

Exercice 1 (2 points)

1

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $e^{2x} - 4e^x + 3 = 0$

(0.5pt)

$$\begin{aligned}
 e^{2x} - 4e^x + 3 = 0 &\Leftrightarrow e^{2x} - 4e^x + 4 - 1 = 0 \\
 &\Leftrightarrow (e^x - 2)^2 - 1 = 0 \\
 &\Leftrightarrow (e^x - 2 - 1)(e^x - 2 + 1) = 0 \\
 &\Leftrightarrow (e^x - 3)(e^x - 1) = 0 \\
 &\Leftrightarrow e^x - 3 = 0 \quad \text{ou} \quad e^x - 1 = 0 \\
 &\Leftrightarrow e^x = 3 \quad \text{ou} \quad e^x = 1 \\
 &\Leftrightarrow x = \ln 3 \quad \text{ou} \quad x = \ln 1 = 0
 \end{aligned}$$

D'où l'ensemble des solutions de cette équation est :

$$S_1 = \{0; \ln 3\}$$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $e^{2x} - 4e^x + 3 \leq 0$

(0.5pt)

Le signe de $e^{2x} - 4e^x + 3$ est le même que le signe de $x^2 - 4x + 3$, alors on a :

x	$-\infty$	0	$\ln 3$	$+\infty$	
$e^{2x} - 4e^x + 3$	+	0	-	0	+

Donc : $e^{2x} - 4e^x + 3 \leq 0 \Leftrightarrow x \in [0; \ln 3]$

D'où l'ensemble des solutions de cette inéquation est :

$$S_2 = [0; \ln 3]$$

c) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 4e^x + 3}{e^{2x} - 1}$

(0.5pt)

On a : $e^{2x} - 1 = (e^x)^2 - 1 = (e^x + 1)(e^x - 1)$ et $e^{2x} - 4e^x + 3 = (e^x - 3)(e^x - 1)$, donc :

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 4e^x + 3}{e^{2x} - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 3)(e^x - 1)}{(e^x + 1)(e^x - 1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 3}{e^x + 1} \\
 &= \frac{1 - 3}{1 + 1} \\
 &= \frac{-2}{2} \\
 &= -1
 \end{aligned}$$

D'où : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 4e^x + 3}{e^{2x} - 1} = -1$

2 Montrer que l'équation $e^{2x} + e^x + 4x = 0$ admet une solution dans l'intervalle $[-1, 0]$ (0.5pt)

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = e^{2x} + e^x + 4x$.

La fonction h est continue sur $\mathbb{R}$, car somme, composée de fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

Comme :
$$\begin{cases} h(-1) = \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e} - 4 = \frac{1+e-4e}{e^2} \approx -0.96 < 0 \\ h(0) = 1 + 1 + 0 = 2 > 0 \end{cases}, \quad \text{alors } h(-1) \times h(0) < 0$$

D'où d'après le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction h admet une solution dans $[-1, 0]$

Exercice 2 (4 points)

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{3-2u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1 Calculer u_1 (0.25pt)

$$u_1 = \frac{u_0}{3-2u_0} = \frac{\frac{1}{2}}{3-2 \times \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{3-1} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$

D'où : $u_1 = \frac{1}{4}$

2 Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$, $0 < u_n \leq \frac{1}{2}$ (0.5pt)

- Pour $n = 0$, on a $u_0 = \frac{1}{2}$, alors : $0 < u_0 \leq \frac{1}{2}$
- Soit n de $\mathbb{N}$, supposons que $0 < u_n \leq \frac{1}{2}$ et montrons que $0 < u_{n+1} \leq \frac{1}{2}$.

On sait (par hypothèse de récurrence) :

$$\begin{aligned} 0 < u_n \leq \frac{1}{2} &\Leftrightarrow -1 < -2u_n \leq 0 \\ &\Leftrightarrow 2 < 3 - 2u_n \leq 3 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{3} < \frac{1}{3-2u_n} \leq \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow 0 \times \frac{1}{3} < u_n \times \frac{1}{3-2u_n} \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow 0 < \frac{u_n}{3-2u_n} \leq \frac{1}{4} \leq \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow 0 < u_{n+1} \leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

D'après le principe du raisonnement par récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < u_n \leq \frac{1}{2}$$

3 a Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}$ (0.5pt)

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{u_n}{3-2u_n}}{u_n} = \frac{u_n}{3-2u_n} \times \frac{1}{u_n} = \frac{1}{3-2u_n}$$

D'après la question (2), on a :

$$\begin{aligned}
 0 < u_n \leq \frac{1}{2} &\Leftrightarrow -1 < -2u_n \leq 0 \Leftrightarrow 2 < 3 - 2u_n \leq 3 \\
 &\Leftrightarrow \frac{1}{3} < \frac{1}{3 - 2u_n} \leq \frac{1}{2} \\
 &\Leftrightarrow \frac{1}{3} < \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N}); \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}$

- b** En déduire la monotonie de la suite (u_n)

(0.5pt)

D'après la question précédente, pour tout n de $\mathbb{N}$, $0 < \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2} < 1$, alors $u_{n+1} \leq u_n$

D'où : la suite (u_n) est décroissante.

4

- a** Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $0 < u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$; puis calculer la limite de la suite (u_n) (0.75pt)

- Pour $n = 0$, on a $u_0 = \frac{1}{2}$ et $\left(\frac{1}{2}\right)^{0+1} = \frac{1}{2}$, alors : $0 < u_0 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{0+1}$
- Soit n de $\mathbb{N}$, supposons que $0 < u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ et montrons que $0 < u_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$

On sait (par hypothèse de récurrence et la question 3)a) :

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} 0 < u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \\ 0 < \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2} \end{cases} &\Rightarrow 0 < u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n \\
 &\Rightarrow 0 < u_{n+1} \leq \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \\
 &\Rightarrow 0 < u_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}
 \end{aligned}$$

D'après le principe du raisonnement par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

Comme : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$, et puisque : $0 < \frac{1}{2} < 1$, alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$,

D'où : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

- b** On pose $v_n = \ln(3 - 2u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$, calculer $\lim v_n$

(0.5pt)

On a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$, alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3 - 2u_n = 3$

Puisque la fonction $\ln$ est continue sur $]0; +\infty[$ et que $3 \in]0; +\infty[$, alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(3 - 2u_n) = \ln \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} 3 - 2u_n \right) = \ln 3$$

D'où : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ln 3$

- 5 a Vérifier que pour tout n de $\mathbb{N}$, $\frac{1}{u_{n+1}} - 1 = 3 \left(\frac{1}{u_n} - 1 \right)$ (0.5pt)

$$\frac{1}{u_{n+1}} - 1 = \frac{3 - 2u_n}{u_n} - 1 = \frac{3 - 2u_n - u_n}{u_n} = \frac{3 - 3u_n}{u_n} = 3 \left(\frac{1 - u_n}{u_n} \right) = 3 \left(\frac{1}{u_n} - 1 \right)$$

D'où : $\left(\forall n \in \mathbb{N} \right); \quad \frac{1}{u_{n+1}} - 1 = 3 \left(\frac{1}{u_n} - 1 \right)$

- b En déduire u_n en fonction de n pour tout n de $\mathbb{N}$ (0.5pt)

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $\frac{1}{u_{n+1}} - 1 = 3 \left(\frac{1}{u_n} - 1 \right)$ et $\frac{1}{u_n} - 1 \neq 0$,

Donc (par le produit télescopique) :

$$\otimes \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{u_1} - 1 = 3 \left(\frac{1}{u_0} - 1 \right) \\ \frac{1}{u_2} - 1 = 3 \left(\frac{1}{u_1} - 1 \right) \\ \vdots \\ \frac{1}{u_{n-1}} - 1 = 3 \left(\frac{1}{u_{n-2}} - 1 \right) \\ \frac{1}{u_n} - 1 = 3 \left(\frac{1}{u_{n-1}} - 1 \right) \end{array} \right.$$

Donc :

$$\frac{1}{u_n} - 1 = 3^n \left(\frac{1}{u_0} - 1 \right) = 3^n (2 - 1) = 3^n \Leftrightarrow \frac{1}{u_n} = 3^n + 1 \Leftrightarrow u_n = \frac{1}{3^n + 1}$$

D'où : $\forall n \in \mathbb{N}; \quad u_n = \frac{1}{3^n + 1}$

Exercice 3 (5 points)

- 1 Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation : $z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$ (0.75pt)

Le discriminant Δ de l'équation est :

$$\Delta = \sqrt{3}^2 - 4 \times 1 = 3 - 4 = -1 = i^2$$

Donc l'équation admet deux solutions sont :

$$z_1 = \frac{\sqrt{3} + i}{2}; \quad z_2 = \frac{\sqrt{3} - i}{2}$$

D'où l'ensemble des solutions de équation est : $S = \left\{ \frac{\sqrt{3} - i}{2}; \frac{\sqrt{3} + i}{2} \right\}$

- 2 Soient les nombres complexes $a = e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $b = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

- a Écrire a sous forme algébrique. (0.25pt)

$$a = e^{i\frac{\pi}{6}} = \cos \left(\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

b) Vérifier que $\bar{a}b = \sqrt{3}$

(0.5pt)

$$\bar{a}b = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) \left(\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}i - \frac{3}{4}i + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{3}}{4} = \frac{4\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$$

D'où : $\bar{a}b = \sqrt{3}$

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives a, b et $\bar{a}$.

3 Montrer que le point B est l'image du point A par une homothétie h de centre O dont on déterminera le rapport. (0.5pt)

On a $|a| = |e^{i\frac{\pi}{6}}| = 1$ et d'après la question précédente, on a :

$$\begin{aligned}\bar{a}b = \sqrt{3} &\Leftrightarrow \bar{a}ab = \sqrt{3}a \\ &\Leftrightarrow |a|^2 b = \sqrt{3}a \\ &\Leftrightarrow b = \sqrt{3}a \\ &\Leftrightarrow \vec{OB} = \sqrt{3}\vec{OA}\end{aligned}$$

D'où : le point B est l'image du point A par l'homothétie h de centre O et de rapport $\sqrt{3}$

4 Soient z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$

a) Écrire z' en fonction de z et a .

(0.5pt)

$$\begin{aligned}R(M) = M' &\Leftrightarrow z_{M'} - z_A = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_M - z_A) \\ &\Leftrightarrow z' - a = i(z - a) \\ &\Leftrightarrow z' = i(z - a) + a\end{aligned}$$

D'où : $z' = i(z - a) + a$

b) Soit d l'affixe du point D image de C par la rotation R , montrer que $d = a + 1$

(0.25pt)

$$\begin{aligned}R(C) = D &\Leftrightarrow d = i(\bar{a} - a) + a \\ &\Leftrightarrow d = i(-2i\text{Im}a) + a \\ &\Leftrightarrow d = -i \times 2i \times \frac{1}{2} + a \\ &\Leftrightarrow d = 1 + a\end{aligned}$$

D'où : $d = a + 1$

c) Soit I le point d'affixe le nombre 1, montrer que $ADIO$ est un losange.

(0.5pt)

$$d - 1 = a \Leftrightarrow \vec{ID} = \vec{OA} \Leftrightarrow ADIO \text{ est un parallélogramme (1)}$$

$$\begin{cases} OA = |a| = |e^{i\frac{\pi}{6}}| = 1 \\ OI = |z_I| = |1| = 1 \end{cases} \Rightarrow OA = OI \quad (2)$$

De (1) et (2) on en déduit que : $ADIO$ est un losange

- 5 a Vérifier que $d - b = \frac{\sqrt{3}-1}{2}(1-i)$; en déduire un argument du nombre $d - b$ (0.75pt)

$$\begin{aligned} d - b &= 1 + a - b = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} - \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{2 + \sqrt{3} - 3}{2} - \frac{\sqrt{3} - 1}{2}i \\ &= \frac{\sqrt{3} - 1}{2} - \frac{\sqrt{3} - 1}{2}i \\ &= \frac{\sqrt{3} - 1}{2}(1 - i) \end{aligned}$$

D'où : $d - b = \frac{\sqrt{3}-1}{2}(1-i)$

$$\begin{aligned} d - b = \frac{\sqrt{3}-1}{2}(1-i) &\Leftrightarrow d - b = (\sqrt{3}-1) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \right) \\ &\Leftrightarrow d - b = (\sqrt{3}-1) e^{-i\frac{\pi}{4}} \end{aligned}$$

Puisque $\sqrt{3} - 1 > 0$, alors : $\arg(d - b) \equiv -\frac{\pi}{4} [2\pi]$

- b Écrire le nombre $1 - b$ sous forme trigonométrique. (0.5pt)

$$1 - b = 1 - \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$$

D'où : $1 - b = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$

- c Déduire une mesure de l'angle $(\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BD})$ (0.5pt)

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BD}) &\equiv \arg\left(\frac{d-b}{1-b}\right) [2\pi] \equiv \arg(d-b) - \arg(1-b) [2\pi] \equiv -\frac{\pi}{4} - \frac{4\pi}{3} [2\pi] \\ &\equiv -\frac{3\pi}{12} - \frac{16\pi}{12} [2\pi] \equiv -\frac{19\pi}{12} [2\pi] \equiv \frac{5\pi}{12} [2\pi] \end{aligned}$$

D'où : $(\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BD}) \equiv \frac{5\pi}{12} [2\pi]$

Exercice 4 (9 points)

Soit la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(0) = 0$ et $f(x) = 2x \ln x - 2x$ si $x > 0$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 1cm)

- 1 Montrer que f est continue à droite au point 0. (0.5pt)

Puisque $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} 2x = 0$, alors :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x \ln x - 2x = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2(x \ln x - x) = 2(0 - 0) = 0 = f(0)$$

D'où : la fonction f est continue à droite au point 0.

2

- a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(0.5pt)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x \ln x - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x (\ln x - 1)$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - 1) = +\infty$, alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x (\ln x - 1) = +\infty$

D'où : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

- b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter géométriquement le résultat.

(0.5pt)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x \ln x - 2x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 (\ln x - 1) = +\infty$$

Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

D'où : (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$

3

- a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter géométriquement le résultat.

(0.75pt)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2x \ln x - 2x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2 (\ln x - 1) = -\infty$$

Donc : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = -\infty$

On a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - 0}{x - 0} = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\infty$

D'où : la fonction f n'est pas dérivable à droite au point 0

- b) Calculer $f'(x)$ pour tout x de $]0, +\infty[$.

(0.5pt)

La f est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme somme et produit des fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$ donc pour tout x de $]0, +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x)' \ln x + 2x (\ln x)' - (2x)' \\ &= 2 \ln x + \frac{2x}{x} - 2 \\ &= 2 \ln x \end{aligned}$$

D'où : $(\forall x \in]0, +\infty[); f'(x) = 2 \ln x$

- c) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $[0, +\infty[$

(0.5pt)

- Si $x \in]0, 1]$, alors $\ln x \leq 0$, alors $f'(x) \leq 0$, d'où f est décroissante sur $]0, 1]$
- Si $x \in [1, +\infty[$, alors $\ln x \geq 0$, alors $f'(x) \geq 0$, d'où f est croissante sur $[1, +\infty[$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$	0	-2	$+\infty$

4

- a) Résoudre dans l'intervalle $]0, +\infty[$ les équations $f(x) = 0$ et $f(x) = x$ (0.5pt)

Soient S_1 et S_2 les ensembles des solutions d'équations respectives $f(x) = 0$ et $f(x) = x$.

$$\begin{aligned}
 f(x) = 0 &\Leftrightarrow 2x \ln x - 2x = 0 \\
 &\Leftrightarrow 2x (\ln x - 1) = 0 \\
 &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } \ln x - 1 = 0 \\
 &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } \ln x = 1 \\
 &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = e
 \end{aligned}$$

Puisque : $0 \notin]0, +\infty[$ et $e \in]0, +\infty[$

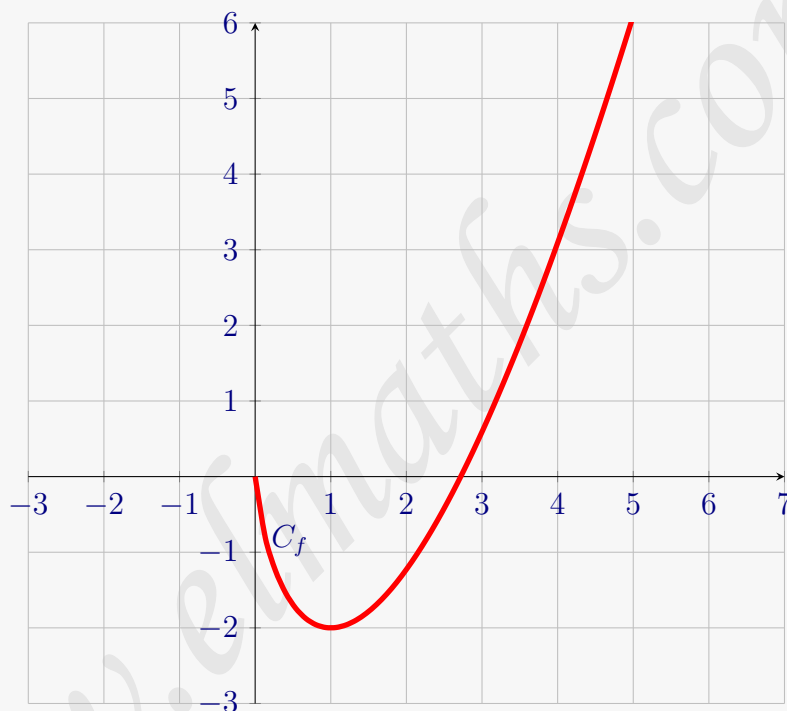
Alors : $S_1 = \{e\}$

$$\begin{aligned}
 f(x) = x &\Leftrightarrow 2x \ln x - 2x = x \\
 &\Leftrightarrow x (2 \ln x - 3) = 0 \\
 &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 2 \ln x - 3 = 0 \\
 &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } \ln x = \frac{3}{2} \\
 &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = e^{\frac{3}{2}}
 \end{aligned}$$

Puisque : $0 \notin]0, +\infty[$ et $e^{\frac{3}{2}} \in]0, +\infty[$

Alors : $S_2 = \{e^{\frac{3}{2}}\}$

- b) Construire la courbe (C) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (on prend $e^{\frac{3}{2}} \simeq 4.5$) (1pt)



5

- a) En utilisant une intégration par parties, montrer que $\int_1^e x \ln x dx = \frac{1+e^2}{4}$ (0.5pt)

Par la méthode d'intégration par parties, on a :

$$\begin{aligned}
 \int_1^e x \ln x dx &= \int_1^e \left(\frac{1}{2}x^2\right)' \ln x dx = \left[\frac{1}{2}x^2 \ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{2}x^2 \frac{1}{x} dx \\
 &= \frac{1}{2}e^2 \ln e - \frac{1}{2}e^1 \ln 1 - \int_1^e \frac{1}{2}x dx = \frac{1}{2}e^2 - \left[\frac{1}{4}x^2\right]_1^e \\
 &= \frac{1}{2}e^2 - \left[\frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{4} \times 1^2\right] = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4} \\
 &= \frac{2e^2 - e^2 + 1}{4} = \frac{1+e^2}{4}
 \end{aligned}$$

D'où : $\int_1^e x \ln x dx = \frac{1+e^2}{4}$

- b) En déduire : $\int_1^e f(x)dx$

(0.5pt)

$$\begin{aligned}\int_1^e f(x)dx &= \int_1^e 2x \ln x - 2x dx \\ &= 2 \int_1^e x \ln x dx - \int_1^e 2x dx \\ &= 2 \times \frac{1+e^2}{4} - \left[x^2 \right]_1^e \\ &= \frac{1+e^2}{2} - \left[e^2 - 1^2 \right] \\ &= \frac{1+e^2}{2} - \frac{2e^2}{2} + \frac{2}{2} \\ &= \frac{1+e^2-2e^2+2}{2} \\ &= \frac{3-e^2}{2}\end{aligned}$$

D'où : $\int_1^e f(x)dx = \frac{3-e^2}{2}$

6

- a) Déterminer le minimum de f sur $]0, +\infty[$

(0.25pt)

La fonction f est décroissante sur $]0, 1]$ et croissante sur $[1, +\infty[$,
donc f admet un minimum au point 1 est $f(1) = -2$,

d'où : le minimum de f sur $]0, +\infty[$ est -2

- b) En déduire que pour tout x de $]0, +\infty[$, $\ln x \geq \frac{x-1}{x}$

(0.5pt)

Pour tout x de $]0, +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}f(x) &\geq \min_{x \in]0, +\infty[} f(x) \Leftrightarrow 2x \ln x - 2x \geq -2 \\ &\Leftrightarrow x \ln x - x \geq -1 \\ &\Leftrightarrow x \ln x \geq x - 1 \\ &\Leftrightarrow \ln x \geq \frac{x-1}{x} \quad (\text{car } x > 0)\end{aligned}$$

D'où : $\left(\forall x \in]0, +\infty[, \ln x \geq \frac{x-1}{x} \right)$

7

Soit g la restriction de la fonction f à l'intervalle $[1, +\infty[$

- a) Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J qu'on déterminera.

(0.5pt)

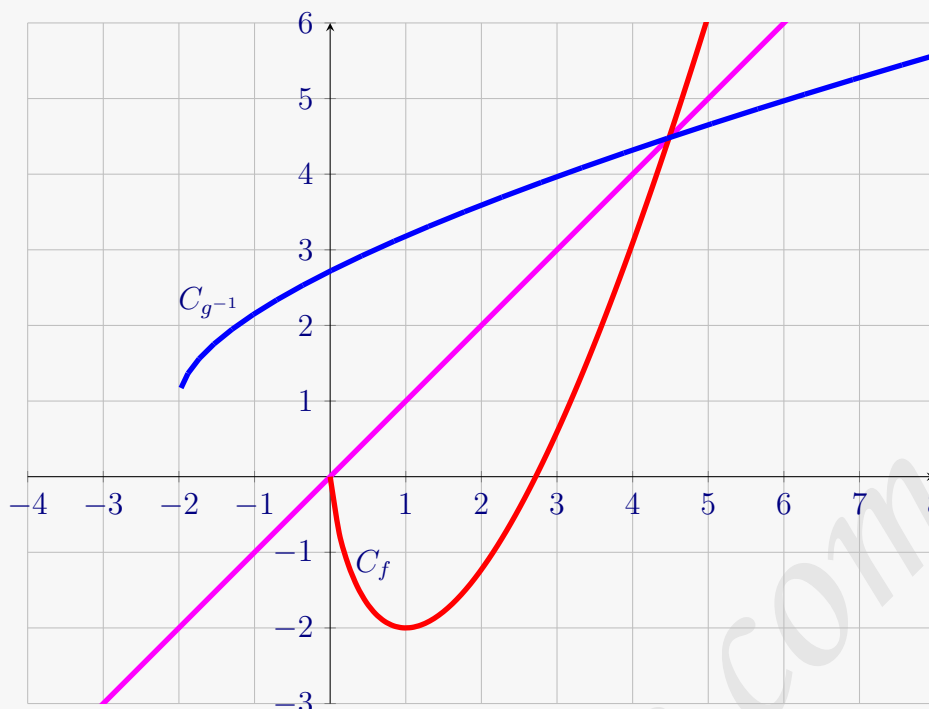
Pour tout x de $[1, +\infty[$, la fonction f est continue, dérivable et strictement croissante.

Alors g est continue, dérivable et strictement croissante sur $[1, +\infty[$.

Donc : la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J

Avec : $J = f\left([1, +\infty[\right) = \left[f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[= [-2, +\infty[$

- b) Construire dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe représentative de la fonction g^{-1} (0.75pt)



8 On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} h(x) = x^3 + 3x & ; \quad x \leq 0 \\ h(x) = 2x \ln x - 2x & ; \quad x > 0 \end{cases}$$

- a) Étudier la continuité de h au point 0.

(0.5pt)

On a : $h(0) = 0^3 + 3 \times 0 = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$, alors :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x \ln x - 2x = 2 \times 0 - 2 \times 0 = 0 = h(0)$$

D'où : la fonction h est continue au point 0

- b) Étudier la dérivabilité de la fonction h à gauche au point 0 puis interpréter géométriquement le résultat.

(0.5pt)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3 + 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 + 3 = 3$$

Donc : h est dérivable à gauche au point 0 et on a $h_g'(0) = 3$

D'où : la courbe de h admet une demi-tangente à gauche au point 0 d'équation $y = 3x$

- c) La fonction h est-elle dérivable au point 0 ? justifier.

(0.25pt)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x \ln x - 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2 \ln x - 2 = -\infty$$

Donc h n'est pas dérivable à droite au point 0

D'où : h n'est pas dérivable au point 0