طريقة لبناء تمرين حول المتتاليات العددية وفق الإطار المرجعي للامتحان الوطني

علي تاموسيت

المركز الجهوي لمهن التربية والتكوين جهة سوس ماسة

tamoussit2009@gmail.com

الهدف من هذه المداخلة

ليس التنميط بل إعطاء طريقة لإنتاج تمارين حول المتتاليات العددية تستهدف القدرات الواردة بالإطار المرجعي الخاص بالامتحان الوطني لمادة الرياضيات.

عرض للقدرات الواردة بالإطار المرجعي الخاص بالامتحان الوطني لمادة الرياضيات

شعبة العلوم التجريبية وشعبة العلوم والتكنولوجيات

المجال الفرعي الأول : المتتاليات العددية

1.1.1. استعمال المتتاليات الهندسية والمتتاليات الحسابية في دراسة أمثلة من متتاليات من الشكل: $u_{n+1} = au_n + b$ و $u_{n+1} = \dfrac{au_n + b}{cu_n + d}$ ؛

2.1.1. استعمال نهايات المتتاليات المرجعية ومصاديق التقارب لتحديد نهايات متتاليات عددية؛

3.1.1. تحديد نهاية مركب متتالية و دالة متصلة (متتاليات من النوع $v_n = f(u_n)$)؛

4.1.1. تحديد نهاية متتالية (u_n) متقاربة من الشكل $u_{n+1} = f(u_n)$ حيث f دالة متصلة على مجال I وتحقق $f(I) \subset I$ ؛

5.1.1. استعمال المتتاليات في حل مسائل متنوعة.

دراسة متتالية من نوع $u_{n+1} = a\,u_n + b$

Suite arithmético-géométrique

عموما دراسة متتالية من نوع $u_{n+1} = a\,u_n + b$ (المتتالية "**الهدف**") من خلال ما يلي:

- دراسة تقارب المتتالية الهدف (مصاديق التقارب)
- اعتبار متتالية "**مساعدة**" بهدف إيجاد الحد العام للمتتالية "الهدف"
- حساب نهاية المتتالية "الهدف"

أحيانا يمكن اقتراح أسئلة إضافية تستهدف :

- إيجاد قيم حدية (أصغر أو أكبر عدد صحيح طبيعي و هنا يتم استحضار الدوال اللوغاريتمية لحل متراجحة).
- حساب نهاية مركب متتالية ودالة متصلة.

المتغيرات المتحكمة في بناء تمرين يتعلق بمتتالية من نوع $u_{n+1} = a\,u_n + b$

العددين الحقيقيين a و b	الحد الأول

الشروط الأولية (سنعتبرها من الآن أنها محققة ضمنيا)

$a \neq 1$: تجنب حالة خاصة (متتالية حسابية)

$b \neq 0$: تجنب حالة خاصة (متتالية هندسية)

الحد الأول يخالف حل المعادلة $x = ax + b$ تجنبا لحالة خاصة (متتالية ثابتة)

ما الهدف من إدراج متتالية مساعدة؟ وكيف يتم اختيارها؟ وما طبيعتها؟

لتحديد نهاية متتالية من نوع $u_{n+1} = a\,u_n + b$ (إن وجدت) يستحسن إيجاد حدها العام أولا وذلك من خلال اعتبار متتالية مساعدة (طبيعتها معلومة).

في ما يلي الخطوات المتبعة:

1. حل المعادلة $x = a\,x + b$ ، لنرمز لهذا الحل الوحيد بـِ α
2. نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة بـِ:
   $v_n = u_n - \alpha$ أو $v_n = k\,(\,u_n - \alpha\,)$ حيث k عدد حقيقي غير منعدم
3. نبين أن المتتالية (المساعدة) (v_n) هندسية أساسها a
4. نعبر عن (v_n) ثم (u_n) بدلالة n

استنتاج هام

لضمان تقارب المتتالية يجب أن يتم اختيار

العدد a من المجال المفتوح $]-1,1[$

ماذا عن إدراج مصاديق التقارب بالدراسة؟

Situation 1 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par :

$$u_0 = c \quad \text{et} \quad (\forall n \in \mathbb{N}),\ u_{n+1} = au_n + b$$

1)- Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}),\ u_n \geq \beta$

2)- a)- Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N}),\ u_{n+1} - u_n = (a-1)\left(u_n - \dfrac{b}{1-a}\right)$

b)- En déduire que la suite (u_n) est décroissante et qu'elle est convergente.

3)- On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}),\ v_n = u_n - \alpha$

a)- Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison q à déterminer.

b)- Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

c)- Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

4)- On considère la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}),\ w_n = f(u_n)$.

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.

Comment choisir *a*, *b*, *c*, *α*, *β* *et* *f* ?

Situation 2 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par :

$$u_0 = c \quad \text{et} \quad (\forall n \in \mathbb{N}),\ u_{n+1} = au_n + b$$

1)- Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}),\ u_n \leq \beta$

2)- a)- Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N}),\ u_{n+1} - u_n = (a-1)\left(u_n - \dfrac{b}{1-a}\right)$

b)- En déduire que la suite (u_n) est croissante et qu'elle est convergente.

3)- On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}),\ v_n = u_n - \alpha$

a)- Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison q à déterminer.

b)- Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

c)- Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

4)- On considère la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}),\ w_n = f(u_n)$.

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.

Comment choisir *a*, *b*, *c*, *α*, *β* *et* *f* ?

Un exemple concret de la situation 1

1)- On prend : $a = \dfrac{3}{4} \in]0,1[$ et $b = \dfrac{1}{2}$

2)- Résolvons l'équation : $x = ax + b$

La solution trouvée est $\dfrac{b}{1-a} = 2$

3)- On prend : $\alpha = \beta = 2$ et $c = 3 > \beta$

4)- La fonction f peut-être choisi parmi les fonctions continues

Exercice 1: Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique définie par :

$$u_0 = 3 \quad \text{et} \quad (\forall n \in \mathbb{N}),\ u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{2}$$

1)- Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}),\ u_n \geq 2$

2)- a)- Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N}),\ u_{n+1} - u_n = \frac{-1}{4}(u_n - 2)$

b)- En déduire que la suite (u_n) est décroissante et qu'elle est convergente.

3)- On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}),\ v_n = u_n - 2$

a)- Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison q à déterminer

b)- Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

c)- Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

4)- On considère la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}),\ w_n = (1 + u_n)e^{u_n}$

Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n$

Exercice 2: Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad (\forall n \in \mathbb{N}),\ u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{2}$$

1)- Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}),\ u_n \leq 2$

2)- a)- Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N}),\ u_{n+1} - u_n = \frac{-1}{4}(u_n - 2)$

b)- En déduire que la suite (u_n) est croissante et qu'elle est convergente

3)- On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}),\ v_n = u_n - 2$

a)- Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison q à déterminer

b)- Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

c)- Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

4)- On considère la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}),\ w_n = \ln(3 - u_n)$

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$

ملاحظة

$$\boxed{(\forall n \in \mathbb{N}),\ u_n = 5 - 3\left(\frac{2}{7}\right)^n}$$

$$u_0 = 2$$

$$v_n = -3\left(\frac{2}{7}\right)^n \quad ; \quad v_n = u_n - 5$$

$$u_{n+1} = au_n + b \ ; \quad a = \frac{2}{7} \quad ; \quad b = \frac{25}{7}$$

المتتاليات العددية والموسم الدراسي أية علاقة؟

$$(\forall n \in \mathbb{N}),\ u_{n+1} = \frac{2019}{2020} u_n + \frac{1}{2020}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}),\ u_{n+1} = \frac{19}{20} u_n + \frac{1}{20}$$

ماذا عن دراسة متتالية من نوع $u_{n+1}=\frac{au_n+b}{cu_n+d}$ ؟

مثال تقديمي:

$$\begin{cases} u_0=\frac{1}{11} \\ (\forall n\in\mathbb{N}),\ u_{n+1}=\frac{2u_n}{u_n-1} \end{cases}$$

لنحسب الحدود الأولى:

$$u_1 = \frac{-1}{5}$$

$$u_2 = \frac{1}{3}$$

$$u_3 = -1$$

$$u_4 = 1$$

المتتالية في هذه الحالة غير معرفة ابتداء من $n = 5$!

خاصية:

نضع: $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$

- إذا كانت المعادلة $f(x) = x$ تقبل حلا وحيدا α، فإننا نختار متتالية مساعدة معرفة بِـ: $v_n=\dfrac{1}{u_n-\alpha}$ ، وفي هذه الحالة المتتالية (v_n) حسابية أساسها $r=\dfrac{c}{a-\alpha c}=\dfrac{2c}{a+d}$

- إذا كانت المعادلة $f(x)=x$ تقبل حلين حقيقيين α و β، فإننا نختار متتالية مساعدة معرفة بِـ: $v_n=\frac{u_n-\alpha}{u_n-\beta}$ ، وفي هذه الحالة المتتالية (v_n) هندسية أساسها

$$q=\frac{c\beta+d}{c\alpha+d}=\frac{a-c\alpha}{a-c\beta}$$

الرجوع للمثال تقديمي: $\forall n\in\mathbb{N}\ ,u_{n+1}=\dfrac{2u_n}{u_n-1}$

كيف نختار u_0؟

نفترض أنه يوجد عدد صحيح طبيعي p بحيث $u_p = 1$

لدينا: $v_p=\dfrac{u_p}{u_p-3}=\dfrac{-1}{2}$ و $v_p=v_0q^p=v_0(-2)^p$

أي: $v_0=\left(\dfrac{-1}{2}\right)^{p+1}$ ، ومنه: $v_0\notin E:=\left\{\left(\dfrac{-1}{2}\right)^{p+1},\ p\in\mathbb{N}\right\}$

ملاحظة 1

بالرجوع للاختيار السابقة $u_0=\frac{1}{11}$ ، نجد:

$$v_0=\frac{u_0}{u_0-3}=\frac{-1}{32}\in E$$

أما بالنسبة لاختيار $u_0=7$ فنجد:

$$v_0=\frac{u_0}{u_0-3}=\frac{7}{4}\notin E$$

ملاحظة 2

$$\boxed{(\forall n \in \mathbb{N}),\ u_n = \frac{5^n - 3^n}{5^n + 3^n}}$$

$$u_0 = 0$$

$$v_n = \left(\frac{5}{3}\right)^n \quad ; \quad u_n = \frac{v_n - 1}{v_n + 1}$$

$$u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d}$$

شكرا على حسن انتباهكم