجال $[1, +\infty[$.

2) - لنستنتج أن:

$\forall x \in [1, +\infty[, 0 \leq \ln x \leq 2\sqrt{x}$

لدينا: $\forall x \in [1, +\infty[; x \geq 1$

وبما أن g ↑ في $[1, +\infty[$ فإن:

$\forall x \in [1, +\infty[, g(x) \geq g(1) = 0$

أي أن: $\forall x \in [1, +\infty[; 2\sqrt{x} - 2 - \ln x \geq 0$

وبالتالي: $\forall x \in [1, +\infty[; 2\sqrt{x} - 2 \geq \ln x$

ومنه:

$\forall x \in [1, +\infty[; 2\sqrt{x} \geq \ln x$

د)- لنبين أن: $a^4 = 128b$

لدينا:

$a = [4, \frac{\pi}{12}]$

و $b = [2, \frac{\pi}{3}]$

ومنه: $a^4 = [4^4, 4 \times \frac{\pi}{12}]$

$a^4 = [256, \frac{\pi}{3}]$

$a^4 = 128 \times [2, \frac{\pi}{3}]$

$a^4 = 128 \times b$

← استنتاج أن: النقط O و B و D مستقيمية.

لدينا. $d = a^4$

و $a^4 = 128b$

إذن: $\frac{d}{b} = 128$

أي أن: $\frac{d - 0}{b - 0} = 128 \in \mathbb{R}^*$

صفر

ومنه النقط O و B و D مستقيمية

$= \frac{19}{3} - 4\ln 4$

المسألة:

$\forall x \in \mathbb{R}$

$f(x) = -x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2} - 4)$

(1- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

لأن:
$$\begin{cases} \lim_{x\to-\infty} -x + \frac{5}{2} = +\infty \\ \lim_{x\to-\infty} e^{x-2} = 0 \end{cases}$$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} -x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2} - 4)$

لأن:

$\lim_{x\to+\infty} -x + \frac{5}{2} = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{2}e^{x-2} = -\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} (e^{x-2} - 4) = +\infty$

(2- أ-

$\lim_{x\to-\infty} f(x) - y = \lim_{x\to-\infty} -\frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2} - 4)$

$= 0$

ومنه (Δ) مقارب مائل لـ $(\mathcal{C})$ بجوار $-\infty$.

ب-
$e^{x-2} - 4 = 0$

$\Leftrightarrow e^{x-2} = 4$

$\Leftrightarrow x - 2 = \ln 4$

$\Leftrightarrow x = (\ln 4) + 2$

لدينا: $\forall x \in]-\infty, 2+\ln 4]$

$f(x) - y = -\frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2} - 4) \geq 0$

لأن: $\forall x \in]-\infty, 2+\ln 4]$

$-\frac{1}{2}e^{x-2} < 0$ و $e^{x-2} - 4 \leq 0$

إذن (Δ) فوق $(\mathcal{C})$ على المجال $]-\infty, 2+\ln 4]$

ج- لنبين أن:
$\forall x \in [1, +\infty[;\ 0 \leq \frac{(\ln x)^3}{x^2} \leq \frac{8}{\sqrt{x}}$

لدينا:
$\forall x \in [1, +\infty[;\ 0 \leq \ln x \leq 2\sqrt{x}$

ومنه:
$\forall x \in [1, +\infty[;\ 0 \leq (\ln x)^3 \leq 2^3 (\sqrt{x})^3$

إذن:
$\forall x \in [1, +\infty[;\ 0 \leq \frac{(\ln x)^3}{x^2} \leq \frac{8}{\sqrt{x}}$

لدينا:
$\lim_{x\to+\infty} \frac{8}{\sqrt{x}} = 0$

إذن:
$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^3}{x^2} = 0$

(2- أ-

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*;\ G'(x) = \left(x\left(-1 + \frac{4}{3}\sqrt{x} - \ln x\right)\right)'$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ G'(x) = -1 + \frac{4}{3}\sqrt{x} - \ln x + x\left(\frac{2}{3\sqrt{x}} - \frac{1}{x}\right)$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*;\ G'(x) = -1 + \frac{4}{3}\sqrt{x} - \ln x + \frac{2}{3}\sqrt{x} - 1$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ G'(x) = 2\sqrt{x} - 2 - \ln x$
$= g(x)$

ومنه G دالة أصلية لـ g على $\mathbb{R}_+^*$.

ب-
$\int_1^4 g(x)\,dx = [G(x)]_1^4$

$= \left[x\left(-1 + \frac{4}{3}\sqrt{x} - \ln x\right)\right]_1^4$

$= \left(4\left(-1 + \frac{4}{3}\times 2 - \ln 4\right) - \left(\frac{4}{3} - 1\right)\right)$

$= 4\left(\frac{5}{3} - \ln 4\right) - \frac{1}{3}$

$= \frac{20}{3} - 4\ln 4 - \frac{1}{3}$

و: $\forall x\in[2+\ln 4,+\infty[$

$$f(x)-y=-\frac{1}{2}e^{x-2}\left(e^{x-2}-4\right)\leq 0$$

لأن: $-\frac{1}{2}e^{x-2}>0$ و $e^{x-2}-4\geq 0$

لكل x من $[2+\ln 4,+\infty[$.

3-) إذن (Δ) فوق $(\mathcal{C})$ على المجال $[2+\ln 4,+\infty[$

لنبين أن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{+\infty}\frac{-x+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2}-4)}{x}$$

$$=\lim_{+\infty}-1+\frac{5}{2x}-\frac{1}{2}\,\frac{e^{x-2}}{x}\left(e^{x-2}-4\right)$$

$$=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x-2}}{x}=\lim_{+\infty}\frac{e^{x}}{x}\times\frac{1}{e^{2}}$$

$$=+\infty$$

و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{x-2}-4\right)=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}-1+\frac{5}{2x}=-1$$

$(\mathcal{C})$ يقبل فرع شلجمي في اتجاه محور الأراتيب.

4-) أ-) $\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=$

$$f'(x)=\left(-x+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2}-4)\right)'$$

$$=-1-\frac{1}{2}e^{x-2}\left(e^{x-2}-4\right)-\frac{1}{2}e^{x-2}\left(e^{x-2}\right)$$

$$=-1-\left(e^{x-2}\right)^{2}+2e^{x-2}$$

$$=-\left(e^{x-2}-1\right)^{2}$$

ب-)

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	
$f(x)$		↘		↘	

5-) $\forall x\in\mathbb{R},\ f''(x)=\left(f'(x)\right)'$

$$=\left(-\left(e^{x-2}-1\right)^{2}\right)'$$

$$=\left(-2\left(e^{x-2}-1\right)e^{x-2}\right)$$

$$=-2e^{x-2}\left(e^{x-2}-1\right)$$

$$f''(x)=0\iff x=2$$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
تقعر $(\mathcal{C}_f)$		محدب	$A(2,2)$	مقعر	

6-) لدينا f متصلة على $[2+\ln 3;2+\ln 4]$ و f تناقصية قطعا.

و $f(2+\ln 3)=-(2+\ln 3)+\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\times 3$

$$=2-\ln 3>0$$

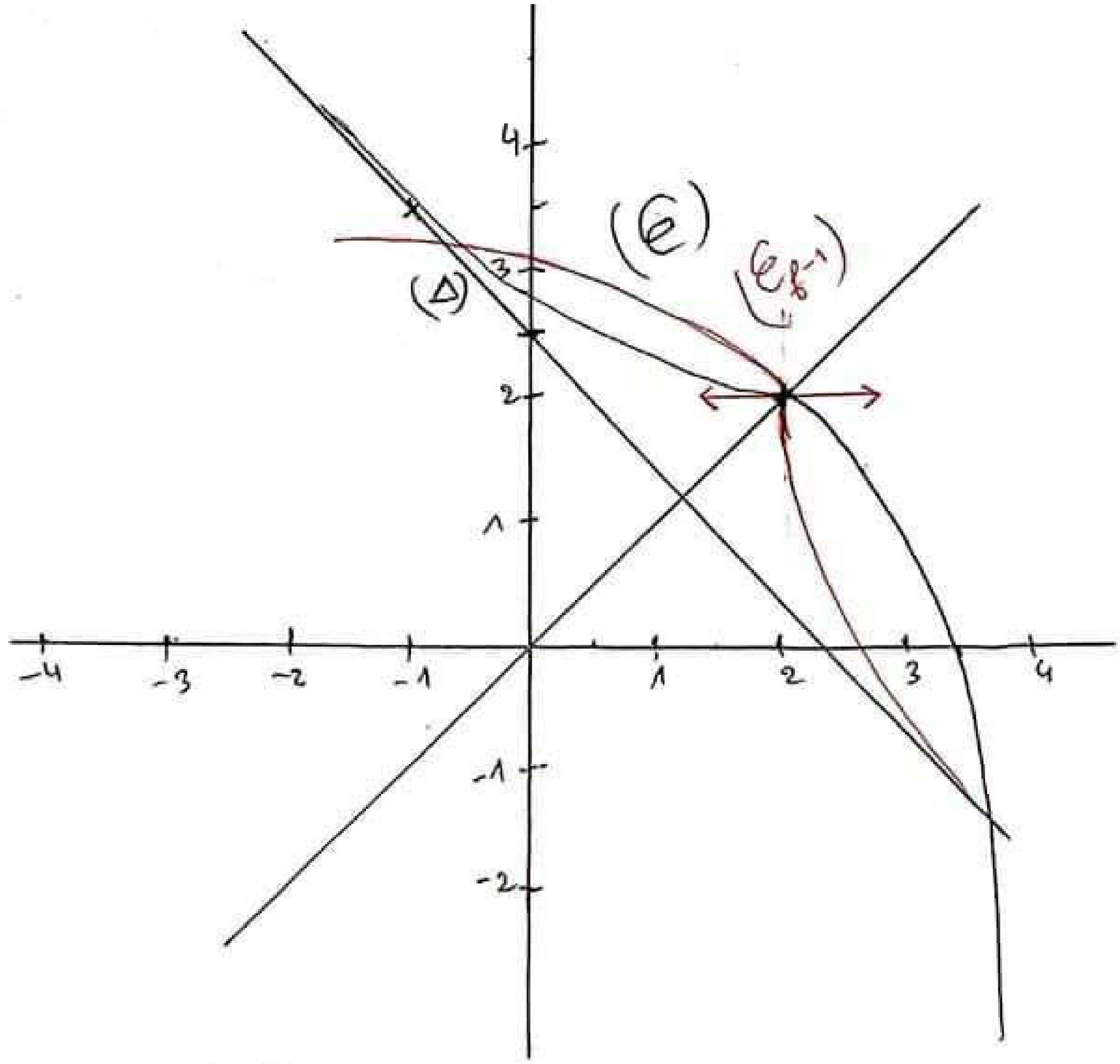
$$f(2+\ln 4)=-(2+\ln 4)+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\times 0$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\ln 4\right)<0$$

$$f(2+\ln 3)\times f(2+\ln 4)<0$$

ومنه حسب TVI

$$\exists!\,\alpha\in[2+\ln 3,\ 2+\ln 4]\ /\ f(\alpha)=0$$



8) f-1) لدينا f دالة متصلة ومتناقصة تماما على $\mathbb{R}$ إذن فهي تقبل دالة عكسية معرفة على $f(\mathbb{R})$.

$$f(\mathbb{R}) = \left]\lim_{+\infty} f(x), \lim_{-\infty} f(x)\right[=]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$$

2) $(f^{-1})'(2+\ln 3)$

لدينا، $f'(2+\ln 3) = -(e^{\ln 3}-1)^2 = -4 \neq 0$

إذن: f^{-1} قابلة للاشتقاق في $2+\ln 3$ ولدينا:

$$(f^{-1})'(2+\ln 3) = \frac{1}{f'(2+\ln 3)} = \frac{1}{-4} = -\frac{1}{4}.$$